内容简介

本书是学习数学分析课程的一本极好的辅导书，分上、下两册，编写顺序与一般的数学分析教材同步，本册内容包括实数与数列极限，函数、极限与连续性，导数与微分，微分中值定理与利用导数研究函数，不定积分，定积分及其应用等，在归纳内容、释疑解难的基础上，用大量、全面的例题为读者诠释概念，演绎技巧，举证方法，通过学习它，读者可以循序渐进地融会知识，理解概念，熟悉技巧和掌握方法. 因此，读者有必要认真学习本书，通过它化教科书上的抽象概念为自己的切实有用的知识.

希望本书能成为你的良师益友，欢迎你选用本系列丛书.

前　言

数学分析是高等学校数学专业的主要基础课程.对初学者来说,数学分析课程的概念难懂,方法抽象,解题难以入手,思维难以展开.为了帮助大家学好数学分析,解决学习中的困难,指导学习的方法,提高学习的效率,我们编写了本书.

为了使读者能循序渐进,扎扎实实地从理论上、思维上、方法上掌握数学分析的概念与内容、方法及技巧,我们采用与教材同步、以章节为序的方法,对问题逐个地进行讨论、分析、举例、归纳,在提升知识、解析疑难的基础上,用大量的例题为读者诠释概念、演绎技巧、举证方法,使读者通过例题边分析、边练习、边讨论、边总结,从而更好地融会知识、理解概念、熟悉技巧和掌握方法,将书本上的抽象理论真正化为自己的切实有用的知识,更为后续课程打下良好的数学基础.

本书不像某些重点讲授方法的参考书那样,以问题归类来讨论方法.因此希望读者学习以后,自己做一些归纳提高、整理加工的工作,以增强自己的实践能力.

数学分析的题目浩如烟海,编者只能选编其中一小部分比较普遍的和比较典型的献给读者.有些例题是为了举证方法而选用的,因此不一定是该例的最佳方法.本书以较多的篇幅来讨论命题的论证,这是数学分析的理论基础,但也用了相当篇幅来叙述计算方法,希望能以此提高读者的计算和证明能力.

本书的编写出版得到了华中科技大学出版社的热心支持和帮

助，在此向他们表示衷心的感谢．在本书写作中，曾参阅了一些作者关于数学分析问题的著作，本人借此向他们表示诚挚的谢意．

由于经验不足和学识所限，本书的失误之处望同行和读者热心指正．

孙清华　孙　昊

2003年1月

目　录

第一章　实数与数列极限

第一节　实数的表示与实数系的连续性

主要内容

一、实数的表示

1. 全体有理数与全体无理数所构成的集合称为实数集合，记作

$$\mathbf{R} = \{x \mid x \text{ 是有理数或无理数}\}.$$

2. 任何一个实数都可用无尽小数表示. 其中任何有理数都可以表示为无尽循环小数（有尽小数视作后面有无尽个零的循环小数），任何无理数都可以表示为无尽小数.

3. 实数分为非负实数与负实数. 任何非负实数大于任何负实数.

对任意两个实数 a 和 b，必有且只有以下三种情形之一（称为三歧性）：

$$a > b,\quad a = b,\quad a < b.$$

4. 有尽小数在实数系中处处稠密.

设 a 和 b 是实数，$a < b$，则存在有尽小数 c，满足 $a < c < b$.

5. 实数 x 的绝对值定义为

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{若 } x \text{ 是非负实数}, \\ -x, & \text{若 } x \text{ 是负实数}. \end{cases}$$

$-x$ 称为 x 的相反数，零的相反数是零本身.

二、实数系的连续性

1. 对于实数集合中的任何的分割(Dedekind)$A|A'$，存在产生这个分割的实数 β，这个数 β：1) 或是下类 A 中的最大数；2) 或是上类 A' 中的最小数.

此性质称为实数系的连续性，或完备性、密接性.

2. 实数集 $\mathbf{R}$ 的各种子集，简称为数集.

设 E 为一非空数集，若 $\exists\ M\in\mathbf{R}$，使 $\forall\ x\in E$，有 $x\leqslant M$，则称 M 为 E 的一个上界；若 $\exists\ m\in\mathbf{R}$，使 $\forall\ x\in E$，有 $x\geqslant m$，则称 m 为 E 的一个下界. 既有上界又有下界的数集 E，称为有界集. 即

E 为有界集 $\Longleftrightarrow\exists\ X>0$，使 $\forall\ x\in E$，有 $|x|\leqslant X$.

E 的上界中的最小数，称为数集 E 的上确界，记作 $\sup E$；E 的下界中的最大数，称为数集 E 的下确界，记作 $\inf E$.

3. 确界存在定理——实数系连续性定理　非空有上界的数集必有上确界，非空有下界的数集必有下确界.

4. 非空有界数集的上(下)确界是惟一的.

疑难解析

1. 数集的最大数与最小数同数集的上确界与下确界有什么关系?

答　设 E 为一数集，如果 $\exists\ \beta\in E$，使 $\forall\ x\in E$，有 $x\leqslant\beta$，则称 β 是 E 的最大数；如果 $\exists\ \alpha\in E$，使 $\forall\ x\in E$，有 $x\geqslant\alpha$，则称 α 是 E 的最小数.

与 E 的上、下界定义比较，知其区别在于：α 与 β 是属于 E 的，而 E 的上、下界是属于 $\mathbf{R}$ 的，可能不属于 E. 所以，上、下确界可能不属于 E.

E 的上界的全体不可能有最大数，一定有最小数，即上确界；E 的下界的全体不可能有最小数，一定有最大数，即下确界.

2. 为什么要引入确界概念?

答　因为，对有限数集 E，必有最大数 $\max E$ 和最小数 $\min E$，它们分别为数集 E 的上边边界和下边边界. 但当数集为无限集时，最大数与最小数就有可能不存在. 因此，需要找出一个数作为它的上边（下边）边界.

若无限数集上方（下方）无界，则没有上边（下边）边界. 若无限数集有上（下）界，且存在最大（小）数，则此最大（小）数即为此数集的上边（下边）边界；若不存在最大（小）数，则可以用其上（下）确界来作为上边（下边）边界. 如无限数集 $\{n/(n+1)\,|\,n\in\mathbf{N}\}$ 没有最大数，但有上界，则其上确界 $\sup\{n/(n+1)\,|\,n\in\mathbf{N}\}=1$ 可作为数集的上边边界.

另外，求开区间 (a,b) 长度的问题也要利用上、下确界来解决. 因为，开区间 (a,b) 是有界的无限集，没有最大数，也没有最小数，也有上确界 b 和下确界 a. 以 a 和 b 作为数集的下边边界与上边边界，就可求得开区间 (a,b) 的长度 d 为

$$\begin{aligned} d &= \sup\{x\,|\,a<x<b\}-\inf\{x\,|\,a<x<b\} \\ &= \sup\{y-x\,|\,\forall\, x,y\in(a,b),y>x\}=b-a. \end{aligned}$$

由上可见，引入确界概念可以更好地描述实数的连续性，并且给证明问题带来许多方便.

3. 试叙述上（下）确界的等价命题.

答　数集 E 的上确界 $\sup E=\beta$ 有三种等价命题，它们是：

(1) $\begin{cases} \forall\, x\in E\Rightarrow x\leqslant\beta; \\ \forall\, \varepsilon>0,\exists\, x_0\in E\Rightarrow\beta-\varepsilon<x_0. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \forall\, x\in E\Rightarrow x\leqslant\beta; \\ \forall\, x<\beta,\exists\, x_0\in E\Rightarrow x<x_0. \end{cases}$

(3) $\beta=\min\{y\,|\,\forall\, x\in E,x\leqslant y\}$，即数集 E 的上确界 β 是数集 E 的上界所构成数集中的最小数.

类似地，可写出下确界 $\inf E=\alpha$ 的等价命题.

方法、技巧与典型例题分析

本节的例题绝大多数是证明题，因此必须对概念十分熟悉和理解. 证明可以从正面进行，也可以从反面进行. 一般，当问题从正面不易入手时，可考虑利用反证法证明.

一、最大数与最小数

例 1 设 c 为正整数，而不为整数的平方，且分割 $A|B$ 确定实数 c. 其中 B 类包含所有合于 $b^2 > c$ 的正有理数 b，A 类包含所有其余的有理数. 求证：A 类中无最大数，B 类中无最小数.

证 在 A 类中任取有理数 $a > 0$，则 $a^2 < c$. 设 $r = c - a^2$，选取有理数 x，使 $0 < x < 1$，且 $(a + x)^2 < c$. 这在 $0 < x < \dfrac{r}{2a + 1}$ 时即可实现，因为

$$c - (a + x)^2 = r - 2ax - x^2 > r - (2a + 1)x > 0.$$

取 $\delta = \min\left\{1, \dfrac{c - a^2}{2a + 1}\right\}$，则在 $(0, \delta)$ 中任取一有理数 x，都有 $(a + x)^2 < c$，所以 $a + x$ 属于 A 类，且 $a + x > a$，即 A 类中无最大数.

在 B 类中任取一有理数 b，设 $s = b^2 - c$. 选取有理数 y，使 $0 < y < b$，且 $(b - y)^2 > c$. 这在 $0 < y < \dfrac{s}{2b}$ 时即可实现，因为

$$(b - y)^2 - c = s - 2by + y^2 > s - 2by > 0,$$

取 $\varepsilon = \min\left\{b, \dfrac{b^2 - c}{2b}\right\}$，则在 $(0, \varepsilon)$ 中任取一有理数 y，有 $(b - y)^2 > c$，所以 $b - y$ 属于 B 类，且 $b - y < b$，即 B 类中无最小数.

例 2 设 $A = \{x | x \leqslant 0 \text{ 或 } x > 0, \text{且 } x^2 < 2, x \in \mathbf{Q}\}$,

$$B = \{x | x > 0, \text{且 } x^2 > 2, x \in \mathbf{Q}\},$$

其中 $\mathbf{Q}$ 为有理数. 证明：A 类中无最大数，B 类中无最小数.

证 利用例 1，令 $c = 2$，即可证出. 请读者一试.

例 3 设 $a \leqslant c \leqslant b$，证明：$|c| \leqslant \max\{|a|, |b|\}$.

证 因为

$$\max\{|a|,|b|\}\geqslant|b|\geqslant b\geqslant c,$$
$$-\max\{|a|,|b|\}\leqslant-|a|\leqslant a\leqslant c,$$

所以
$$|c|\leqslant\max\{|a|,|b|\}.$$

例 4 设 $\max\{|a+b|,|a-b|\}<1/2$,求证:

$$|a|<1/2,\ |b|<1/2.$$

证 用反证法.设 $|a|>1/2,|b|>1/2$.

(1) 设 $0<a<b$,则

$$1/2<|a|<|a+b|,\ 1/2<|b|<|a+b|,$$

从而 $\max\{|a+b|,|a-b|\}>\frac{1}{2}$,引出矛盾.

(2) 设 $a<b<0$,则

$$1/2<|a|<|a+b|,\quad 1/2<|b|<|a+b|,$$

从而 $\max\{|a+b|,|a-b|\}>1/2$,引出矛盾.

(3) 设 $a<0<b$,则

$$1/2<|a|<|a-b|,\quad 1/2<|b|<|a-b|,$$

从而 $\max\{|a+b|,|a-b|\}>1/2$,引出矛盾.

综上所述可知,必有 $\max\{|a+b|,|a-b|\}<1/2$.

例 5 证明:$\forall\ a,b\in\mathbf{R}$,有

$$\max\{|a+b|,|a-b|,|1-b|\}\geqslant1/2.$$

证 用反证法.设 $\max\{|a+b|,|a-b|,|1-b|\}<1/2$.

由例 4 知,此时有 $|a|<1/2,|b|<1/2$,因而

$$|1-b|\geqslant1-|b|>1/2,$$

与所设矛盾.故命题必成立.

二、上、下确界的命题

例 6 证明:若数集 E 的上(下)确界存在,则它必惟一存在.

证 用反证法.设 p 和 q 是 E 的上确界,且 $p\neq\varepsilon_0=(q-p)/2$,则 $\forall\ x\in E,x\leqslant p<q-(q-p)/2=q-\varepsilon_0$,这与 q 为 E 的上确界矛盾.故必有 $p=q$,即数集 E 的上确界是惟一的.

类似可证,数集 E 的下确界也是惟一的.

例 7 设 $E=\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots\right\}$, 求 $\sup E$,$\inf E$, 问: $\min E$ 与 $\max E$ 是否存在?

解 因为 $\forall\, n, 1-\frac{1}{n}<1$,且 $\forall$ 任 $\varepsilon>0$,$\exists\, n_0$,使 $1-\frac{1}{n_0}\in\left\{1-\frac{1}{n}\right\}$,$1-\frac{1}{n}>1-\varepsilon$,仅当 $n_0>\frac{1}{\varepsilon}$,所以,$\sup E=1$.

类似可证,$\inf E=\frac{1}{2}$.

由 $E=\left\{1-\frac{1}{n}\right\}$是单调增加的知,$\min E=\frac{1}{2}$,$\max E$不存在.

例 8 设 $E=\{x\mid x\in\mathbf{Q},且\ x^2<2,x>0\}$,证明:$E$ 有上界,但在 $\mathbf{Q}$ 内没有上确界.

证 E 有上界是显然的.例如,2 就是 E 的一个上界.

用反证法证明 E 在 $\mathbf{Q}$ 内无上确界.

设 E 在 $\mathbf{Q}$ 内有上确界,$\sup E=\frac{n}{m}(m,n\in\mathbf{N}^+$,且 m,n 互质),则有 $1<\left(\frac{n}{m}\right)^2<3$. 因为有理数的平方不可能等于2,就出现下列两种可能.

(1) $1<\left(\frac{n}{m}\right)^2<2$. 若记 $2-\left(\frac{n}{m}\right)^2=t$,则 $0<t<1$. 令 $r=\frac{n}{6m}t$,有$\frac{n}{m}+r>0$,且$\frac{n}{m}+r\in\mathbf{Q}$.

由于 $r^2=\frac{n^2}{36m^2}t^2<\frac{t}{18}$,且$\frac{2n}{m}r=\frac{n^2}{3m^2}t<\frac{2}{3}t$,得

$$\left(\frac{n}{m}+r\right)^2-2=r^2+\frac{2n}{m}r-t<0.$$

由此可知,$\frac{n}{m}+r\in\mathbf{Q}$,与$\frac{n}{m}$ 是 $\mathbf{Q}$ 的上确界矛盾.

(2) $2<\left(\frac{n}{m}\right)^2<3$. 若记$\left(\frac{n}{m}\right)^2-2=t$,则 $0<t<1$. 令 $r=$

$\frac{n}{6m}t$，有$\frac{n}{m}-r>0$，$\frac{n}{m}-r\in \mathbf{Q}$.

由于$\frac{2n}{m}r=\frac{n^2}{3m^2}t<t$，得

$$\left(\frac{n}{m}-r\right)^2-2=r^2-\frac{2n}{m}+t>0.$$

由此可知，$\frac{n}{m}-r$ 也是 Q 的上界，与$\frac{n}{m}$ 是 Q 的上确界矛盾.

综上所述知，E 在 Q 内无上确界.

例 9 设 $E=\{x|x^2<2,x\in \mathbf{Q}\}$，验证：

$$\sup=\sqrt{2},\quad \inf=-\sqrt{2}.$$

证 因为$\forall\ \in E$，由 $x^2<2$ 可得 $x<\sqrt{2}\Rightarrow\sqrt{2}$ 是 E 的一个上界. 又取任 $a<2$ 知，依有理数集的稠密性，在$(a,\sqrt{2})$中一定存在有理数 x'，使$(x')^2<2$，从而知 $x'\in E$，且 $a<x'\Rightarrow a$ 不是 E 的上界. 于是，依定义知 $\sup E=\sqrt{2}$.

类似可验证，$\inf E=-\sqrt{2}$.

注意 例 9 与例 8 并不矛盾. 例 8 是指 E 在 Q 内无上、下确界，即确界定理在 Q 内不成立.

例 10 设$\{-x\}$是一数集，所含数是与 $x\in\{x\}$ 符号相反的数，证明：

(1) $\inf\{-x\}=-\sup\{x\}$；　(2) $\sup\{-x\}=-\inf\{x\}$.

证 (1) 设$\sup\{x\}=b$，b 为有限实数. 因而，$\forall$ 数集中的所有 x，有 $x\leqslant b$；又对任给的 $\varepsilon>0$，数集中必有 x，使 $x>b-\varepsilon$.

由于 $b\geqslant x$，故 $-b\leqslant -x$；又$\exists\ x$，使 $x>b-\varepsilon$ 则必$\exists\ -x$，使 $-x<-b+\varepsilon$. 因为数集$\{-x\}$具有上述性质，所以

$$\inf\{-x\}=-b=-\sup\{x\}.$$

同理可证 $b=+\infty$ 的情形.

(2) 类似可证，$\sup\{-x\}=-\inf\{x\}$.

例 11 设有数集 A,B,若 $E=A\cup B$,证明:

(1) $\sup E=\max\{\sup A,\sup B\}$;

(2) $\inf E=\min\{\inf A,\inf B\}$.

证 (1) 若 A,B 中至少有一个无上界,则 E 也无上界,等式变为 $+\infty=+\infty$.

若 A,B 都有上界,并设 E 的上界为 $\sup E$,则由 $E=A\cup B$,$x\in A$(或 $x\in B$)$\Rightarrow x\in E$. 于是,$x\leqslant \sup E$,即数 $\sup E$ 是数集 A(或 B)的一个上界,而数 $\sup A$(或 $\sup B$)是 A(或 B)的最小上界. 故有 $\sup A$(或 $\sup B$)$\leqslant \sup E$. 从而证得

$$\sup E\geqslant \max\{\sup A,\sup B\}.$$

又由 $\forall x\in E$,有 $x\in A$(或 $x\in B$)$\Rightarrow x\leqslant \sup A$(或 $x\leqslant \sup B$),即 $x\leqslant \max\{\sup A,\sup B\}$. 从而证得

$$\sup E\leqslant \max\{\sup A,\sup B\}.$$

综合上面两个不等式,知 $\sup E=\max\{\sup A,\sup B\}$ 成立.

(2) 类似可证.

例 12 设 $\{x+y\}$ 为所有 $x+y$ 这些和的集合,其中 $x\in\{x\}$ 及 $y\in\{y\}$,证明:

(1) $\inf\{x+y\}=\inf\{x\}+\inf\{y\}$;

(2) $\sup\{x+y\}=\sup\{x\}+\sup\{y\}$.

证 (1) 考虑下确界为有限的情形.

设 $\inf\{x\}=a$,$\inf\{y\}=b$. 由定义知,$a\leqslant x$,有 $\forall$ 任 $\varepsilon>0$,$\exists\, x$ 使 $x<a+\frac{\varepsilon}{2}$;$b\leqslant y$,且 $\forall$ 任 $\varepsilon>0$,$\exists\, y$,使 $y<b+\frac{\varepsilon}{2}$. 从而知,对于集 $\{x\}$ 和 $\{y\}$ 中的 x 和 y,恒有 $a+b\leqslant x+y$,又 $x+y<a+b+\varepsilon$,故 $\inf\{x+y\}=\inf\{x\}+\inf\{y\}$ 成立.

(2) 类似可证. 只考虑上确界为有限的情形.

例 13 设 $\{xy\}$ 为所有 xy 乘积的集合,其中 $x\in\{x\}$,$y\in\{y\}$,且 $x\geqslant 0$,$y\geqslant 0$. 证明等式:

(1) $\inf\{xy\}=\inf\{x\}\cdot\inf\{y\}$;

(2) $\sup\{xy\}=\sup\{x\}\cdot\sup\{y\}$.

证 (1) 设下确界为有限值,$\inf\{x\}=a$,$\inf\{y\}=b$. 由定义知 $x\geqslant a\geqslant 0$,$y\geqslant b\geqslant 0$,且 $\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ x\in\{x\}$,$y\in\{y\}$,使得 $x<a+\dfrac{\varepsilon}{a+b+1}$,$y<b+\dfrac{\varepsilon}{a+b+1}$,所以,$xy\geqslant ab$. 又数集 $\{x,y\}\exists$ 数 x,y,使

$$xy<\left(a+\frac{\varepsilon}{a+b+1}\right)\left(b+\frac{\varepsilon}{a+b+1}\right)$$
$$=ab+\frac{(a+b)\varepsilon}{a+b+1}+\frac{\varepsilon^2}{(a+b+1)^2},$$

所以,当 $\varepsilon<1$ 时,$xy<ab+\varepsilon$. 即证得

$$\inf\{xy\}=\inf\{x\}\inf\{y\}.$$

(2) 类似可证. 但要考虑上确界为无穷大和有限值两种情形. 特别是,若 $\{x\}$ 仅含元素 0,而 $\sup\{y\}=+\infty$,则 $\sup\{xy\}=\sup\{x\}\cdot\sup\{y\}$ 不成立.

例 14 设 $A,B\subseteq\mathbf{R}$,是非空有界集,证明:

(1) $A\subseteq B\Rightarrow\inf B\leqslant\inf A\leqslant\sup B$;

(2) 如果 $\forall\ a\in A$,$\forall\ b\in B$,$|a-b|<\varepsilon$,则

$$|\sup A-\sup B|\leqslant\varepsilon,\quad |\inf A-\inf B|\leqslant\varepsilon.$$

证 (1) 依定义,$\forall\ x\in A$,$\inf A\leqslant x\leqslant\sup A$,又因为 $A\subseteq B$,所以,$\forall\ x\in A$,$x\geqslant\inf B$,即 $\inf A\geqslant\inf B$.

又 $\forall\ x\in A$,$x\leqslant\sup A\leqslant\sup B$,故命题成立.

(2) 依定义,$\forall\ x\in A$,$\inf A\leqslant x\leqslant\sup A$;$\forall\ x\in B$,$\inf B\leqslant x\leqslant\sup B$. 不妨设 $x_0=\inf A$,$x_1=\sup A$,$x_2=\inf B$,$x_3=\sup B$,则由 $\forall\ a\in A$,$b\in B$,$|a-b|<\varepsilon$,可得出

$$|x_2-x_0|\leqslant\varepsilon,\quad |x_3-x_1|\leqslant\varepsilon.$$

即 $$|\sup A-\sup B|\leqslant\varepsilon,\quad |\inf A-\inf B|\leqslant\varepsilon.$$

第二节　实数的四则运算与实数系的基本性质

主要内容

1. 设a和b为实数，则存在惟一实数u，使得对于满足条件：$\alpha \leqslant a \leqslant \alpha'$，$\beta \leqslant b \leqslant \beta'$的任何有尽小数$\alpha, \alpha'$和$\beta, \beta'$，都有$\alpha + \beta \leqslant u \leqslant \alpha' + \beta'$，于是实数$u$称为实数$a$与实数$b$的和，记作$a+b$.

实数a与实数b的差定义为a与$-b$之和，即$a-b=a+(-b)$.

2. 设a, b为非负实数，则存在唯一实数v，使得对于满足条件：$0 \leqslant \alpha \leqslant a \leqslant \alpha'$，$0 \leqslant \beta \leqslant b \leqslant \beta'$的任何有尽小数$\alpha, \alpha'$和$\beta, \beta'$，都有$\alpha\beta \leqslant v \leqslant \alpha'\beta'$，于是实数$v$称为非负实数$a$与实数$b$的乘积，记作$ab$.

任意实数a与实数b的乘积

$$ab = \begin{cases} |a||b|, & \text{如果 } a,b \text{ 同号}, \\ -|a||b|, & \text{如果 } a,b \text{ 异号}. \end{cases}$$

3. 实数集$\mathbf{R}$是域. 在实数集上定义了加法与乘法，且满足：

(1) 加法交换律　$\forall x, y \in \mathbf{R}, x+y=y+x$.

(2) 加法结合律　$\forall x, y, z \in \mathbf{R}, (x+y)+z=x+(y+z)$.

(3) 存在零元素0，使$x+0=x$.

(4) 存在负元素$-x$，使$x+(-x)=0$.

(5) 乘法交换律　$x \cdot y = y \cdot x$.

(6) 乘法结合律　$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

(7) 存在单位元素1，使$x \cdot 1 = x$.

(8) 存在逆元素x^{-1}，使$x \cdot x^{-1} = 1$.

(9) 乘法分配律　$x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$.

4. 实数域是全序域，满足：

(1) 三歧性　$\forall x, y \in \mathbf{R}$，下列三式中有且仅有一式成立：

$$x = y,\quad x < y,\quad x > y.$$

(2) 传递性　$a < b,\quad b < c \Rightarrow a < c.$

(3) 顺序性　$a < b \Rightarrow a + c < b + c.$

$$a < b,\quad c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c.$$

第三节　不　等　式

主 要 内 容

1. 三角形不等式　设 a, b 为任意实数，则

$$|a| - |b| \leqslant |a + b| \leqslant |a| + |b|,$$

$$|a| - |b| \leqslant |a - b| \leqslant |a| + |b|.$$

2. 伯努利(Bernoulli)不等式　设 $x > -1, n \in \mathbf{N}^+, n \geqslant 2$，则

$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx.$$

3. 柯西(Cauchy)不等式　设 $x_1, x_2, \cdots, x_n; y_1, y_2, \cdots, y_n$ 为两组实数，则

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

4. 平均值不等式　设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为 n 个正实数，则

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leqslant \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$

当且仅当所有 x_i 都相等时，等号成立.

5. 赫尔德(Hölder)不等式　设实数 p, q 满足 $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$，且 a_i, b_i 为非负实数，则

当 $p>1$ 时，$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$，

当 $p<1$ 时，$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

仅当 a_i 与 b_i 成比例时，等号成立.

6. 闵可夫斯基(Minkowski) 不等式　对任意的实数 $r\neq 0, 1$；$a_i, b_i \geqslant 0\ (i=1,2,\cdots,n)$，有

当 $r>1$ 时，$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^r\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^r\right)^{\frac{1}{r}}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^r\right)^{\frac{1}{r}}$，

当 $r<1$ 时，$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^r\right)^{\frac{1}{r}} \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^r\right)^{\frac{1}{r}}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^r\right)^{\frac{1}{r}}$.

仅当 a_i 与 b_i 成比例时，等号成立.

方法、技巧与典型例题分析

在数学分析课程中，不等式是证明许多定理与公式的工具；而数学分析中的一些定理和公式又可导出许多不等式. 不等式表达了许多数学分析问题的结果，而不等式的证明又蕴涵着许多数学分析的技巧，所以掌握不等式与不等式的应用对学习数学分析是十分重要的.

例 1　证明三角形不等式

$$|a|-|b|\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|.$$

证　因为 $-|a|\leqslant a\leqslant|a|$，$-|b|\leqslant b\leqslant|b|$，

所以　$-(|a|+|b|)\leqslant(a+b)\leqslant|a|+|b|$，

即　$|a+b|\leqslant|a|+|b|$.

将式中 b 改为 $-b$，上式仍然成立，所以

$$|a-b|\leqslant|a|+|b|.$$

由于　$|a|=|(a-b)+b|$，

因此　$|a|\leqslant|a-b|+|b| \Rightarrow |a|-|b|\leqslant|a-b|$.

将式中 b 改为 $-b$,上式仍然成立,所以

$$|a|-|b|\leqslant|a+b|.$$

综上所述,即得三角形不等式

$$|a|-|b|\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|.$$

(1) 由于 $|a-b|=|b-a|\geqslant|b|-|a|\geqslant-(|a|-|b|)$,

$|a+b|=|b+a|\geqslant|b|-|a|\geqslant-(|a|-|b|)$,

所以得到绝对值不等式:

$$\big||a|-|b|\big|\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|.$$

(2) 利用数学归纳法,可以将 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$ 推广到 n 个实数的情形,即

$$|a_1+a_2+\cdots+a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|.$$

例 2 证明不等式

$$|x+x_1+x_2+\cdots+x_n|\geqslant|x|-(|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|).$$

证 因为,由三角形不等式,有

$$|x+(x_1+x_2+\cdots+x_n)|\geqslant|x|-|x_1+x_2+\cdots+x_n|,$$

又 $|x_1+x_2+\cdots+x_n|\leqslant|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|$,

所以 $|x_1+x_2+\cdots+x_n|\geqslant|x|-(|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|)$.

例 3 证明伯努利不等式

$$(1+x)^n\geqslant1+nx,\quad x>-1.$$

证 用数学归纳法. 当 $n=1$ 时,上式成立. 设对 $n-1$,有 $(1+x)^{n-1}\geqslant1+(n-1)x$ 成立,则

$$(1+x)^n=(1+x)^{n-1}(1+x)\geqslant[1+(n-1)x](1+x)$$
$$=1+(n-1)x+x+(n-1)x^2\geqslant1+nx,$$

即对一切自然数 n,当 $x\geqslant-1$ 时,有

$$(1+x)^n\geqslant1+nx.$$

例 4 设 $n\in\mathbf{N}$,证明:

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},\quad n\geqslant2.$$

证　利用伯努利不等式$(1+x)^n \geqslant 1+nx$，有

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n \geqslant 1+\frac{n}{n-1},\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \geqslant 1+\frac{n+1}{n},$$

因为$\frac{n}{n-1}-\frac{n+1}{n}=\frac{n^2-n^2+1}{n(n-1)}=\frac{1}{n(n-1)}>0, n\geqslant 2$. 所以

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

例 5　设实数 a, b 满足 $|a|<1, |b|<1$. 证明：

$$\left|\frac{a+b}{1+ab}\right|<1.$$

证　若要不等式成立，应有

$$-1<\frac{a+b}{1+ab}<1,$$

即式 $1-\frac{a+b}{1+ab}>0$ 和 $1+\frac{a+b}{1+ab}>0$ 应同时成立.

因为 $|a|<1, |b|<1$，所以 $ab<1 \Rightarrow 1+ab>0$，将上述两式化为

$$1+ab-a-b=(1-a)(1-b)>0,$$

$$1+ab+a+b=(1+a)(1+b)>0,$$

显然，当 $|a|<1, |b|<1$ 时，上两式成立，从而所证不等式成立.

例 6　证明柯西不等式：设 $x_1, x_2, \cdots, x_n; y_1, y_2, \cdots, y_n$ 为两组实数，则

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right).$$

证法 1　用配方法. 由

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2$$

$$=\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{j=1}^n y_j^2-\sum_{i=1}^n x_i y_i \sum_{j=1}^n x_j y_j$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i^2 y_j^2 - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_i x_j y_j$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(x_i y_j - x_j y_i)^2 \geqslant 0,$$

当 $x_i y_j = x_j y_i$ 时，等号成立.

证法 2 用二次三项式的判别式法. 由于

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{n}(x_i t + y_i)^2 = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)t^2 + 2\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\Big)t + \sum_{i=1}^{n} y_i^2,$$

所以，判别式

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\Big)^2 - \Big(\sum x_i^2\Big)\Big(\sum y_i^2\Big) \leqslant 0.$$

从而所证命题成立.

例 7 设 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是实数，$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n \geqslant 0$. 又

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k \leqslant y_1 + y_2 + \cdots + y_k, \quad k = 1, 2, \cdots, n,$$

证明： $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2.$

证 令 $x_{n+1} = 0$，以 $x_k - x_{k+1}$ 乘不等式两边可得

$$(x_k - x_{k+1})(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)$$
$$\leqslant (x_k - x_{k+1})(y_1 + y_2 + \cdots + y_k).$$

对 k 作 1 到 n 的和，得

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

两边平方，利用柯西不等式结论，得

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\Big),$$

即
$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} y_k^2.$$

例 8 证明平均值不等式：设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为 n 个正实数，则

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leqslant \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$

证 当 $n = 1, 2$ 时，不等式显然成立.

设对任意 $n-1$ 个正实数，命题成立.

对 n 个正实数情形，我们重新排列它们，使 x_n 为其中最大的一个，则有

$$x_n \geqslant A=\frac{1}{n-1}(x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}) \geqslant \sqrt[n-1]{x_1x_2\cdots x_{n-1}}.$$

于是

$$\begin{aligned}\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^n &= \left[\frac{(n-1)A+x_n}{n}\right]^n \\ &= \left(A+\frac{x_n-A}{n}\right)^n = A^n+nA^{n-1}\left(\frac{x_n-A}{n}\right)+\cdots \\ &\geqslant A^n+nA^{n-1}\left(\frac{x_n-A}{n}\right) = A^{n-1}x_n \\ &\geqslant x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n,\end{aligned}$$

即

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \leqslant \frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n).$$

当且仅当所有的 x_i 都相等时，等号成立.

例 9 利用平均值不等式证明

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}, \quad n=1,2,\cdots.$$

证 令平均值不等式

$$\sqrt[n+1]{x_1x_2\cdots x_nx_{n+1}} \leqslant \frac{1}{n+1}(x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1})$$

中 $x_1=x_2=\cdots=x_n=1+\dfrac{1}{n}, x_{n+1}=1$，则上式成为

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot 1} < \frac{1}{n+1}\left[n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1\right] = 1+\frac{1}{n+1}.$$

两边 $n+1$ 次方，即得

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

例 10 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是正数，且 $n \geqslant 1$，证明：

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \geqslant \frac{n}{\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}}.$$

证　在平均值不等式中，令 $x_i=\dfrac{1}{t_i}$，得

$$\sqrt[n]{\frac{1}{t_1}\cdot\frac{1}{t_2}\cdots\frac{1}{t_n}}\leqslant\frac{1}{n}\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\cdots+\frac{1}{t_n}\right),$$

即
$$\frac{1}{\sqrt[n]{t_1t_2\cdots t_n}}\leqslant\frac{1}{n}\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\cdots+\frac{1}{t_n}\right),$$

化为
$$\sqrt[n]{t_1t_2\cdots t_n}\geqslant\frac{n}{\dfrac{1}{t_1}+\dfrac{1}{t_2}+\cdots+\dfrac{1}{t_n}}$$

即为所证(只需将 t_i 改写为 x_i).

例 11　证明赫尔德不等式：设实数 p,q 满足 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，且 a_i,b_i 为非负实数，则

当 $p>1$ 时，$\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i\leqslant\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$，

当 $p<1$ 时，$\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i\geqslant\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

仅当 a_i 与 b_i 成比例时，等号成立.

证　利用下列不等式：对 $t>0$，有

$$t^\alpha-\alpha t+\alpha-1\geqslant0\quad(\alpha>1\text{ 或 }\alpha<0),\qquad ①$$

$$t^\alpha-\alpha t+\alpha-1\leqslant0\quad(0<\alpha<1).\qquad ②$$

当 $t=1$ 时等号成立(利用函数单调性与极值证).

在式①，式②中，令 $\alpha=\dfrac{1}{p}$，$1-\alpha=\dfrac{1}{q}$，并以 $\dfrac{x}{y}$ 代替 t，得

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{p}}\geqslant\frac{1}{p}\,\frac{x}{y}+\frac{1}{q}\Rightarrow x^{\frac{1}{p}}y^{1-\frac{1}{p}}\geqslant\frac{x}{p}+\frac{y}{q},$$

即
$$\begin{cases}x^{\frac{1}{p}}y^{\frac{1}{q}}\leqslant\dfrac{a}{p}+\dfrac{b}{q},\quad p>1, & ③\\[2ex] x^{\frac{1}{p}}y^{\frac{1}{q}}\geqslant\dfrac{a}{p}+\dfrac{b}{q},\quad p<1. & ④\end{cases}$$

在式③中，令

$$x_i = a_i^p / A, \quad y_i = b_i^q / B,$$

其中 $A = \sum_{i=1}^{n} a_i^p, B = \sum_{i=1}^{n} b_i^p$，则当 $p > 1$ 时，有

$$\frac{a_i b_i}{A^{1/p} B^{1/q}} \leqslant \frac{a_i^p}{pA} + \frac{b_i^q}{qB}, \; i = 1,2,\cdots,n.$$

于是 $$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant A^{1/p} B^{1/q} \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^p}{pA} + \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i^q}{qB} \right]$$

$$= A^{1/p} B^{1/q} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q \right)^{1/q}.$$

类似可证 $p < 1$ 时的不等式.

例 12 证明闵可夫斯基不等式：对任意的 $r \neq 0,1$ 及 $a_i, b_i \geqslant 0 \; (i = 1,2,\cdots,n)$，有

当 $r > 1$ 时，$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^r \right)^{1/r} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^r \right)^{1/r} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^r \right)^{1/r}$，

当 $r < 1$ 时，$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^r \right)^{1/r} \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^r \right)^{1/r} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^r \right)^{1/r}$.

当且仅当 a_i 与 b_i 成比例时，等号成立.

证 当 $r > 1$ 时，令 $t_i = a_i + b_i$，有

$$\sum_{i=1}^{n} t_i^r = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^r = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^{r-1} (a_i + b_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i t_i^{r-1} + \sum_{i=1}^{n} b_i t_i^{r-1}.$$

又令 $p = r, q = \frac{r}{r-1}$，则 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，应用赫尔德不等式，得

$$\sum_{i=1}^{n} t_i^r \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^r \right)^{1/r} \left(\sum_{i=1}^{n} t_i^r \right)^{\frac{r-1}{r}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^r \right)^{1/r} \left(\sum_{i=1}^{n} t_i^r \right)^{\frac{r-1}{r}}$$

$$= \left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^r \right)^{1/r} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^r \right)^{1/r} \right] \left(\sum_{i=1}^{n} t_i \right)^{1-1/r}.$$

不等式两边同乘$\left(\sum_{i=1}^{n}t_i^r\right)^{1/r-1}(>0)$，得

$$\left(\sum_{i=1}^{n}t_i^r\right)^{1/r}=\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^r\right)^{1/r}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^r\right)^{1/r}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^r\right)^{1/r}.$$

类似可证 $r<1$ 时的不等式.

例 13(加权平均值不等式)　设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为 n 个正数，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为满足$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$ 的正数，则有

$$\prod_{i=1}^{n}x_i^{\alpha_i}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i.$$

当且仅当 x_i 都相等时，等号成立.

证　用数学归纳法. 当 $n=2$ 时，对 $x_1>0,x_2>0$ 及 $0<\alpha<1$，以 $t=\frac{x_1}{x_2}$ 代入例 11 之式 ②，得

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\alpha}-\alpha\frac{x_1}{x_2}+\alpha-1<0,$$

即

$$x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}\leqslant\alpha x_1+(1-\alpha)x_2.$$

故，当 $n=2$ 时，不等式成立.

设对 $n-1$，不等式成立.

设对 n 个正整数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，正数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 满足$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$. 又令

$$t_i=x_i,\quad\beta_i=\alpha_i,\quad i=1,2,\cdots,n-2;$$

$$t_{n-1}=x_{n-1}^{\alpha_{n-1}/\beta_{n-1}}x_n^{\alpha_n/\beta_{n-1}},\quad\beta_{n-1}=\alpha_{n-1}+\alpha_n.$$

则

$$y_i>0,\beta_i>0\quad\text{且}\quad\sum_{i=1}^{n-1}\beta_i=1.$$

故

$$\prod_{i=1}^{n}x_i^{\alpha_i}=\prod_{i=1}^{n-1}t_i^{\beta_i}\leqslant\sum_{i=1}^{n-1}\beta_i t_i$$

$$=\sum_{i=1}^{n-2}\alpha_i x_i+(\alpha_{n-1}+\alpha_n)x_{n-1}^{\alpha_{n-1}/\beta_{n-1}}\cdot x_n^{\alpha_n/\beta_{n-1}}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i.$$

即对 n,不等式也成立.所以,加权平均值不等式成立.

例 14 证明:若 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 均为正数,且 $x_1x_2\cdots x_n=1$,则

$$x_1+x_2+\cdots+x_n\geqslant n.$$

当且仅当 x_i 均等于 1 时,等号成立.

证 用数学归纳法.对 $n=1$,命题自然成立.设对 $n-1$,命题成立.

对 n 的情形.设 $x_1x_2\cdots x_n=1$,且 x_i 不全相同.重新排列诸 x_i,使 $x_1>1,x_n<1$.记 $x_1x_n=y_1$,则由 $y_1x_2\cdots x_{n-1}=1$ 和归纳法假设知 $y_1+x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}\geqslant n-1$.因此

$$\begin{aligned}
&x_1+x_2+\cdots+x_n\\
&=(y_1+x_1+x_2+\cdots+x_{n-1})+x_1+x_n-x_1x_n\\
&\geqslant n+x_1+x_n-x_1x_n-1\\
&=n+(x_n-1)(1-x_1)>n.
\end{aligned}$$

可见,对 n 的情形,命题也成立.

例 15(契比雪夫不等式) 设 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n,b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n$,则

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i\right)\leqslant n\sum_{i=1}^n a_ib_i.$$

当且仅当 a_i 都相等或 b_i 都相等时,等号成立.

证 因为

$$\begin{aligned}
&n\sum_1^n a_ib_i-\sum_1^n a_i\sum_1^n b_j=\sum_1^n\sum_1^n(a_ib_i-a_ib_j)\\
&=\sum_1^n\sum_1^n(a_jb_j-a_jb_i)=\frac{1}{2}\sum_1^n\sum_1^n(a_ib_i+a_jb_j-a_ib_j-a_jb_i)\\
&=\frac{1}{2}\sum_1^n\sum_1^n(a_i-a_j)(b_i-b_j)\geqslant 0.
\end{aligned}$$

第四节　数列极限与收敛数列的性质

主要内容

1. 从自然数集 $\mathbf{N}$ 到 $\mathbf{R}$ 的一个映射 $x:\mathbf{N}\to\mathbf{R}$，称为实数数列，可以记作

$$\{x_n\}:x_1,x_2,\cdots,x_n,$$

或称为整标函数 $f(n)$.

2. 对数列 $\{x_n\}$，若存在 $M\in\mathbf{R}$，使得 $\forall\ n\in\mathbf{N}$，$x_n\leqslant M$，则称数列 $\{x_n\}$ 有上界，M 是它的一个上界；若存在 $m\in\mathbf{R}$，使得 $\forall\ n\in\mathbf{N}$，$x_n\geqslant m$，则称数列 $\{x_n\}$ 有下界，m 是它的一个下界.

若数列 $\{x_n\}$ 有上界也有下界，则称数列 $\{x_n\}$ 有界.

3. 设 $\{x_n\}$ 是一个数列，a 是一个确定的数. 若 $\forall\ \varepsilon<0$，$\exists$ 自然数 N，使当 $n>N$ 时，都有

$$|x_n-a|<\varepsilon,$$

则称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a. 称 a 为数列的极限，记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a.$$

4. 若数列 $\{x_n\}$ 收敛，且以零为极限，则称 $\{x_n\}$ 为无穷小数列.

数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的充要条件是：$\{x_n-a\}$ 是无穷小数列.

5. 收敛数列有如下重要性质：

(1) 惟一性　若数列 $\{x_n\}$ 有极限，则极限值是惟一的.

(2) 有界性　若数列 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 为有界数列.

(3) 保号性　若数列 $\{x_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a>0$（或 $a<0$），则对任一满足不等式 $a>a'>0$（或 $0>a'>a$）的 a'，$\exists$ 自然数 N，使当 $n>N$ 时，$x_n>a'>0$（或 $x_n<a'<0$）.

(4) 不等式性　若数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$都收敛，且$\exists$ 某自然数N_0，当$n > N_0$时，有$x_n \leqslant y_n$，则有

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim_{n\to\infty} y_n.$$

(5) 迫敛性　设数列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$收敛于同一极限a，若$\exists$ 某自然数N_0，当$n > N_0$时，有$a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$，则对数列$\{c_n\}$，有

$$\lim_{n\to\infty} c_n = a.$$

6. 数列极限的四则运算法则　若$\{x_n\}$，$\{y_n\}$是收敛数列，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$，则

(1) 数列$\{x_n \pm y_n\}$也收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b$. 即

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n.$$

(2) 数列$\{x_n \cdot y_n\}$也收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = ab$. 即

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n$$

(3) 若$y_n \neq 0$，且$\lim y_n \neq 0$，则数列$\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$也收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$. 即

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$

疑 难 解 析

1. 如何理解数列极限的ε-N定义？

答　数列极限的ε-N定义反映了数列$\{x_n\}$的数值x_n与数x_n的下标n之间的变化关系. 读者应理解以下几点：

(1) ε的任意性　ε是用来衡量x_n与常数a的接近程度的，若$\{x_n\}$以a为极限，则应该有$|x_n - a| \to 0$. 因此，ε是可以任意选定的无论多小的正数. 选定ε反映了我们对x_n与a接近程度的要求，当然，ε越小越好. 另一方面，要求一旦提出，是不可更改的，所以ε

又是取定的，可以根据 ε 求出相应的 N.

(2) N 的对应性　N 的大小由 ε 确定，故通常记作 $N(\varepsilon)$. N 反映了要使 $|x_n - a| < \varepsilon$ 时 n 的取值大小. 所以 N 有最小值，没有最大值，从而 N 可以有很多值. 在实际问题中，只要能证明 N 存在就行，不一定要求出 N，更不一定要求出最小的 N. 通常，由 $|x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow n > N(\varepsilon)$，从而知 N 是对应于 ε 的，但不要认为是 ε 的函数.

(3) 几何意义　定义中"当 $n > N$ 时，都有 $|x_n - a| < \varepsilon$"反映这样一个几何事实：在数轴上，凡下标 $n > N$ 的点 x_n，都落在点 a 的 ε 邻域内，而在此邻域外，至多有数列 $\{x_n\}$ 的 N(有限) 个点(项).

2. 证明数列极限时怎样确定 N?

答　此时只要证明 N 存在，而不要求求得的是最小 N，所以，只需将 $|x_n - a|$ 变形，通常用加强不等式"放大"，从 $|x_n - a|$ 中分离出 n，然后由 $|x_n - a| < \varepsilon$ 确定 N.

例如，证明：$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$，其中 $a > 1$.

令 $a^{1/n} - 1 = \alpha$，则 $\alpha > 0$，依伯努利不等式，有

$$a = (1 + \alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha = 1 + n(a^{1/n} - 1),$$

即

$$a^{1/n} - 1 \leqslant \frac{a-1}{n}.$$

要 $|\sqrt[n]{a} - 1| = |a^{1/n} - 1| \leqslant \varepsilon$，只要 $\left|\frac{a-1}{n}\right| < \varepsilon$. 所以，有 $n > \frac{a-1}{\varepsilon}$. 取 $N = \left[\frac{a-1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n > N$ 时，就有 $\left|\frac{a-1}{n}\right| < \varepsilon$，即

$$|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon.$$

方法、技巧与典型例题分析

一、关于数列极限的概念

利用这部分例题加深对极限概念的理解，运用数列极限的

ε-N 定义来讨论问题、分析问题，并作出结论.

例 1 求数列 $\{x_n\} = \left\{\frac{n^2}{2^n}\right\}$ 的最大项.

解 利用 $\{x_n\}$ 的通项公式，对前后项的比进行分析. 因为

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{n^2}{2^n} \cdot \frac{2^{n-1}}{(n-1)^2} = \frac{n^2}{2(n-1)^2},$$

若 x_n 单调增加，则 $\frac{x_n}{x_{n-1}} > 1$，故有

$$\frac{n^2}{2(n-1)^2} > 1 \Rightarrow n^2 > 2(n-1)^2 \Rightarrow n^2 - 4n + 4 < 2,$$

即
$$(n-2)^2 < 2 \Rightarrow n \leqslant 3.$$

若 x_n 单调减少，则 $\frac{x_n}{x_{n-1}} < 1$，故有

$$\frac{n^2}{2(n-1)^2} < 1 \Rightarrow n^2 < 2(n-1)^2 \Rightarrow n^2 - 4n + 4 > 2,$$

即
$$(n-2)^2 > 2 \Rightarrow n \geqslant 4.$$

综上可知，数列 $\left\{\frac{n^2}{2^n}\right\}$ 当 $n \leqslant 3$ 时单调增加，$n \geqslant 4$ 时单调减少，在 $n = 3$ 时取得最大值.

故最大项为 $x_3, x_3 = \frac{3^2}{2^3} = \frac{9}{8}$.

例 2 设 $x_n = \frac{\cos(n\pi/2)}{n}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. 又求出 N，使当 $n > N$ 时 x_n 与其极限之差的绝对值小于 $\varepsilon > 0$；当 $\varepsilon = 10^{-3}$ 时，求出相应的 N.

解 由于 $\cos(n\pi/2)$ 是有限数，而 $n \to \infty$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. 证明如下：

因为 $|x_n - 0| = \left|\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}\right| \leqslant \frac{1}{n}$，所以 $\forall\, \varepsilon > 0$，要使 $\frac{1}{n} < \varepsilon$，只需 $n > \frac{1}{\varepsilon}$. 故 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$.

当 $\varepsilon = 10^{-3}$ 时，$N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] = 10^3$. 即 $\forall\, \varepsilon = 10^{-3}$，当 $n > 10^3$ 时，

就有 $|x_n - 0| < 10^{-3}$.

例 3　证明:若数列$\{x_n\}$收敛,则它的任何子数列$\{x_{n_k}\}$ $(k = 1,2,\cdots)$也收敛,且有同一极限.

证　设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,则依极限定义,$\forall\ \varepsilon > 0$,$\exists\ N$,当$n > N$时,就有$|x_n - a| < \varepsilon$. 因为$\{x_{n_k}\}$是$\{x_n\}$的子数列,所以$n_k > k$. 故当$k > N$时,必有$n_k > k > N$,也有$|x_{n_k} - a| < \varepsilon$. 即

$$\lim_{n\to\infty} x_{n_k} = a = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

例 4　证明$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n} = 0$,$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{2^n} = 0$,$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3}{2^n} = 0$.

证　由二项式展开定理,有

$$2^n = (1+1)^n = 1 + n + \frac{n}{2!}(n-1) + \frac{n}{3!}(n-1)(n-2) + \frac{n}{4!}(n-1)(n-2)(n-3) + \cdots + 1.$$

根据极限式分子中n的次数,适当放大$|x_n - 0|$,证得与ε相应的N存在. 即证明了极限.

因为要$\left|\dfrac{n}{2^n} - 0\right| = \dfrac{n}{2^n} < \dfrac{n}{n(n-1)/2!} = \dfrac{2}{n-1} < \varepsilon$,只要$N > 1 + \left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right]$,所以$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n} = 0$.

类似地,使

$$\frac{n^2}{2^n} < \frac{n^2}{n(n-1)(n-2)/3!} = \frac{6n}{(n-1)(n-2)} < \varepsilon,$$

$$\frac{n^3}{2^n} < \frac{n^3}{n(n-1)(n-2)(n-3)/4!} = \frac{24n^2}{(n-1)(n-2)(n-3)} < \varepsilon$$

的N均存在,所以$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{2^n} = 0$,$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3}{2^n} = 0$.

这里,利用了不等式

$$2^n > \frac{n(n-1)}{2!},\quad 2^n > \frac{n(n-1)(n-2)}{3!},$$

$$2^n > \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}.$$

利用不等式放大 $|x_n - a|$ 来证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，是证数列极限与函数极限的常用方法，读者应努力掌握，学会使用. 如

证 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$，可利用 $n! = 1 \cdot 2 \cdots n \geqslant n \cdot 2^{n-2}$.

证 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0\ (a > 1)$，可令 $a = 1 + h\ (h > 0)$，利用

$a^n = (1+h)^n = 1 + c_n^1 h + \cdots + c_n^{k+1} h^{k+1} + \cdots + h^n$

$\quad > c_n^{k+1} h^{k+1}$.

例 5 设对于数列 $\{x_n\}$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1} = a$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

证 由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = a$，知 $\forall\ \varepsilon > 0$，$\exists\ N_1 \in \mathbf{N}$，使当 $n > N_1$ 时，$|x_{2n} - a| < \varepsilon$；同样，由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1} = a$，知 $\forall\ \varepsilon > 0$，$\exists\ N_2 \in \mathbf{N}$，使当 $n > N_2$ 时，$|x_{2n-1} - a| < \varepsilon$.

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$，则当 $n > N$ 时，上述两不等式均成立，即 $|x_n - a| < \varepsilon$. 所以

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

例 6 已知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，证明：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = a.$$

证 依极限定义 $\forall\ \varepsilon > 0$，$\exists\ N_1 \in \mathbf{N}$，使当 $n > N_1$ 时，有 $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. 于是，当 $n > N_1$ 时，有

$$\left|\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} - a\right| = \left|\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n - na}{n}\right|$$

$$\leqslant \frac{|x_1 - a| + |x_2 - a| + \cdots + |x_N - a|}{n}$$

$$+ \frac{|x_{N_1+1} - a| + |x_{N_1+2} - a| + \cdots + |x_n - a|}{n}$$

$$\leqslant \frac{|x_1 - a| + |x_2 - a| + \cdots + |x_n - a|}{n} + \frac{n - N_1}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2}.$$

由于 $|x_1-a|+|x_2-a|+\cdots+|x_{N_1}-a|=c$ 为一常数，故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c}{n}=0.$$

于是，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N_2\in\mathbf{N}$，当 $n>N_2$ 时，有

$$\frac{|x_1-a|+|x_2-a|+\cdots+|x_{N_1}-a|}{n}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

所以，取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，则当 $n>N$ 时，有

$$\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-a\right|$$

$$<\frac{c}{n}+\frac{n-N_1}{n}\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

即证得 $$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=a.$$

类似可证：

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=+\infty$；

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$；

(3) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ 存在，且 $x_n>0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$.

例 7（斯笃兹(O. Stolz) 定理） 证明：若存在：(1) $y_{n+1}>y_n$，(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=+\infty$，(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}.$$

证 (1) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=a$（有限数），则 $\forall\ \varepsilon>0$，当 $n>N$ 时，有 $a-\varepsilon<\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}<a+\varepsilon$. 于是，得到一组不等式：

$$(y_{N+1}-y_N)(a-\varepsilon)<x_{N+1}-x_N<(y_{N+1}-y_N)(a+\varepsilon),$$
$$(y_{N+2}-y_{N+1})(a-\varepsilon)<x_{N+2}-x_{N+1}<(y_{N+2}-y_{N+1})(a+\varepsilon),$$
$$\cdots\cdots$$
$$(y_n-y_{n-1})(a-\varepsilon)<x_n-x_{n-1}<(y_n-y_{n-1})(a+\varepsilon).$$

将不等式组中各不等式对应部分相加，得

$$(y_n - y_N)(a-\varepsilon) < x_n - x_N < (y_n - y_N)(a+\varepsilon),$$

即 $$\left(1-\frac{y_N}{y_n}\right)(a-\varepsilon) < \frac{x_n}{y_n} - \frac{y_N}{y_n} < \left(1-\frac{y_N}{y_n}\right)(a+\varepsilon).$$

对取定的 ε 及相应的 n，当 $n\to\infty$ 时，$y_n\to+\infty$，故

$$a-\varepsilon \leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} \leqslant a+\varepsilon.$$

由 ε 的任意性，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = a = \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}.$$

(2) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=+\infty$. 则 $\forall M\in\mathbf{R}$，当 $n>N$ 时，$\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}>M$. 故依题(1)，得一不等式组，经相同步骤后可得

$$\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}>M \Rightarrow x_n-x_N>M(y_n-y_N).$$

移项并除以 y_n，得

$$\frac{x_n}{y_n}>M\left(1-\frac{y_N}{y_n}\right)+\frac{x_N}{y_n},$$

取 $n\to\infty$，则 $y_n\to\infty$，得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}\geqslant M$.

由 M 的任意性，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=+\infty=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}.$$

类似可证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=-\infty$ 的情形.

例 8 讨论极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_mn^m+a_{m-1}n^{m-1}+\cdots+a_1n+a_0}{b_kn^k+b_{k-1}n^{k-1}+\cdots+b_1n+b_0},$$

其中 $a_m\neq0, b_k\neq0$.

解 若 $m=k$，将分子、分母同除以 x^m，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_m+a_{m-1}n^{-1}+\cdots+a_1n^{1-m}+a_0n^{-m}}{b_k+b_{k-1}n^{-1}+\cdots+b_1n^{1-n}+b_0n^{-m}},$$

分子、分母除第一项外，其它项的极限均为零. 故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_mn^m+\cdots+a_1n+a_0}{b_kn^k+\cdots+b_1n+b_0}=\frac{a_m}{b_k}\left(\frac{a_m}{b_m}\right).$$

若 $m>k$，将分子、分母同除以 x^k，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_mn^{m-k}+a_{m-1}n^{m-1-k}+\cdots+a_1n^{1-k}+a_0n^{-k}}{b_k+b_{k-1}n^{-1}+\cdots+b_1n^{1-k}+b_0n^{-k}},$$

分子从第 $m-k+1$ 项后均为零，而前 $m-k$ 项极限是 ∞；分母极限为 b_k，故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_mn^m+a_{m-1}n^{m-1}+\cdots+a_1n+a_0}{b_kn^k+b_{k-1}n^{k-1}+\cdots+b_1n+b_0}=\infty;$$

若 $m<k$，将分子、分母同除以 x^k，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_mn^{m-k}+a_{m-1}n^{n-1-k}+\cdots+a_1n^{1-k}+a_0n^{-k}}{b_k+b_1n^{-1}+\cdots+b_1n^{1-k}+b_0n^{-k}}.$$

所以，分子极限为零，分母极限为常数，故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_mn^m+a_{m-1}n^{m-1}+\cdots+a_1n+a_0}{b_kn^k+b_{k-1}n^{k-1}+\cdots+b_1n+b_0}=0.$$

综上所述，可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_mn^m+a_{m-1}n^{m-1}+\cdots+a_1n+a_0}{b_kn^k+b_{k-1}n^{k-1}+\cdots+b_1n+b_0}=\begin{cases}\dfrac{a_m}{b_k}, & m=k,\\ \infty, & m>k,\\ 0, & m<k.\end{cases}$$

例 6、例 7 和例 8 是后面我们计算数列极限的常用方法和依据，请读者把它弄懂记熟.

二、数列极限的求解

到目前为止，我们已经掌握了一些计算数列极限的方法与结论. 下面我们来实践和熟悉这些方法与结论.

1. 利用极限定义求极限

利用极限定义计算极限的关键是：将通项化为一常数与一含

n 的无穷小之和，从而得到 $|x_n - a| < \varepsilon$，并依此求得对应的 N.

例 9 求数列$\{\sqrt[n]{n}\}$的极限.

解 令 $x_n = \sqrt[n]{n}$，因为当 $n > 1$ 时，$\sqrt[n]{n} > 1$，所以 $x_n = 1 + \alpha_n \quad (\alpha_n > 0)$，于是

$$n = (1 + \alpha_n)^n \geqslant 1 + n\alpha_n + \frac{n}{2}(n-1)\alpha_n^2 \geqslant \frac{n}{2}(n-1)\alpha_n^2,$$

即
$$0 \leqslant \alpha_n^2 \leqslant \frac{2}{n-1} \quad \Rightarrow 0 \leqslant \alpha_n \leqslant \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

故
$$1 \leqslant x_n = 1 + \alpha_n \leqslant 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

显然$\{\alpha_n\}$收敛于零. 因为 $\forall \varepsilon > 0, \exists N = 1 + \frac{2}{\varepsilon^2}$，就有 $\left|\sqrt{\frac{2}{n-1}} - 0\right| < \varepsilon$. 所以，由迫敛性得 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

例 10 设 $a \in \mathbf{R}, |a| > 1$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{a^n}$.

解 $n \geqslant 2$ 时，有

$$\begin{aligned}\left|\frac{n}{a^n}\right| &= \frac{n}{|a|^n} = \frac{n}{[1 + (|a| - 1)]^n} \\ &< \frac{n}{n(n-1)(|a|-1)^2/2} \quad (\text{由二项展开式得}) \\ &= \frac{2}{(n-1)(|a|-1)^2}.\end{aligned}$$

要使
$$\frac{2}{(n-1)(|a|-1)^2} < \varepsilon,$$

只需
$$n > \frac{2}{\varepsilon(|a|-1)^2} + 1.$$

即若取 $N = \frac{2}{\varepsilon(|a|-1)^2} + 2$，则当 $n > N$ 时，就有

$$\left|\frac{n}{a^n}\right| < \frac{2}{(n-1)(|a|-1)^2} < \varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = 0$. 数列$\left\{\frac{n}{a^n}\right\}$，$|a| > 1, a \in \mathbf{R}$ 是无穷小序列.

2. 利用各种运算法则和技巧求极限

当数列的形式较复杂时,我们可以将其分解后利用四则运算法则计算数列极限. 同时,问题往往不是孤立的,一个数列极限的计算可能要使用几种方法. 所以读者在学习时要培养综合运用能力,不要将知识割裂得太碎.

例 11 若数列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$都发散,它们的和数列$\{x_n + y_n\}$是否一定发散?

解 不一定. 如数列$\left\{(-1)^n + \frac{c}{n}\right\}$与$\left\{(-1)^{n+1} + \frac{c}{n}\right\}$($c$ 为常数)都是发散的,但其和数列

$$\left\{(-1)^n + \frac{c}{n} + \left((-1)^{n+1} + \frac{c}{n}\right)\right\} = \left\{\frac{2c}{n}\right\}$$

却是收敛数列.

例 12 若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$,是否一定有$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$,$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$?

解 不一定. 如 $x_n = 1 + (-1)^n$,$y_n = 1 - (-1)^n$,有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} x_n y_n &= \lim_{n\to\infty}\{[1 + (-1)^n][1 - (-1)^n]\} \\ &= \lim_{n\to\infty}[1 - (-1)^{2n}] = 0,\end{aligned}$$

但$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 与$\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 均不存在.

类似的命题很多,希望读者能认真辨析,并记住一些必要的例子(或学会构造一些例子)来说明问题.

例 13 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3}$.

解 因为$\dfrac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3} = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$,所以,利用例 8 的结果,得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3} = \frac{1}{3}.$$

例 14 求$\lim\limits_{n\to\infty}(1 + a + \cdots + a^n)$ $(0 < a < 1)$.

解 利用等比数列和的公式,得

$$\lim_{n\to\infty}(1+a+\cdots+a^n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-a}-\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}}{1-a}=\frac{1}{1-a}.$$

例 15 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})\ (|a|<1)$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)$.

解 (1) 因为

$$(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$$

$$=\frac{1-a^2}{1-a}\frac{1-a^4}{1-a^2}\cdots\frac{1+a^{2^{n+1}}}{1-a^{2^n}}=\frac{1+a^{2^{n+1}}}{1-a},$$

故 $$\lim_{n\to\infty}(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})=\frac{1}{1-a}.$$

(2) 因为

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\right)\cdots\left(\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\right)=\frac{n+1}{2n},$$

故 $$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}.$$

(3) 因为

$$\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2n}}\right)$$

$$=\frac{1}{1+1/2}\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2n}}\right),$$

令 $a=\frac{1}{2}$，利用题(1)的结果，得

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2n}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+1/2} \cdot \frac{1}{1-1/2} = \frac{4}{3}.$$

例 16 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\cdots+\frac{(n-1)^2}{n^3}\right]$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\frac{(2n-1)^2}{n^3}\right]$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$.

解 (1) 因为

$$1+2^2+\cdots+(n-1)^2=\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1),$$

所以，如同例 13，有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\cdots+\frac{(n-1)^2}{n^3}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}=\frac{1}{3}.$$

(2) 设 $S_n=1^2+2^2+\cdots+n^2$,

有 $4S_n=2^2+4^2+\cdots+(2n)^2$,

$S_{2n}=1^2+2^2+\cdots+(2n)^2$,

则 $S_{2n}-4S_n=1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2$,

故 $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\frac{(2n-1)^2}{n^3}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{S_{2n}-4S_n}{n^3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}[2n(2n+1)(4n+1)-4n(n+1)(2n+1)]\cdot\frac{1}{6}$$

$$=\frac{4}{3}.$$

(3) 设 $S_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$,

有 $2S_n=1+\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n-1}}$,

则 $$S_n=2S_n-S_n$$

$$=1+\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{5}{2^2}-\frac{3}{2^2}\right)+\cdots$$

$$+\left(\frac{2n-1}{2^{n-1}}-\frac{2n-3}{2^{n-1}}\right)-\frac{2n-1}{2^n},$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{2n-1}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{2n+3}{2^n}\right)=3.$$

例 17 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2})$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}$.

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2})$

$$=\lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}2^{1-1/2^n}=2.$$

(2) 利用几何平均值小于算术平均值性质(第三节平均值不等式)，得

$$2=\frac{1+3}{2}>\sqrt{1\cdot 3},\ 4>\frac{3+5}{2}>\sqrt{3\cdot 5}\cdots$$

$$2n=\frac{(2n-1)+(2n+1)}{2}>\sqrt{(2n-1)(2n+1)},$$

$$0<x_n=\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}$$

$$<\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{\sqrt{1\cdot 3}\cdot\sqrt{3\cdot 5}\cdots\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=0$，所以，依迫敛性，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}=0.$$

例 18 求：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-4)^n+6^n}{5^{n+1}+6^{n+1}}$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}}{\sqrt{n+1}}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sin\sqrt{n+1}-\sin\sqrt{n})$.

解 (1) 分子、分母同除式中最大项 6^{n+1}，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-4)^n+6^n}{5^{n+1}+6^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(-4/6)^n\cdot 1/6+1/6}{(5/6)^{n+1}+1}=\frac{1}{6}.$$

(2) 因为分子、分母中 n 的最高幂次均为$\frac{1}{2}$，由例 8 的结论，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}}{\sqrt{n+1}}=1.$$

(3) 用有理化方法，得

$$\lim_{n\to\infty}(\sin\sqrt{n+1}-\sin\sqrt{n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}2\cos\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2}\sin\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2}.$$

因为 $\left|\cos\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2}\right|<1$，而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2}\overset{\text{有理化}}{=\!=}\lim\frac{1}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=0,$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2}=\sin 0=0,$$

故 $$\lim_{n\to\infty}(\sin\sqrt{n+1}-\sin\sqrt{n})=0.$$

三、数列极限的证明

用追敛性求数列$\{x_n\}$的极限，关键是找出两个有相同极限的数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$，使$\{a_n\}\leqslant\{x_n\}\leqslant\{b_n\}$. 一般$\{a_n\}$可利用$\{x_n\}$的下界确定，取为常数 a，而$\{b_n\}$通过加强 x_n 得到 b_n，再证明$\{b_n\}\to a$.

例 19 设 $a>0,b>0$，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=\max(a,b).$$

证 因为

$$\sqrt[n]{[\max(a,b)]^n}\leqslant\sqrt[n]{a^n+b^n}\leqslant\sqrt[n]{2[\max(a,b)]^n},$$

得 $$\max(a,b)\leqslant\sqrt{a^n+b^n}\leqslant\sqrt[n]{2}\max(a,b).$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$，则依追敛性，得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=\max(a,b).$$

例 20 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}$.

解 因为

$$n! = 1\cdot 2\cdots\left[\frac{n}{2}\right]\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)\cdots n$$

$$=\begin{cases}\dfrac{n}{2}^{\left[\frac{n}{2}\right]}=\left(\dfrac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}, & n\text{ 为偶数},\\ \dfrac{n}{2}^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}\geqslant\left(\dfrac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}, & n\text{ 为奇数},\end{cases}$$

所以有 $0<\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}<\sqrt{\dfrac{2}{n}}$,由$\sqrt{\dfrac{2}{n}}\to 0$,依迫敛性,得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0.$$

例 21 证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=1$.

证 用放大法,得

$$\frac{n\cdot 1}{n}\leqslant\frac{1+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}\leqslant\frac{n\sqrt[n]{n}}{n},$$

而$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$(见例 9).依迫敛性,有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=1.$$

此题也可由例 6 结论直接写出.类似可得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)=0.$$

例 22 设$\{x_n\}$是正实数数列,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a>0$,证明:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=a.$$

证 由平均值不等式,有

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n),$$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_n}}\leqslant\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right),$$

所以

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}\leqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{1}{n}(x_1+\cdots+x_n).$$

因为$\dfrac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}=1\Big/\left[\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)\right]\to a,$

$$\frac{1}{n}(x_1+\cdots+x_n)\to a\quad（均依例 6 结论）,$$

依迫敛性，得 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=a.$

例 23 证明：$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n(a^{1/n}-1)=\ln a\ (a>0).$

证 （1）设 $a>1$，令 $x_n=a^{1/n}-1$，则 $x_n>0$，且 $\dfrac{\ln a}{n}=\ln(1+x_n)$. 于是，有

$$n(a^{1/n}-1)=\frac{\ln a}{\ln(1+x_n)}\cdot x_n.$$

因为 $x_n\to0$，依极限定义，当 $n>N$ 时，$0<x_n<1$. 所以对每一确定的 n，$\exists$ 相应的 k_n，使

$$\frac{1}{k_n+1}<x_n<\frac{1}{k_n}\quad(k_n\to\infty).$$

利用不等式 $$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$$

$\left(由\ 1<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}\ 和\ \mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\ 两端取对数可证\right)$，故

$$\frac{1}{k_n+2}<\ln\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)\leqslant\ln(1+x_n)<\ln\left(1+\frac{1}{k_n}\right)<\frac{1}{k_n}.$$

逐项相除得

$$1-\frac{1}{k_n+1}=\frac{k_n}{k_n+1}<\frac{x_n}{\ln(1+x_n)}<\frac{k_n+2}{k_n}=1+\frac{2}{k_n}.$$

由 $k_n \to \infty$，依迫敛性，得

$$\lim_{n\to\infty} n(a^{1/n}-1)=\ln a.$$

(2) 设 $0<a<1$，则 $\frac{1}{a}>1$，依题(1)得

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\left(\frac{1}{a}\right)^{1/n}-1\right]=\ln\frac{1}{a}.$$

而 $$\lim_{n\to\infty} n\left[\left(\frac{1}{a}\right)^{1/n}-1\right]=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^{1/n}\cdot n\left[1-\left(\frac{1}{a}\right)^{-1/n}\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty}-\left(\frac{1}{a}\right)^{1/n} n(a^{1/n}-1)$$
$$=-\lim_{n\to\infty} n(a^{1/n}-1)\ \left(\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\right).$$

又 $$\ln\frac{1}{a}=-\ln a.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} n(a^{1/n}-1)=\ln a$ 也成立.

(3) $a=1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} n(a^{1/n}-1)$ 显然成立.

四、应用斯笃兹定理求数列极限

斯笃兹定理的证明见例 7. 斯笃兹定理实质上是已知数列 $\{x_n\}$ 与正无穷大数列 $\{y_n\}$ 的各自相邻两项增长率之比的极限，来求 $\frac{x_n}{y_n}$ 的极限. 因此利用斯笃兹定理求极限的关键是，将所给数列化为符合定理条件的 $\frac{x_n}{y_n}$ 形式，再求出 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$.

例 24 证明：若 p 为自然数，则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\frac{1}{p+1}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^p}-\frac{n}{p+1}\right)=\frac{1}{2}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+3^p+\cdots+(2n-1)p}{n^{p+1}}=\frac{2p}{p+1}$.

证 (1) 令 $x_n=1^p+2^p+\cdots+n^p$，$y_n=n^{p+1}\to\infty$，故

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}=\frac{(n+1)^p}{(p+1)n^p+\cdots}$$

$$=\frac{(1+1/n)^p}{p+1+o(1/n)}\to\frac{1}{p+1}.$$

依斯笃兹定理,得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\frac{1}{p+1}.$$

题(2)、题(3) 可用类似方法证明,请读者一试.

例 25 设 $a_1>0, a_{n+1}=a_n+1/a_n, n=1,2,\cdots$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{2n}}=1.$$

证 设 $x_n=a_n^2$, $y_n=2n\to+\infty$. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{2n}=1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{2n}}=1$. 对 x_n, y_n 应用斯笃兹定理,得

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\frac{a_{n+1}^2-a_n^2}{2(n+1)-2n}=\frac{1}{2}(a_{n+1}^2-a_n^2)$$

$$=\frac{1}{2}\left(a_n^2+\frac{1}{a_n^2}+2-a_n^2\right)=\frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{a_n^2}\right).$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$(事实上,如果 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 为有限数,则依 $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$ 有 $a=a+\frac{1}{a}$,而这是不可能的),所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=1\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{2n}=1,$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{2n}}=1.$$

例 26 设 α 为任意实数,求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^{\alpha+1}+2^{\alpha+1}+\cdots+n^{\alpha+1}}{n(1^\alpha+2^\alpha+\cdots+n^\alpha)}.$$

解 将原式分解,得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^{\alpha+1}+2^{\alpha+1}+\cdots+n^{\alpha+1}}{n(1^\alpha+2^\alpha+\cdots+n^\alpha)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1^{\alpha+1}+2^{\alpha+1}+\cdots+n^{\alpha+1}}{n^{\alpha+2}}\bigg/\frac{1^{\alpha}+2^{\alpha}+\cdots+n^{\alpha}}{n^{\alpha+1}}\right],$$

利用例 24(1) 的结论(由斯笃兹定理证得)即得

$$\text{原式} = \frac{1}{\alpha+2}\bigg/\frac{1}{\alpha+1} = \frac{\alpha+1}{\alpha+2}.$$

例 27 设 $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n}\ln(c_n^k)/n^2$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$.

解 因为 $n^2 \to +\infty$，应用斯笃兹公式，有

$$\lim_{n\to\infty}S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n+1}\ln(c_{n+1}^k) - \sum\limits_{k=0}^{n}\ln(c_n^k)}{(n+1)^2-n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\ln(c_{n+1}^k/c_n^k)+\ln(c_{n+1}^{n+1})}{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\ln\dfrac{n+1}{n-k+1}}{2n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\ln(n+1) - \sum\limits_{k=1}^{n+1}\ln k}{2n+1}.$$

再次应用斯笃兹定理，有

$$\lim_{n\to\infty}S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\ln(n+1) - n\ln n - \ln(n+1)}{(2n+1)-(2n-1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+1/n)^n}{2} = \frac{1}{2}.$$

例 28 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{2^2-1}\right)^{1/2^{n-1}}\left(\dfrac{2^2}{2^3-1}\right)^{1/2^{n-2}}\cdots\left(\dfrac{2^{n-1}}{2^n-1}\right)^{1/2}$.

解 设 $x_n = \left(\dfrac{2}{2^2-1}\right)^{1/2^{n-1}}\left(\dfrac{2^2}{2^3-1}\right)^{1/2^{n-2}}\cdots\left(\dfrac{2^{n-1}}{2^n-1}\right)^{1/2}$，则

$$\ln x_n = \frac{1}{2^{n-1}}\ln\frac{2}{2^2-1} + \frac{1}{2^{n-2}}\ln\frac{2^2}{2^3-1} + \cdots + \frac{1}{2}\ln\frac{2^{n-1}}{2^n-1}$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}}\left(\ln\frac{2}{2^2-1} + 2\ln\frac{2^2}{2^3-1} + \cdots + 2^{n-2}\ln\frac{2^{n-1}}{2^n-1}\right),$$

因为 $2^{n-1}\to+\infty$，应用斯笃兹定理，得

$$\lim_{n\to\infty}\ln x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-2}\ln\dfrac{2^{n-1}}{2^n-1}}{2^{n-1}-2^{n-2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2-1/2^{n-1}} = \ln\frac{1}{2},$$

所以 $$\text{原式} = \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}.$$

五、用其它方法求数列极限

求证数列极限的方法还很多，下面再举出几个例子，请读者体会这些方法.

例 29 若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$，证明：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1}{n} = ab.$$

解 本题可用变量代换方法求解. 因为

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n,$$

$\{\alpha_n\}$，$\{\beta_n\}$ 是无穷小数列（见本节主要内容 4），故

$$\text{原式} = \frac{(a + \alpha_1)(b + \beta_n) + \cdots + (a + \alpha_n)(b + \beta_1)}{n}$$

$$= ab + b\frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{n} + a\frac{\beta_1 + \cdots + \beta_n}{n}$$

$$+ \frac{\alpha_1 \beta_n + \cdots + \alpha_n \beta_1}{n}.$$

因为$\{\beta_n\} \to 0$，$\{\alpha_n\} \to 0$，所以$\{\beta_n\}$是有界数列，即 $|\beta_n| \leqslant M$，所以

$$\left|\frac{\alpha_1 \beta_n + \cdots + \alpha_n \beta_1}{n}\right| \leqslant M\frac{|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|}{n}.$$

依例 6 的结论，原式中二、三、四项均趋近于零，故

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1}{n} = ab.$$

例 30 设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，求$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n}{n^2}$.

解 令 $x_n = a + \beta_n$，则$\{\beta_n\} \to 0$.

$$\frac{x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n}{n^2}$$

$$= \frac{(a + \beta_1) + 2(a + \beta_2) + \cdots + n(a + \beta_n)}{n^2}$$

$$= \frac{n+1}{2n}a + \left(\frac{1}{n}\beta_1 + \frac{2}{n}\beta_2 + \cdots + \frac{n}{n}\beta_n\right)\bigg/ n.$$

而

$$\left|\left(\frac{1}{n}\beta_1 + \frac{2}{n}\beta_2 + \cdots + \frac{n}{n}\beta_n\right)\Big/ n\right| \leqslant \frac{|\beta_1| + |\beta_2| + \cdots + |\beta_n|}{n}.$$

依例 6 的结论，$\left(\frac{1}{n}\beta_1 + \frac{2}{n}\beta_2 + \cdots + \frac{n}{n}\beta_n\right)\Big/ n \to 0$. 故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}a = \frac{a}{2}.$$

例 31　求$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{1+2+\cdots+k}$.

解　利用自然数求和公式

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+2+\cdots+k} \\
&= 1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+\cdots+n} \\
&= 1 + \frac{2}{2\cdot 3} + \frac{2}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{2}{n(n+1)} \\
&= 1 + 2\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right] \\
&= 2 - \frac{2}{n+1},
\end{aligned}$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+2+\cdots+k} = \lim_{n\to\infty}2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 2.$$

例 32　证明：数列$\{\sin n\}$不存在极限.

证　用反证法. 设$\lim\limits_{n\to\infty}\sin n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(n+2) = a$，则

$$\lim_{n\to\infty}[\sin(n+2) - \sin n] = \lim_{n\to\infty}2\sin 1\cos(n+1) = 0,$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\cos(n+1) = \lim_{n\to\infty}\cos n = 0.$$

于是
$$\lim_{n\to\infty}\sin 2n = \lim_{n\to\infty}2\sin n\cos n = 0,$$

即
$$a = \lim_{n\to\infty}\sin n = \lim_{n\to\infty}\sin 2n = 0,$$

从而
$$1 = \lim_{n\to\infty}(\sin^2 n + \cos^2 n) = 0.$$

而这是不可能的. 所以数列$\{\sin n\}$不存在极限.

其它方法还有很多，不再一一列举.

第五节　数列极限存在的条件

主要内容

1. 若数列各项满足关系式

$$a_n \leqslant a_{n+1} \quad (\text{或 } a_n \geqslant a_{n+1}), \quad n = 1,2,\cdots,$$

则称数列$\{a_n\}$为递增(或递减)数列,统称单调数列.

2. 单调递增数列收敛的充分必要条件是它有上界,单递递减数列收敛的充分必要条件是它有下界. 即,单调有界数列必有极限.

3. 柯西收敛定理　数列$\{a_n\}$收敛的充分必要条件是:对任给的$\varepsilon > 0$,存在$N \in \mathbf{N}$,使当$n,m > N$时,都有$|a_m - a_n| < \varepsilon$.

4. 维尔斯特拉斯(Weierstrass)聚点定理　直线上的有界无限点集S至少有一个聚点.

波尔察诺 - 维尔斯特拉斯致密性定理　有界数列$\{a_n\}$,必有收敛子列.

5. 如果一列闭区间$\{[a_n,b_n]\}$满足条件:

(1) $[a_{n+1},b_{n+1}] \subset [a_n,b_n]$, $n = 1,2,\cdots$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$,

则称这列闭区间形成一个闭区间套.

如果$\{[a_n,b_n]\}$形成一个闭区间套,则存在惟一的实数ξ属于所有闭区间$[a_n,b_n]$,且$\xi = \lim\limits_{n\to\infty}a_n = \lim\limits_{n\to\infty}b_n$. 称此结论为闭区间套定理.

又若$\{a_n\}$收敛于a,则其任何子数列$\{a_{n_k}\}$都收敛于同一极限a.

常用结果　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$.

6. 有限覆盖定理　设S为直线上的一个点集,若S中任何一

点都含在开区间集 H 中至少一个开区间中，则称 H 为 S 的一个开覆盖.

海涅-波莱尔(Heine-Borel)有限覆盖定理　设 $[a,b]$ 是一个闭区间，H 为 $[a,b]$ 的一个开覆盖，则在 H 必存在有限个开区间，它构成 $[a,b]$ 上的一个开覆盖.

疑难解析

1. 为什么单调有界是数列收敛的充分条件?

答　单调有界是数列收敛的充分条件. 因为一个数列 $\{a_n\}$ 若满足以下两个条件:(1) 有界,(2) 单调，则 $\{a_n\}$ 必收敛;但若只满足其中一个条件，则 $\{a_n\}$ 不一定收敛. 如

$a_n = (-1)^n$，有界但不单调，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 不存在.

$a_n = 2n$，单调但无界，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 不存在.

但，若 $\{a_n\}$ 收敛，则 $\{a_n\}$ 必有界，却不一定单调. 如 $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$ 收敛于零，有界但不单调.

从几何角度看，在数轴上对应单调数列的点 a_n 只能向一个方向移动. 如果加上有界这个条件，则数列的全部点都落在数轴上某区间 $[-M,M]$ 内，且无限趋向于某一定点 A，也就是数列 $\{a_n\}$ 趋于一个极限，且这极限的绝对值不会超过 A.

2. 怎样理解柯西收敛定理?

答　柯西收敛定理的条件反映了这样一个事实:收敛数列的各项愈到后面，愈是互相接近，因此它们之间差的绝对值可以小于任何预先给定的正数. 从几何角度看，数列的项越到后面越是挤在一起，因此它们之间的距离趋向于零. 因而可以确定数列收敛于某一极限值 A.

3. 怎样应用有限覆盖定理证明命题?

答　有限覆盖定理与其它描述实数系连续性定理的不同在

于：有限覆盖定理着眼于区间的整体，而闭区间套定理、确界定理等着眼于一点的局部. 有限覆盖定理的作用是从覆盖某闭区间 $[a,b]$ 的无限个开区间中选出有限个也能覆盖闭区间 $[a,b]$ 的开区间，化“无限”为“有限”. 通过这种方法，将闭区间 $[a,b]$ 上每点所具有的局部性质转化为整个闭区间上的整体性质. 因此当要证明闭区间上的整体性质时，可考虑使用有限覆盖定理；要证明闭区间上某一点的局部性质时，可考虑使用闭区间套定理、致密性定理、确界定理等. 它们之间又可以相互证明.

应用有限覆盖定理证明命题的基本步骤是：由所要证明的整体性质 A，在闭区间 $[a,b]$ 上每一点找性质 A^*. 然后构造一个开区间集 $\bigcup a_i$，使 $[a,b]\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}a_i$，且在每个开区间 a_i 上性质 A^* 都成立. 于是由有限覆盖定理知，存在有限个开区间 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}a_i$，使 $[a,b]\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}a_i$，再证明在区间 $[a,b]$ 上性质 A 成立（见例 17、例 18）.

方法、技巧与典型例题分析

用单调有界来确定极限存在并不要求求出极限，一般只是证明极限的存在. 这里的技巧在于确定单调性的技巧，可以由 $x_{n+1}-x_n$ 或者 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ 来确定，读者要通过多看例题来掌握. 判别有界则比较简单，一般可以通过加强不等式得到.

例 1 设 $a>0,x_0>0,x_n=\dfrac{1}{2}\left(x_{n-1}+\dfrac{a}{x_{n-1}}\right),n=1,2,\cdots$. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}$.

证 由 $\left(\sqrt{t}+\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)^2\geqslant 0\Rightarrow t+\dfrac{1}{t}\geqslant 2\ (t>0)$，知

$$x_n=\frac{\sqrt{a}}{2}\left[\frac{x_{n-1}}{\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{a}}{x_{n-1}}\right]\geqslant\sqrt{a},\quad n\in\mathbf{N}.$$

得 $$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{x_n^2}\right)\leqslant 1 \quad \Rightarrow x_{n+1}\leqslant x_n.$$

故数列$\{x_n\}$单调递减且有下界，极限存在. 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则

$$A\geqslant\sqrt{a}>0.$$

且 $$A=\frac{1}{2}\left(A+\frac{a}{A}\right)\Rightarrow A^2=a\Rightarrow A=\sqrt{a}.$$

即 $$\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}.$$

例 2 设$\alpha>0$，求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\alpha^n}{n!}$.

解 设$x_n=\frac{\alpha^n}{n!}$，则$x_n>0$，$n\in\mathbf{N}$. 当n充分大时，有

$$\frac{\alpha}{n+1}<1.$$

于是 $$x_n=\frac{\alpha^n}{n!}>\frac{\alpha^n}{n!}\cdot\frac{\alpha}{n+1}=x_{n+1},\quad n\in\mathbf{N}.$$

所以$\{x_n\}$有极限. 记$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则由

$$x_{n+1}=\frac{\alpha}{n+1}\cdot\frac{\alpha^n}{n!}=\frac{\alpha}{n+1}x_n\Rightarrow A=0\cdot A=0,$$

即 $$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^n}{n!}=0.$$

例 3 利用单调有界性求极限.

(1) 设$a>0$，$x_1=\sqrt{a}$，$x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}}$，$\cdots$，$x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

(2) 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[2]{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}\right)$.

解 (1) x_n单调增加是显然的，现证明x_n有界. 用归纳法证明$x_n<a$.

对$x_1=\sqrt{a}$，$x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}}<\sqrt{a}+1$是显然的.

设$x_n<\sqrt{a}+1$，则

$$x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}\leqslant\sqrt{a+\sqrt{a}+1}<\sqrt{a}+1,$$

故数列$\{x_n\}$单调有界必有极限. 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = A$,由

$$x_{n+1} = \sqrt{a + x_n} \Rightarrow A = \sqrt{a + A}.$$

解 $A^2 - A - a = 0$ 得

$$A = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4a}).$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{a + \sqrt{a + \cdots + \sqrt{a}}} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4a}).$$

(2) 令 $x_n = \sqrt[2]{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdots \sqrt[2^n]{2}$, $n = 1,2,\cdots$,则

$$1 < x_n < x_{n+1}, x_n < 2.$$

所以$\{x_n\}$是单调有界数列,必有极限.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = A$,由 $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$,得

$$A = \sqrt{2A} \Rightarrow A = 2 \quad (\text{显然 } A \neq 0),$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[2]{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdots \sqrt[2^n]{2} = 2.$$

例 4 利用单调有界性证明:

(1) 若 $0 < x_1 < 1$,且 $x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$, $n = 1,2,\cdots$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n = 1$.

(2) 设 $x_1 = a \geqslant 0$, $y_1 = b \geqslant 0$,且 $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$, $y_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n)$, $n = 1,2,\cdots$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = \lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

证 (1) 因为

$$x_{n+1} - x_n = x_n(1 - x_n) - x_n = -x_n^2 < 0,$$

所以$\{x_n\}$单调减少. 又由$0 < x_1 < 1$,由归纳法可证$0 < x_n < 1$,从而$\{x_n\}$有下界.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = A$,在 $x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$ 两边取极限,得

$$A = A(1 - A) \Rightarrow A = 0.$$

即
$$\lim_{n\to\infty}x_n = A.$$

(2) $x_n \geqslant 0, y_n \geqslant 0$ 是显然的. 由

$$y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \geqslant \sqrt{x_n y_n} = x_{n+1},$$

得
$$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} \geqslant \sqrt{x_n x_n} = x_n,$$

$$y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \leqslant \frac{y_n + y_n}{2} = y_n.$$

知 $\{x_n\}$ 单调增加, $\{y_n\}$ 单调减少, 又

$$x_n \leqslant y_n \leqslant y_1, \quad y_n \geqslant x_n \geqslant x_1,$$

所以 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 有界. 即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$ 存在.

对 $y_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}$ 两边取极限, 得

$$B = \frac{1}{2}(A + B) \Rightarrow A = B.$$

由以上例题得知:

证明数列有界常用下列方法:(1) 观察法. 从已知条件与通项公式得出;(2) 数学归纳法;(3) 利用已知命题与公式判断, 如 $|\sin n| \leqslant 1, a^2 + b^2 \geqslant 2|a||b|$ 等等.

证明数列单调常用下列方法:(1) 观察法, 考察通项公式或项的结构;(2) 数学归纳法;(3) 判断 $x_{n+1} - x_n$ 的符号;(4) 考察 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ 与 1 的关系.

例 5 证明: 数列 $\left\{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ 单调增加, 数列 $\left\{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ 单调减少, 两者收敛于同一极限.

证 记 $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n, y_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$, 由平均值不等式

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n),$$

知
$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot 1 \leqslant \left[\frac{n(1 + 1/n) + 1}{n + 1}\right]^{n+1} = x_{n+1},$$

$$\frac{1}{y_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\cdot 1\leqslant\left[\frac{(n+1)\cdot n/(n+1)+1}{n+2}\right]^{n+2}=\frac{1}{y_{n+1}},$$

即$\{x_n\}$单调增加，$\{y_n\}$单调减少，且

$$1=x_1<x_n<y_n<y_1=4.$$

所以$\{x_n\}$，$\{y_n\}$单调有界，必定收敛. 由 $y_n=x_n\left(1+\frac{1}{n}\right)$，知它们有相同的极限. 即

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\mathrm{e}.$$

例 6 证明：若 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$，则数列$\{a_n\}$收敛.

证 由上例知 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$，两边取对数得，

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1<(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

即有不等式 $$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}.$$

则 $$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n$$
$$=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<0,$$

$$b_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$$
$$>\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}-\ln n$$
$$=\ln(n+1)-\ln n>0.$$

即$\{b_n\}$单调减少有下界，所以$\{b_n\}$收敛.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=r\approx 0.57721566490\cdots$$

称为欧拉(Euler)数.

例 7 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$.

解 将通项表示成欧拉数形式，有

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$
$$=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right).$$

两边取极限，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}=\lim_{n\to\infty}(b_{2n}+\ln 2n-b_n-\ln n)=\ln 2.$$

例 8 利用欧拉数证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right]=\ln 2$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=1$.

证 (1) 记 $d_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$. 又

$$b_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}-\ln n,$$

$$b_{2n}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-\ln 2n,$$

将 b_n 的第 $2k$ 项减去 b_n 的第 k 项，得

$$b_{2n}-b_n=1+\left(\frac{1}{2}-1\right)+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{n}\right)-\ln 2n+\ln n$$
$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}-\ln 2$$
$$=d_n-\ln 2.$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}d_n=\lim_{n\to\infty}(\ln 2+b_{2n}-b_n)=\ln 2,$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right]=\ln 2.$$

(2)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}(b_n+\ln n)=1\ \left(\lim_{n\to\infty}b_n=r\right).$$

例 9 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$； (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n$.

解 利用极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$ 的形式性求解. 因为 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 是底为 1 加无穷小 $\frac{1}{n}$、指数为同一无穷小的倒数，所以将所求极限写成这一形式，即可直接写出极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n\cdot\frac{1}{2}}=\mathrm{e}^{1/2}$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2\cdot\frac{1}{n}}=\mathrm{e}^0=1$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^n=+\infty$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{n+1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}}=\mathrm{e}$.

例 10 设 $a_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$，证明 $\{a_n\}$ 收敛.

证 因为 $\forall\, n,p\in\mathbf{N}$，

$$
\begin{aligned}
|a_{n+p}-a_n| &= \frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}\\
&< \frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots\\
&\quad+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}.
\end{aligned}
$$

所以，$\forall\,\varepsilon>0$，当 $n>N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ 及 $p\in\mathbf{N}$，恒有 $|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$. 依柯西收敛原理，数列 $\{a_n\}$ 收敛.

例 11 设 $x_n=a_0+a_1q+\cdots+a_nq^n$，$|a_k|<M$，$k=0,1,2,\cdots$，且 $|q|<1$，问 $\{x_n\}$ 是否收敛.

解 设 p 为正整数.

$$
\begin{aligned}
|x_{n+p}-x_n| &= |a_{n+1}q^{n+1}+\cdots+a_{n+p}q^{n+p}| \\
&< M(|q|^{n+1}+\cdots+|q|^{n+p}) \\
&< M\frac{|q|^{n+1}}{1-|q|}=M_1|q|^{n+1},
\end{aligned}
$$

故当 $n>N$ 时有 $|q|^{n+1}<\dfrac{q}{M_1}$. 故当 $n>N$ 时，对任意正整数 p，有 $|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$. 依柯西收敛原理，$\{x_n\}$ 收敛.

例 12 设 $x_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}$，证明 $\{x_n\}$ 发散.

证 设 $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$，取 $p=n$，则

$$
|x_{n+p}-x_n|=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\geqslant\frac{n}{2n}=\frac{1}{2},
$$

所以，$\{x_n\}$ 不满足柯西收敛定理条件，故数列 $\{x_n\}$ 发散.

例 13 设 $x_1=a, x_2=b, x_n=\dfrac{1}{2}(x_{n-1}+x_{n-2})\ (n\geqslant 3)$. 利用区间套定理证明 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

证 因为

$$
x_n-x_{n-1}=-\frac{1}{2}(x_{n-1}-x_{n-2}),\ n=3,4,\cdots,
$$

求积得

$$
\prod_{i=3}^{n}(x_i-x_{i-1})=\prod_{i=3}^{n}\left[-\frac{1}{2}(x_{i-1}-x_{i-2})\right]=\prod_{i=2}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)(x_i-x_{i-1}),
$$

化简得

$$
x_n-x_{n-1}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}(x_2-x_1)=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}(b-a),
$$

求和得
$$
x_n-x_1=(b-a)\frac{1-(-1/2)^{n-1}}{1-(-1/2)},
$$

即
$$
x_n=\frac{2}{3}(b-a)[1-(-1/2)^{n-1}]+a.
$$

故
$$
\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{3}(a+2b).
$$

例 14 证明：(1) $\left\{\sin\frac{n\pi}{4}\right\}$发散；

(2) 给定 x_0，设 $x_1=\cos x_0$，$x_2=\cos(\cos x_0)$，…，$x_n=\underbrace{\cos\cos\cdots(\cos}_{n个}x_0)$，则$\{x_n\}$收敛.

证 (1) 若取 $n_k=4k,n_k'=8k+2$，则$\left\{\sin\frac{n\pi}{4}\right\}$的子列$\left\{\sin\left(\frac{\pi}{4}n_k\right)\right\}$收敛于零，子列$\left\{\sin\left(\frac{\pi}{4}n_k'\right)\right\}$收敛于 1. 由于$\{x_n\}$的两个子列分别收敛于不同的极限，故$\{x_n\}$发散.

(2) 不妨设 $0<x_1<1$，则 $0\leqslant x_n\leqslant 1$. 由于 $\cos x$ 在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$内递减，所以 x_n 不是单调数列，故分别讨论单调奇子列$\{x_{2n-1}\}$与单调偶子列$\{x_{2n}\}$.

若 $x_1\leqslant x_3$，则

$$
\begin{aligned}
x_4-x_2&=\cos x_3-\cos x_1\\
&=-2\sin\frac{x_3-x_1}{2}\sin\frac{x_3+x_1}{2}\leqslant 0.
\end{aligned}
$$

从而 $x_4\leqslant x_2$. 又

$$
\begin{aligned}
x_5-x_3&=\cos x_4-\cos x_2\\
&=-2\sin\frac{x_4-x_2}{2}\sin\frac{x_4+x_2}{2}\geqslant 0,
\end{aligned}
$$

故 $x_5\geqslant x_3$. 依次递推，知$\{x_{2n-1}\}$单调递增，$\{x_{2n}\}$单调递减.

若 $x_1\geqslant x_3$，可证得相同结论.

故$\{x_{2n}\}$与$\{x_{2n-1}\}$都是单调有界数列，因而都有极限. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\alpha,\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=\beta$，则

$$
\begin{cases}\cos\alpha=\beta,\\ \cos\beta=\alpha,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\cos(\cos\alpha),\\ \beta=\cos(\cos\beta).\end{cases}
$$

由 $x-\cos(\cos x)$ 零点的惟一性 $\Rightarrow\alpha=\beta$.

所以，$\{x_{2n}\}$与$\{x_{2n-1}\}$收敛于同一极限. 即$\{x_n\}$收敛.

例 15 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{3n}$；　　　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3-1}{n^3-2}\right)^{4n^3}$.

解　同例 9，利用$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$ 的形式性.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{-1}{n+2}\right)^{-(n+2)\cdot 3n/(n+2)}=\mathrm{e}^{-3}$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3-1}{n^3-2}\right)^{4n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^3-2}\right)^{(n^3-2)\cdot 4n^3/(n^3-2)}=\mathrm{e}^4$.

例 16　设有一对小兔经两个月后成年，从第三个月开始每月产一对小兔，新出生的小兔也在出生两个月后成年，每月产一对小兔. 假设出生的小兔均无死亡，求：

(1) 一年后有几对兔子？　(2) n 个月后有多少对兔子？

(3) 若 n 个月后有 F_n 对兔子，计算$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{F_n}{F_{n+1}}$.

解　若按题示规律递推可得

月 份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	…
对 数	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	…

将上表表示为数列$\{F_n\}$ (n 为月数)，则

$$\{F_n\}:1,1,2,3,5,8,13,\cdots.$$

数列$\{F_n\}$称为斐波那契(Fibonacci) 数列.

由数列观察到：$F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$，$n\geqslant 2$.

现要求通项 F_n 的表达式. 构造特征方程

$$x^2=x+1\Rightarrow x^2-x-1=0.$$

解得一对特征根

$$x_1=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}),\quad x_2=\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}),$$

则

$$F_n=c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

将 $n=1,2$ 代入，可确定

$$\begin{cases} F_1 = c_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1, \\ F_2 = c_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + c_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}, \\ c_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

所以 $$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

再用数学归纳法证明 F_n 的正确性.

$n=1$ 时,$F_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right] = 1$ 显然正确.

设 $n=k$ 时,F_k 成立,则 $n=k+1$ 时,有

$$\begin{aligned} F_{k+1} = F_k + F_{k-1} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right] \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right)\right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right] \end{aligned}$$

所以 $$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

成立. 由此可知

(1) $n=13, F_n = 233$(对);

(2) n 个月后,有

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]\text{(对)};$$

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n+1}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

例 17 用有限覆盖定理证明闭区间套定理.

证 用反证法. 设闭区间套定理不成立，即闭区间$[a_1,b_1]$上任一点x都不属于闭区间$[a_k,b_k]$，则必存在点x的邻域$U(x,\delta_x)$，使$U(x,\delta_x)\cap[a_k,b_k]=\varnothing$. 但$[a_1,b_1]\subset\bigcup_{x\in(a,b)}U(x,\delta_x)$. 依有限覆盖定理，有

$$[a_1,b_1]\subset\bigcup_{k=1}^{n}U(x,\delta_x),$$

其中$U(x,\delta_{x_k})\cap[a_{i_k},b_{i_k}]=\varnothing$，$k=1,2,\cdots,n$；$i_k\in\mathbf{N}$，且$i_k\geqslant 2$.

设$\max\{i_1,i_2,\cdots,i_n\}=j$，则由闭区间套的条件(1)，有

$$\bigcap_{k=1}^{n}[a_{i_k},b_{i_k}]=[a_j,b_j].$$

于是 $$\forall\, k\in\{1,2,\cdots,n\},$$

有 $$U(x_k,\delta_{x_k})\cap(a_j,b_j)=\varnothing,$$

即 $$\bigcup_{i=1}^{n}U(x_k,\delta_{x_k})\cap[a_j,b_j]=\varnothing.$$

这样，一方面有$[a_1,b_1]\subset\bigcup_{k=1}^{n}U[x_k,\delta_{x_k}]$，另一方面，$\bigcup_{k=1}^{n}U(x_k,\delta_{x_k})$又不包含$[a_j,b_j]\subset[a_1,b_1]$，从而引出矛盾. 故假设不成立.

惟一性证明只用到闭区间套的条件(2)，而其它证法相同，不再写出.

例 18 设$\{f_n(x)\}$是$[a,b]$上连续函数列，在$[a,b]$上收敛于连续函数$f(x)$. 若$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上单调减少，证明$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛.

证 $\forall\,\varepsilon>0$，对任$x_0\in[a,b]$，$\exists\,N_0$，使

$$|f_{N_0}(x_0)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

又由$f_{N_0}(x)$及$f(x)$的连续性，有

$$\lim_{x\to x_0}|f_{N_0}(x)-f(x)|=|f_{N_0}(x_0)-f(x_0)|.$$

从而对所给ε，$\exists\,\delta_{x_0}>0$，使当

$$x \in (x_0 - \delta_{x_0}, x_0 + \delta_{x_0}) \cap [a,b]$$

时，有 $$|f_{N_0}(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

由于 $\{f_n(x)\}$ 单调递减，故当 $n > N_0$ 时，有

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant |f_{N_0}(x) - f(x)| < \varepsilon$$

在 $(x_0 - \delta_{x_0}, x_0 + \delta_{x_0}) \cap [a,b]$ 上成立.

因为 $$[a,b] \subset \bigcup_{k=1}^{m} (x_0 - \delta_{x_0}, x_0 + \delta_{x_0}),$$

故由有限覆盖定理，有

$$[a,b] \subset \bigcup_{k=1}^{m} (x_k - \delta_{x_k}, x_k + \delta_{x_k}).$$

设 $$\max\{N_1, N_2, \cdots, N_m\} = e,$$

于是，当 $n > l$ 时，对任意的 $x \in [a,b]$，有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

成立. 所以，函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于连续函数 $f(x)$.

第六节　数列的上、下极限

主要内容

1. 上、下极限的聚点定义　有界数列 $\{a_n\}$ 的上、下极限定义为 $\{a_n\}$ 的最大（小）聚点，记作

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n (= A), \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n (= a).$$

2. 上、下极限的 ε-N 定义　$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ N > 0$，当 $n > N$ 时，总有 $a_n < A + \varepsilon$；又 $\exists$ 子列 $\{a_{n_k}\}$，使 $a_{n_k} > A - \varepsilon\ (k \in \mathbf{N})$，则有 $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n (= A)$.

$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ N > 0$，当 $n > N$ 时，总有 $a_n > a - \varepsilon$；又 $\exists$ 子列 $\{a_{n_k}\}$，使 $a_{n_k} < a + \varepsilon\ (k \in \mathbf{N})$，则有 $\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n (= a)$.

3. 上、下极限的确界定义

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} a_k = \inf_n \sup_{k\geqslant n} a_k \quad (= A),$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n} a_k = \sup_n \inf_{k\geqslant n} a_k \quad (= a).$$

4. 上、下极限的基本性质

(1) $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$.

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 的充分必要条件是

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n \quad (a \text{ 为有限数或 } \pm\infty).$$

(3) 对 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$，有

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} a_{n_k} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} a_{n_k} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n$$

(4) 上、下极限有保不等式性 $\forall\, n \geqslant n_0$，若 $a_n \leqslant b_n$，则

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} b_n, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n.$$

(5)
$$\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n + \underline{\lim_{n\to\infty}} b_n \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} (a_n + b_n),$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (a_n + b_n) \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n.$$

方法、技巧与典型例题分析

上、下极限的概念比普通的极限概念要更复杂，关于上、下极限命题的证明也比普通极限的命题复杂和困难，所以我们只讨论数列有界的情况. 读者要注意逻辑的正确性与思维的严密性，若遇到不等式的情形更应如此.

例 1 证明：

(1) $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \underline{\lim}_{n\to\infty} b_n \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} (a_n + b_n) \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$;

(2) $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} (a_n + b_n) \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$.

证 先证 $\underline{\lim}_{n\to\infty} (-a_n) = -\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$.

设 $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = a$，则依上极限定义，$\forall\, \varepsilon > 0$，数列 $\{a_n\}$ 中至多只有

N 项大于 $a+\varepsilon$，而有无穷项小于 $a-\varepsilon$；即对 $\{-a_n\}$，至多有 N 项小于 $-a-\varepsilon$，而有无穷项大于 $-a+\varepsilon$，所以依下极限定义，有

$$\varliminf_{n\to\infty}(-a_n)=-a,\quad \text{即}\quad \varliminf_{n\to\infty}(-a_n)=-\varlimsup_{n\to\infty}(a_n).$$

(1) 设 $\varliminf_{n\to\infty}a_n=a$，$\varliminf_{n\to\infty}y_n=b$，$\varliminf_{n\to\infty}(a_n+b_n)=c$.

用反证法. 设 $c<a+b$. 依下极限定义，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N$，当 $n>N$ 时，有 $a_n+b_n<c+\varepsilon$. 不妨设 $\varepsilon=\dfrac{1}{2}(a+b-c)$，则

当 $n<N$ 时，$a_n+b_n<c+\varepsilon<a+b-\varepsilon$.

又有 $\varliminf_{n\to\infty}a_n=a$，$\varliminf_{n\to\infty}b_n=b$，依下极限定义，则

当 $n<N_1$ 时，$a_n<a-\dfrac{\varepsilon}{2}$；当 $n<N_2$ 时，$b_n<b-\dfrac{\varepsilon}{2}$.

由此推出矛盾. 故 $a+b\leqslant c$，即

$$\varliminf_{n\to\infty}a_n+\varliminf_{n\to\infty}b_n\leqslant\varliminf_{n\to\infty}(a_n+b_n).$$

又令 $d_n=a_n+b_n$，则 $a_n=d_n+(-a_n)$. 于是

$$\varliminf_{n\to\infty}d_n+\varliminf_{n\to\infty}(-b_n)\leqslant\varliminf_{n\to\infty}a_n,$$

由于 $$\varliminf_{n\to\infty}(-b_n)=-\varlimsup_{n\to\infty}b_n,$$

所以 $$\varliminf_{n\to\infty}d_n=\varliminf_{n\to\infty}(a_n+b_n)\leqslant\varliminf_{n\to\infty}a_n+\varlimsup_{n\to\infty}b_n.$$

(2) 以 $-b_n$ 及 $-a_n$ 分别代替题(1)中的 a_n 与 b_n，有

$$\varliminf_{n\to\infty}(-b_n)+\varliminf_{n\to\infty}(-a_n)\leqslant\varliminf_{n\to\infty}-(a_n+b_n)\leqslant\varliminf_{n\to\infty}-b_n+\varlimsup_{n\to\infty}a_n.$$

由 $\varliminf_{n\to\infty}(-a_n)=-\varlimsup_{n\to\infty}a_n$，得

$$-\varlimsup_{n\to\infty}b_n-\varlimsup_{n\to\infty}a_n\leqslant-\varlimsup_{n\to\infty}(a_n+b_n)\leqslant-\varlimsup_{n\to\infty}b_n-\varliminf_{n\to\infty}a_n,$$

即 $$\varliminf_{n\to\infty}a_n+\varlimsup_{n\to\infty}b_n\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}(a_n+b_n)\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}a_n+\varlimsup_{n\to\infty}b_n.$$

当 $\{a_n\}:0,1,2,0,1,2,\cdots$；$\{b_n\}:2,3,1,2,3,1,\cdots$ 时，题(1)、题(2)中仅不等号成立. 读者可自己举出类似例子.

例 2 设 $a_n\geqslant0$，$b_n\geqslant0$，$n=1,2,\cdots$，证明：

(1) $\varliminf_{n\to\infty}a_n\cdot\varliminf_{n\to\infty}b_n\leqslant\varliminf_{n\to\infty}a_nb_n\leqslant\varliminf_{n\to\infty}a_n\cdot\varlimsup_{n\to\infty}b_n$

(2) $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \cdot \underline{\lim}_{n\to\infty} \overline{b_n} \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n b_n \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n \cdot \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$

证 (1) 先证右边不等式. 依定义, $\{a_n\}$ 存在子列 $\{a_{n_j}\}$, 使 $a_{n_k} \to a = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \geqslant 0$; 而对 $\{b_{n_k}\}$ 也存在子列 $\{b_{n_{ki}}\}$, 使 $b_{n_{ki}} \to b = \overline{\lim} b_{n_{ki}} \geqslant 0$.

由 $\overline{\lim}_{n\to\infty} b_{n_k} \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$, $a_{n_{ki}} b_{n_{ki}} \to ab$, 知 ab 是数列 $\{a_n b_n\}$ 的一个聚点, 故 $\underline{\lim}_{n\to\infty}(a_n b_n) \leqslant ab$.

由于 $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, 所以

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}(a_n b_n) \leqslant ab \leqslant a\,\overline{\lim}_{n\to\infty} b_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \cdot \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n.$$

再证左边不等式. 当 $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = 0$ 时, 不等式显然成立. 设 $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = b_0$, 依定义, $\exists\, N > 0$, 当 $n > N$ 时, $a_n > 0$. 又, 依定义, $\{a_n b_n\}\exists$ 子数列 $\{a_{n_k} b_{n_k}\}$, 使 $a_{n_k} b_{n_k} \to a' = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n b_n$; $\{a_n\}\exists$ 子数列 $\{a_{n_{ki}}\}$, 使 $a_{n_{ki}} \to b' = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_{n_k}$.

因为 $b' = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_{n_k} \geqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = b_0$, $a_n \geqslant 0$, 所以

$$b_{n_{ki}} = a_{n_{ki}} b_{n_{ki}} / a_{n_{ki}} \to \frac{a'}{b'}.$$

即 $\frac{a'}{b'}$ 是 $\{b_n\}$ 的一个聚点, 即 $\frac{a'}{b'} \geqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} b_n$. 从而知

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}(a_n b_n) = a' \geqslant b'\,\underline{\lim}_{n\to\infty} b_n \geqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \cdot \underline{\lim}_{n\to\infty} b_n.$$

(2) 类似可证. 请读者一试.

例 3 证明: 若 $a_n > 0$, 对 $\{a_n\}$, 有

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} n\left(\frac{1+a_n}{a_n} - 1\right) \geqslant 1.$$

证 用反证法. 设 $\overline{\lim}_{n\to\infty} n\left(\frac{1+a_n}{a_n} - 1\right) < 1$, 则 $\exists\, N > 0$, 当 $n \geqslant N$ 时, 有

$$n\left(\frac{1+a_n}{a_n} - 1\right) < 1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{a_n}{n} - \frac{a_{n+1}}{n+1},\ n \geqslant N.$$

将一连串不等式中前 k 个相加, 得

$$\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+2}+\cdots+\frac{1}{N+k}<\frac{a_N}{N}-\frac{a_{N+k}}{N+k}<\frac{a_N}{N},\ k>1.$$

但事实上，当 $k\to\infty$ 时，上式左边 $\to+\infty$，矛盾. 故

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}n\left(\frac{1+a_n}{a_n}-1\right)\geqslant 1.$$

例 4 证明：若 $a_n>0,n=1,2,\cdots$，有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{a_n}=1,$$

则数列 $\{a_n\}$ 收敛.

证 设 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n=a$，则 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a}$，$a>0$.

依定义，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N\in\mathbf{N}$，当 $n>N$ 时，有 $\frac{1}{a_n}<\frac{1}{a}+\frac{\varepsilon}{a}$. 故

$$a_n>\frac{a}{1+\varepsilon}=a\left(1-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)>a(1-\varepsilon),$$

即 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n\geqslant a$. 因为 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n\leqslant\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n$，所以 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n$，数列 $\{a_n\}$ 收敛.

例 5 证明：若 $a_n>0,n=1,2,\cdots$，则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

证 设 $a=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}$，当 $a=+\infty$，不等式必成立.

当 $0\leqslant a<+\infty$ 时，依极限定义，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N>0$，当 $k>N$ 时，有 $\frac{a_{k+1}}{a_k}<a+\varepsilon$.

任取 $n>N$，令 $k=N,N+1,\cdots,n-1$，将所得 $n-N$ 个不等式相乘，得

$$\frac{a_{N+1}}{a_N}\cdot\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}\cdots\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}<(a+\varepsilon)^{n-N},$$

即
$$\frac{a_n}{a_N}<(a+\varepsilon)^{n-N}\Rightarrow a_n<M(a+\varepsilon)^n.$$

其中 $M = a_N(a+\varepsilon)^{-N}$. 于是 $\sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{M}(a+\varepsilon)$, 得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{M}(a+\varepsilon) = a+\varepsilon.$$

由 ε 的任意性知, 所证不等式成立.

例 6 设有数列 $\{a_n\}$ 及常数 $d \geqslant 2$, 令

$$b_n = a_n + da_{n+1}, \quad n = 1,2,\cdots,$$

证明: 数列 $\{b_n\}$ 收敛的充要条件是数列 $\{a_n\}$ 收敛.

证 充分性是显然的. 现证必要性.

设 $\{b_n\}$ 收敛, 则 $\{b_n\}$ 有界 $\Rightarrow \{a_n\}$ 有界. 因为若有 $|a_1| \leqslant M$, $|b_n| \leqslant M$, 则当 $|a_n| \leqslant M$ 时, 有

$$|a_{n+1}| = \left|\frac{1}{d}b_n - \frac{1}{d}a_n\right| \leqslant \frac{|b_n|}{d} + \frac{|a_n|}{d} \leqslant \frac{2}{d}M \leqslant M.$$

所以 $\{a_n\}$ 有界.

又设 $\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = a$, $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = A$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, 对等式 $a_n = b_n - da_{n+1}$ 两边分别取上、下极限, 利用

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(-a_n) = -\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}}(a_n+b_n) = \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n,$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n+b_n) = \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n.$$

得
$$A = b - da, \quad a = b - dA.$$

立即可得 $a = A$, 所以 $\{a_n\}$ 收敛.

第二章　函数、极限与连续性

第一节　映射与函数

主 要 内 容

一、映射

1. 设 A,B 为两个非空集合.若对每一个 $x\in A$,按照某一确定法则 f,有惟一确定的 $y\in B$ 与之对应,则称法则 f 是从集合 A 到集合 B 的一个映射(又称算子),记作

$$f:A\to B\quad 或\quad f:x\to y=f(x),\quad x\in A.$$

其中,y 称为元素 x 在映射 f 下的像,x 称为 y 在映射 f 下的一个逆像(原像).集合 A 称为映射 f 的定义域,记作 $D(f)=A$.A 中所有元素 x 的像 y 的全体所构成的集合称为映射 f 的值域,记作 $R(f)$(或 $f(A)$),即

$$R(f)=f(A)=\{y|y=f(x),\quad x\in A\}.$$

2. 设 f 是从集合 A 到集合 B 的一个映射,若对 A 中的任意两个不同的元素 $x_1\neq x_2$,它们的像 $y_1\neq y_2$,则称 f 是从 A 到 B 的一个单射;如果 $R(f)=B$,即 B 中每一元素 y 都是 A 中某元素的像,则称 f 是从 A 到 B 的满射;如果 f 既是单射又是满射,则称 f 为双射(一一映射).

3. 设 $f:A\to B$ 是单射,则由映射定义,对每一 $y\in R(f)$,有惟一的 $x\in A$ 满足 $f(x)=y$.对应关系 $g:R(f)\to A$ 定义一个从 $R(f)$ 到 X 的映射,称为 f 的逆映射,记作 f^{-1}.定义域为 $D(f^{-1})=$

$R(f)$,值域为 $R(f^{-1}) = A$.

4. 设有两个映射 $g:A \to B_1$,$f:B_2 \to C$,如果 $B_1 \subset B_2$,则对应关系 $f \circ g:A \to C$ 或 $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$,$x \in A$ 定义一个从 A 到 C 的映射,称为映射 f 和 g 的复合映射.

二、函数

1. 设有两个实数集 A 和 B,若存在一个对应法则 f,使集 A 内的每一个数 x,都有一个惟一的数 $y \in B$ 与之对应,则称 f 是定义在集 A 上的函数. 记作 $f:x \to y = f(x)$. $y = f(x)$ 称为一元实函数,简称函数. A 称为定义域.

函数 f 给出 x 轴上点集 A 到 y 轴上点集 B 的一个映射.

2. 函数的表示法即对应法则 f 的表示法,有列表法、图示法和公式法.

函数的公式法表示除形式 $y = f(x)$ 外,还有分段表示、隐式表示与参数表示.

3. 函数的几个特性

(1) 奇偶性　设 f 为定义在对称于原点的数集 D 上的函数,若对 $x \in D$,有 $-x \in D$,满足

$$f(x) = -f(-x) \quad (\text{或}\ f(x) = f(-x)), \quad x \in D,$$

则称 f 为 D 上的奇函数(或偶函数).

(2) 有界性　设 $f(x)$ 在 D 上有定义,若 $\exists\, M > 0$,使 $\forall\, x \in D$,有 $|f(x)| \leqslant M$,则称 f 为 D 上的有界函数.

(3) 单调性　设 $f(x)$ 在 D 上有定义,若 $\forall\, x_1, x_2 \in D$,$x_1 \leqslant x_2$ 时,有

$$f(x_1) \leqslant f(x_2) \quad (\text{或}\ f(x_1) \geqslant f(x_2)),$$

则称函数 f 在 D 上单调增加(或减少). 当式中等号不存在时,称严格单调增加(或减少).

(4) 周期性　设 $f(x)$ 在 D 上有定义,若存在正数 T,使对于一切 $x \in D$,$f(x + T) = f(x)$ 成立,则 f 为 D 上的周期函数,T 为 f 的周期. T 中的最小值称为最小周期,简称周期.

4. 设有函数 $f:A\to\mathbf{R}$ 与 $g:B\to\mathbf{R}$，若 $R(f)\subseteq B$，则称复合映射 $\varphi=g\circ f:A\to\mathbf{R}$ 为 g 与 f 的复合函数. 如 $y=g(u)$，$u=f(x)$，$u\in R(f)$，则

$$y=\varphi(x)=(g\circ f)(x)=g[f(x)],\quad x\in A.$$

其中 u 称为中间变量，"$\circ$" 表示复合运算.

5. 设有函数 $f:A\to B=R(f)$，若存在函数 $g:R(f)\to A$，使 g 是 f 的逆映射，f 是可逆的. 则 g 称为 f 的反(逆)函数，记作

$$g=f^{-1}.$$

6. 常数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数. 由基本初等函数经有限次四则运算与复合运算得到的可由一个式子表示的函数，称为初等函数.

疑 难 解 析

1. 构成一个映射有哪些条件与要求？

答 构成一个映射必须具备下列三个基本要素：

(1) 集合 A，即定义域 $D(f)=A$；

(2) 集合 B，即限制值域的范围：$R(f)\subset B$；

(3) 对应法则 f，使每个 $x\in A$，有惟一的 $y=f(x)$ 与之对应.

在这里，映射有两点要求：一是元素的像必须是惟一的. 如 $f:y^2=x$ 就不是一个映射；凡是不满足像的唯一性要求的对应法则，一般只要对值域范围稍加限制，就能使之成为映射. 二是不要求原像也具有惟一性. 如 $f:y=x^2$ 是一个映射.

2. 说明函数与映射的关系？

答 在映射的定义中，若 B 是一个实数集，则称映射 $f:A\to B$ 是泛函；若 A,B 都是实数集，则映射 $f:A\to B$ 是一元函数. 若 $A=B$，则 f 是 A 到自身的映射，称为 A 上的一个变换. 若集 A 中的每个元素都映为自己，则映射称为恒等映射或单位映射，记作 I_A 或 I，即 $\forall\, x\in A, I_x=x$.

方法、技巧与典型例题分析

映射的基本概念必须十分熟悉，才能证明关于映射的一些命题. 证明中要特别注意元素的任意性，只有任意性才能保证命题的普通性. 证明技巧中很重要的一点是反证法的运用，用好反证法将给我们解题以很大便利.

例 1 设 $A = B = [0,1]$，则 $\varphi_1(x) = \frac{1}{2}x$，$\varphi_2(x) = \sin\pi x$，$\varphi_3(x) = x$ 都是什么样的映射.

解 φ_1 是从 A 到 B 的单射，不是满射；φ_2 是从 A 到 B 的满射，不是单射；φ_3 是从 A 到 B 的双射.

例 2 设映射 $f:A \to B$ 是可逆的，证明：其逆映射是惟一的.

证 用反证法. 设 g_1, g_2 都是 f 的逆映射，且 $g_1 \neq g_2$，则 $\exists\ y \in B$，使得 $g_1(y) \neq g_2(y)$. 由于有 $f \circ g_2(y) = y$，得 $g_1 \circ f \circ g_2(y) = g_1(y)$. 又 $g_1 \circ f = I_A$，得 $g_1 \circ f \circ g_2(y) = g_2(y)$，即有 $g_1(y) = g_2(y)$，推出矛盾，所以假设不成立. 映射 $f:A \to B$ 可逆，则其逆映射是惟一的.

例 3 设 $f:A \to B$ 与 $g:B \to A$ 是两个任意映射，若 $g \circ f = I_A$，证明 f 是单射，g 是满射.

证 因为 $\forall\ x \in A$，$\exists$ 元素 $f(x) \in B$，使 $g[f(x)] = x$，所以 g 是满射.

用反证法证明 f 是单射. 设有 $x_1 \neq x_2$，使 $f(x_1) = f(x_2)$，则 $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$. 又 $g \circ f = I_A$，故 $x_1 = x_2$，推出矛盾. 所以 f 一定是单射.

例 4 设有映射 $f:X \to Y, A \subseteq X, B \subseteq Y$，证明：

(1) $f[f^{-1}(B)] = B \cap f(x)$；

(2) $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$，若 f 是单射，则 $f^{-1}[f(A)] = A$；

(3) $f[f^{-1}(B)] = B \Leftrightarrow f$ 为满射.

证 (1) $f[f^{-1}(B)] \subseteq B \cap f(x)$ 是显然的. 又由 $B \cap f(x) \subseteq B$, $f^{-1}[B \cap f(x)] \subseteq f^{-1}(B)$, 所以 $B \cap f(x) \subset f[f^{-1}(B)]$.

故
$$f[f^{-1}(B)] = B \cap f(x).$$

(2) 只需证 $f^{-1}[f(A)] \subseteq A$. 因为 $\forall x \in f^{-1}[f(A)]$, $\exists y \in f(A)$, 使得 $x = f^{-1}(y)$, 所以 $y = f(x)$. 即 $f^{-1}[f(A)] \subseteq A$.

若 f 是单射, 则 $f^{-1}[f(A)] = A$.

(3) 先证充分性. 由题(1) 知 $f[f^{-1}(B)] \subseteq B$, 又因为 f 是满射, $\forall y \in B$, $\exists x \in f^{-1}(B)$, 使 $f(x) = y$, 故 $y = f[f^{-1}(B)]$, 因而 $B \subseteq f[f^{-1}(B)]$. 于是 $f[f^{-1}(B)] = B$. 而必要性是显然的.

例 5 设映射 $f: X \to Y$, $A, B \subseteq X$. 证明:

(1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;

(2) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$;

(3) 若 f 为单射, 则题(2) 成为等式.

证 (1) $\forall y \in f(A \cup B)$, $\exists x \in A \cup B$, 当 $x \in A$ 时, $y \in f(A)$; 当 $x \in B$ 时, $y \in f(B)$. 所以 $y \in f(A) \cup f(B)$. 故
$$f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B).$$

又 $\forall y \in f(A) \cup f(B)$, 当 $y \in f(A)$ 时, $\exists x \in A$, 使 $f(x) = y$; 当 $y \in f(B)$ 时, $\exists x \in B$, 使 $f(x) = y$. 故
$$f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B).$$

综上所述得, $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(2) 因为 $\forall y \in f(A \cap B)$, $\exists x \in A \cap B$, 使 $f(x) = y$, 即 $x \in A$ 且 $x \in B$, 故 $y \in f(A)$ 且 $y \in f(B)$. 故
$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$$

(3) 因为题(2) $\forall y \in f(A) \cap f(B)$. 有 $y \in f(A)$ 且 $y \in f(B)$. 所以 $\exists x_1 \in A$, 使 $f(x_1) = y$, $\exists x_2 \in B$, 使 $f(x_2) = y$. 又因为 f 是单射, 所以 $x_1 = x_2$, 即 $x \in A \cap B$, 又 $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$, 故 $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

例 6 证明: f 是 A 到 B 上可逆映射的充分必要条件是 f 是 A 到 B 的双射.

证　充分性　设 f 是 A 到 B 的双射，则 $\forall\ y \in B$，$\exists$ 惟一的 $x \in A$，使得 $y = f(x)$. 由此作从 B 到 A 的映射：$f^{-1}y \to x$，则 $\forall\ x \in A$，有

$$(f^{-1} \circ f)\ (x) = f^{-1}[f(x)] = f^{-1}(y) = x,$$

即 $f^{-1} \circ f = I_A$. 同时，$\forall\ y \in B$，有

$$(f \circ f^{-1})\ (y) = f[f^{-1}(y)] = f(x) = y.$$

即 $f \circ f^{-1} = I_B$. 因此，f 是可逆的.

必要性　设 f 可逆，故存在 $f^{-1}: B \to A$，使得 $f^{-1} \circ f = I_A$，$f \circ f^{-1} = I_B$，于是，$\forall\ x_1, x_2 \in A$，当 $f(x_1) = f(x_2)$ 时，有

$$\begin{aligned} x_1 &= (f^{-1} \circ f)(x_1) = f^{-1}[f(x_1)] = f^{-1}[f(x_2)] \\ &= (f^{-1} \circ f)(x_2) = x_2. \end{aligned}$$

所以，f 是单射. 又，$\forall\ y \in B$，有

$$y = (f \circ f^{-1})(y) = f[f^{-1}(y)],$$

即 $R(f) = B$，故知 f 又是满射. 从而 f 是双射.

掌握函数的基本概念，对函数式、函数的定义域、值域、复合函数和反函数有足够的了解，能够求出函数表达式、定义区域和函数，会复合和分解函数，会从已知函数求出函数的反函数.

例 7　设 $f(x) = 2x - x^2\ (0 \leqslant x \leqslant 1)$，求定义于 $(-\infty, +\infty)$ 的函数 $F(x)$，使 $F(x)$ 满足以下条件：

(1) $F(x) \equiv f(x)\ (0 \leqslant x \leqslant 1)$；

(2) $F(-x) = -F(x)\ (-\infty < x < +\infty)$；

(3) $F(x+2) = -F(x)\ (-\infty < x < +\infty)$.

解　由条件(3) 知 $F(x+4) = -F(x+2) = F(x)$，所以 $F(x)$ 是 $T = 4$ 的周期函数. 在 $[-2, 2]$ 上考虑 $F(x)$ 的表达式，因为在 $[0, 1]$ 上有

$$F(x) = f(x) = 2x - x^2 = 1 - (x-1)^2,$$

由 $F(-x) = -F(x)$，故在 $[-1, 0)$ 上有

$$F(x) = -[1 - (-x-1)^2] = (x+1)^2 - 1,$$

由 $F(x+2)=-F(x)$,故在$[1,2)$上有

$$F(x)=-\{[(x-2)+1]^2-1\}=1-(x-1)^2.$$

又由 $F(-x)=-F(x)$,故在$[-2,-1)$上有

$$F(x)=[1-(-x-1)^2]=(x+1)^2-1.$$

综上所述得,在$[-2,2]$上有

$$F(x)=\begin{cases}(x+1)^2-1, & -2\leqslant x<0,\\ 1-(x-1)^2, & 0\leqslant x<2.\end{cases}$$

考察到 $T=4$,故在$(-\infty,+\infty)$上有

$$F(x)=\begin{cases}(x-4k+1)^2-1, & 4k-2\leqslant x<4k,\\ 1-(x-4k-1)^2, & 4k\leqslant x<4k+2,\end{cases}\quad k\in\mathbf{Z}.$$

例 8 设 $f(x)=\dfrac{1}{\lg(3-x)}+\sqrt{49-x^2}$,求 $f(x)$ 的定义域与 $f[f(-7)]$.

解 $\dfrac{1}{\lg(3-x)}$ 要求 $3-x>0,3-x\neq 1$,即 $-\infty<x<2\cup 2<x<3$. $\sqrt{49-x^2}$ 要求 $-7\leqslant x\leqslant 7$. 故 $f(x)$ 的定义域为 $-7\leqslant x<2\cup 2<x<3$.

因为 $f(-7)=\dfrac{1}{\lg 10}+0=1$,所以

$$f[f(-7)]=f(1)=\frac{1}{\lg 2}+4\sqrt{3}.$$

例 9 求下列函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{1}{|x|-x}$; (2) $y=\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1-x}{1+x}$;

(3) $y=\sqrt{2+x-x^2}+\arcsin\left(\lg\dfrac{x}{10}\right)$;

(4) $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x}$.

解 (1) $|x|-x\neq 0$,定义域即 $|x|\neq x$ 的点集.

(2) $x\neq 0,\dfrac{1-x}{1+x}>0$. 定义域为$(-1,0)\cup(0,1)$.

(3) x 满足 $\begin{cases} 2+x-x^2 \geqslant 0, \\ \left|\lg \dfrac{x}{10}\right| \leqslant 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2-x)(1+x) > 0, \\ -1 \leqslant \lg \dfrac{x}{10} \leqslant 1. \end{cases}$

由第一式得 $-1 \leqslant x \leqslant 2$，由第二式得 $1 \leqslant x \leqslant 100$. 定义域为 $[1,2]$.

(4) 由

$$\left|\frac{2x}{1+x}\right| \leqslant 1 \Rightarrow -1 \leqslant \frac{2x}{1+x} \leqslant 1 \Rightarrow -1 \leqslant 2-\frac{2}{1+x} \leqslant 1,$$

即 $-3 \leqslant \dfrac{-2}{1+x} \leqslant 1$，解得 $-\dfrac{1}{3} \leqslant x \leqslant 1$. 定义域为 $\left[-\dfrac{1}{3},1\right]$.

例 10 设 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，求下列函数的定义域：

(1) $f\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$； (2) $f(x-a)+f(x+a)\ (a>0)$.

解 (1) 因为对 $f(x)$ 要求 $0 \leqslant x \leqslant 1$，即要求 $0 \leqslant \sin\dfrac{\pi}{x} \leqslant 1$，所以 $2n\pi \leqslant \dfrac{\pi}{x} \leqslant (2n+1)\pi,\ n \in \mathbf{Z}$.

当 $n=0$ 时，$0 \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant 1$，即 $x \geqslant 1$.

当 $n \neq 0$ 时，$2n \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant 2n+1$，即 $x \in \left[\dfrac{1}{2n+1},\dfrac{1}{2n}\right]$.

故 $f\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$ 的定义域为 $\left[\dfrac{1}{2n+1},\dfrac{1}{2n}\right] \cup [1,+\infty)$.

(2) 由 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$ 知，应有

$$\begin{cases} 0 \leqslant x-a \leqslant 1, \\ 0 \leqslant x+a \leqslant 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \leqslant x \leqslant 1+a, \\ -a \leqslant x \leqslant 1-a. \end{cases}$$

因为 $a>0$，故当 $1-a \geqslant a$（即 $0<a \leqslant 1/2$）时，$a \leqslant x \leqslant 1-a$. 当 $1-a<a$（即 $a>1/2$）时，不等式组无解. 定义域为 $[a,1-a]$ $(0<a<1/2)$.

例 11 设 $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x^2}}$，求：

(1) $f(x)$ 的定义域； (2) $\dfrac{1}{2}\{f[f(x)]\}^2$.

解 (1) 因为

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ \sqrt{2x}, & x>0,\end{cases}$$

所以定义域为$(-\infty,+\infty)$.

(2) 由 $f[f(x)]=\sqrt{\sqrt{x+\sqrt{x^2}}+\sqrt{\left(\sqrt{x+\sqrt{x^2}}\right)^2}}$

$$=\sqrt{2\sqrt{x+\sqrt{x^2}}}=\sqrt{2f(x)},$$

得 $\frac{1}{2}\{f[f(x)]\}^2=\frac{1}{2}\{\sqrt{2f(x)}\}^2=\frac{1}{2}\cdot 2f(x)=f(x).$

求函数定义域时要注意以下几点:(1) 负数不能开偶次方;(2) 分式的分母不能为零;(3) 对数的真数必须是正数;(4) 反三角函数值有限制;(5) 反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域是原来函数 $y=f(x)$ 的值域;(6) 奇、偶函数定义域是关于原点对称的数集;(7) 有限个函数四则运算得到的函数的定义域是这些函数定义域的交集;(8) 复合函数 $z=f[\varphi(x)]$ 的定义域一般是 $y=\varphi(x)$ 定义域的子集,在子集上 $y=\varphi(x)$ 的值域属于 $z=f(y)$ 的定义域;(9) 应用问题函数的定义域要考虑问题的具体条件与意义来确定.

例 12 证明:若对任意实数 x 和 y,有

$$2f(x)f(y)=f(x+y)+f(x-y),$$

且 $f(x)\not\equiv 0$,则:

(1) $[f(x)]^2=\frac{1}{2}[f(2x)+1]$;

(2) $[f(x)]^2+[f(y)]^2=f(x+y)f(x-y)+1$.

证 此类问题一般通过对已知等式中的 x 或 y 取特殊值来证.

(1) 在等式中令 $y=0$,得 $2f(x)f(0)=2f(x)$. 由 $f(x)\not\equiv 0$ 和上式的普通性,必 $f(0)=1$. 再在等式中令 $x=y$,得

$$2[f(x)]^2=2f(2x)+1\Rightarrow[f(x)]^2=\frac{1}{2}[f(2x)+1].$$

(2) 在等式中以 $x+y$ 与 $x-y$ 分别替代 x 与 y,并利用题(1)的结果,得

$$2f(x+y)f(x-y)=f(2x)+f(2y)$$
$$=2[f(x)]^2+2[f(y)]^2-2,$$

所以 $[f(x)]^2+[f(y)]^2=f(x+y)f(x-y)+1.$

例 13 已知 $f(x)$ 是单值函数,且满足方程

$$f^2(\ln x)+2xf(\ln x)+x^2\ln x=0 \quad (0<x<\mathrm{e}),$$

$f(0)=0$,求 $f(x)$.

解 设 $t=\ln x$,则 $x=\mathrm{e}^t$,关系式化为

$$f^2(t)+2\mathrm{e}^t f(t)+\mathrm{e}^{2t}t=0.$$

解得 $f(t)=\mathrm{e}^t(1\pm\sqrt{1-t})$,由 $f(0)=0$,得

$$f(x)=\mathrm{e}^x(1-\sqrt{1-x}).$$

例 14 设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x}+3$,求 $f(x)$.

解法 1(化变量法)

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}+3=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+1,$$

故
$$f(x)=x^2+1.$$

解法 2 设 $t=x+\dfrac{1}{x}$,则 $t^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2$.因此

$$f(t)=x^2+\frac{1}{x^2}+2+1=t^2+1,$$

故
$$f(x)=x^2+1.$$

类似可求下列各题:

已知 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}\ (x>0)$,则

$$f(x)=\frac{1}{x}(1+\sqrt{x^2+1}).$$

已知 $f(x+1)=x^2-3x+2$,则 $f(x)=x^2-5x+6$.

例 15 设 $z=\sqrt{y}+f(\sqrt[3]{x}-1)$,且 $y=\dfrac{1}{z}=x$.求 $f(x)$

及 z 的表达式.

解 取 $y=1, z=x$ 代入已知表达式,得

$$x=1+f(\sqrt[3]{x}-1) \Rightarrow x-1=f(\sqrt[3]{x}-1).$$

令 $\sqrt[3]{x}-1=t$,则 $x=(t+1)^3$,上式化为

$$f(t)=(t+1)^3-1=t^3+3t^2+3t,$$

即 $\qquad f(x)=x^3+3x^2+3x, \quad z=\sqrt{y}+(x-1).$

例 16 设对任意 $x, y \in \mathbf{R}$,若有 $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \geqslant \dfrac{1}{2}[f(x)+f(y)]$,且 $f(x) \geqslant 0, f(0)=c$,证明:对任意 $x \in \mathbf{R}, f(x)=c$.

证 不等式 $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \geqslant \dfrac{1}{2}[f(x)+f(y)]$ 说明在任意区间 $[a, b]$ 上,函数 $f(x)$ 在区间中点 $\dfrac{a+b}{2}$ 的值不小于两端点上函数值 $f(a)$ 与 $f(b)$ 的算术平均值,则函数曲线是水平的或向上凸起的. 若 $f(x) \geqslant 0$,则 $f(x)$ 只能是水平线. 先用反证法证 $f(x) \geqslant c$.

设 $\exists\, a \in \mathbf{R}$,有 $f(a)<c=f(0)$. 又设 $f(0)-f(a)=h>0$. 在题给不等式中,令 $x=0, y=2a$,则有

$$2f(a) \geqslant f(0)+f(2a)$$

或 $\qquad f(2a) \leqslant f(0)-2[f(0)-f(a)]=f(0)-2h.$

令 $x=a, y=3a$,类似推出

$$f(3a) \leqslant 2f(2a)-f(a) \leqslant f(0)-3h, \cdots.$$

由数学归纳法可证,对任意 n,有

$$f(na) \leqslant f(0)-nh.$$

因为 $h>0$,故当 n 充分大时,有 $f(na)<0$. 这与 $f(x) \geqslant 0$ 矛盾,所以,对任意 $x \in \mathbf{R}$,有 $f(x) \geqslant c$.

再来证 $f(x)=c$. 因为对题给的不等式,若取 $y=-x\ (x \in \mathbf{R})$,有 $2f(0)=2c \geqslant f(x)+f(-x)$. 由于 $f(x) \geqslant c, f(-x) \geqslant c$,故必 $f(x)=f(-x)=c$. 即对任意 $x \in \mathbf{R}, f(x)=c$.

例 17 设 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$,求 $f\{f[f(f(x))]\}$ 和 $f[1/f(x)]$

$(x \neq 0, x \neq 1)$.

解 $$f[f(x)] = \frac{x/(x-1)}{x/(x-1)-1} = x,$$

$$f[f(f(x))] = \frac{x}{x-1} = f(x),$$

$$f\{f[f(f(x))]\} = f(f(x)) = x.$$

又 $1/f(x) = (x-1)/x = 1 - 1/x$,所以

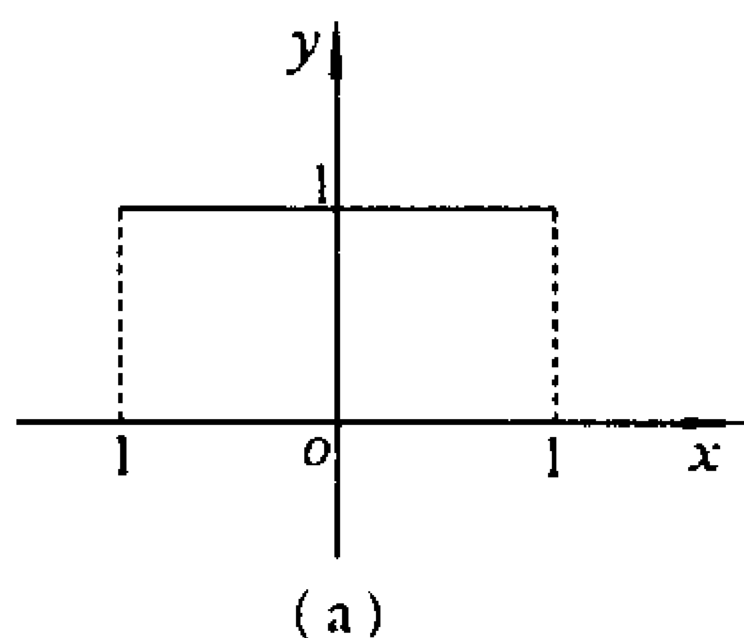
$$f[1/f(x)] = f(1-1/x) = \frac{1-1/x}{(1-1/x)-1} = 1 - x.$$

例 18 设函数

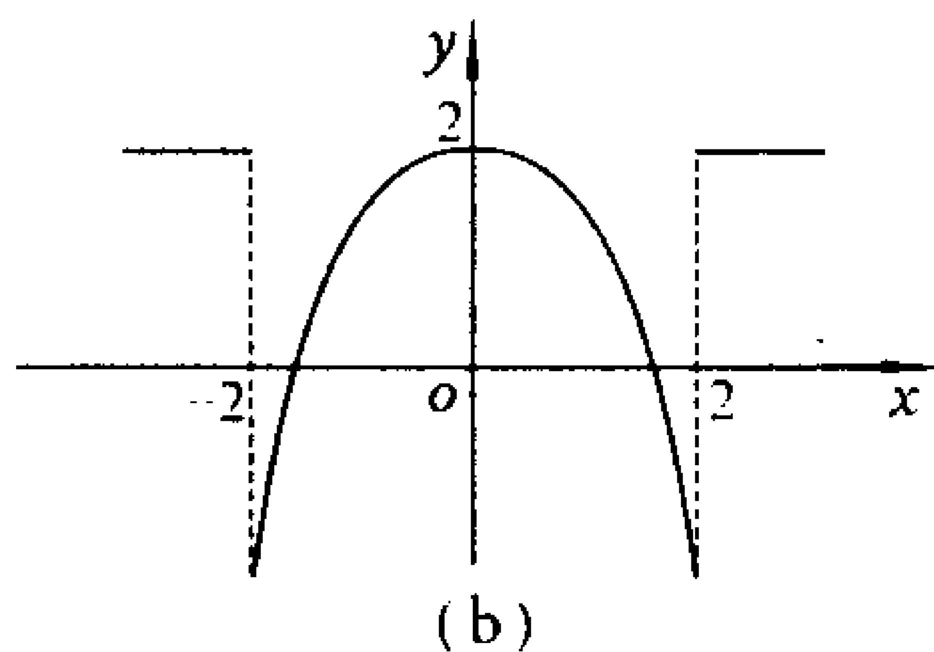
$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & |x| \leqslant 2, \\ 2, & |x| > 2, \end{cases}$$

求 $f[f(x)], f[g(x)], g[f(x)], g[g(x)]$.

解 $f(x), g(x)$ 的图形分别如图 2.1(a),(b) 所示.



(a)



(b)

图 2.1

(1) 因为在$(-\infty, +\infty)$内,$|f(x)| \leqslant 1$,所以

$$f[f(x)] = 1, \quad -\infty < x < +\infty.$$

(2) 因为当$1 \leqslant |x| \leqslant \sqrt{3}$时,$|g(x)| \leqslant 1$,当 $|x| < 1$ 或 $|x| > \sqrt{3}$ 时,$|g(x)| > 1$,所以

$$f[g(x)] = \begin{cases} 1, & 1 \leqslant |x| \leqslant \sqrt{3}, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

(3) 因为在$(-\infty, +\infty)$内,$|f(x)| \leqslant 1$,于是 $g[f(x)] = 2 - [f(x)]^2$. 考虑 $f(x)$ 的取值,得

$$g[f(x)] = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1, \\ 2, & |x| > 1. \end{cases}$$

(4) 因为在$(-\infty, +\infty)$内，$|g(x)| \leqslant 2$，所以$g[g(x)] = 2 - [g(x)]^2$. 考虑$g(x)$的取值，得

$$g[g(x)] = \begin{cases} 2-(2-x^2)^2, & |x| \leqslant 2, \\ -2, & |x| > 2. \end{cases}$$

例 19 设$f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求$f_n(x) = \underbrace{f\{f[\cdots f}_{n个}(x)]\}$.

解 用数学归纳法. 当$n=2$时，$f_2(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$. 设当$n=k$时，$f_k(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}$. 则对于$n=k+1$，有

$$f_{k+1}(x) = \frac{x/\sqrt{1+kx^2}}{\sqrt{1+[x/\sqrt{1+kx^2}]^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}.$$

例 20 设$y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc \neq 0)$，求其反函数，并指出a，b，c，d满足什么条件时，反函数与直接函数相同.

解 由$y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$解得$x = \dfrac{-dy+b}{cy-a}$，所以反函数为

$$y = \frac{-dx+b}{cx-a}.$$

由$\dfrac{dx+b}{cx+d} = \dfrac{-dx+b}{cx-a} \Rightarrow (a+d)[x^2+(d-a)x-b] = 0$，所以，应有$a+d=0$或$b=c=0$而$a=d\neq 0$.

了解函数的特性，对研究函数是十分有用的. 解这类题的方法有反证法、恒等变换法、放大法等.

例 21 证明：定义于对称区间$(-l, l)$内的任何函数$f(x)$均可表示为一个奇函数与一个偶函数之和的形式.

证 构造两个新的函数

$$f_1(x) = \frac{1}{2}[f(x)+f(-x)],\ f_2(x) = \frac{1}{2}[f(x)-f(-x)].$$

因为 $$f_1(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)+f(-(-x))]$$
$$=\frac{1}{2}[f(-x)+f(x)]=f_1(x),$$
$$f_2(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)-f(-(-x))]$$
$$=\frac{1}{2}[f(-x)-f(x)]=-f_2(x),$$
所以，$f_1(x)$ 是偶函数，$f_2(x)$ 是奇函数. 而
$$f(x)=f_1(x)+f_2(x),$$
故 $f(x)$ 可表示为一个奇函数与一个偶函数之和.

例 22 设 $f(x)$ 是奇函数，$f(1)=a$，且
$$f(x+2)-f(x)=f(2).$$
(1) 求 $f(2)$ 与 $f(5)$ 与 a 的关系式；

(2) a 为何值时，$f(x)$ 是以 2 为周期的函数？

解 (1) x 取 $-1,1$ 和 3 时，由所给等式得
$$f(2)=f(1)-f(-1)=2f(1)=2a,$$
$$f(2)=f(3)-f(1),\quad f(2)=f(5)-f(3),$$
将后两式相加，得 $f(5)=2f(2)+f(1)=5a$.

(2) 如果 $f(x)$ 以 2 为周期，则
$$f(x+2)=f(x)\Rightarrow f(x+2)-f(x)=0=f(2),$$
即 $f(2)=2a=0\Rightarrow a=0$. 所以取 $a=0$ 时，$f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数.

例 23 已知函数 $f(x)$ 满足关系式
$$af(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{b}{x}\quad(|a|\neq 1,a,b\text{ 为常数}),$$
确定 $f(x)$ 的奇偶性.

解 将 $x=\frac{1}{t}$ 代入关系式得 $af\left(\frac{1}{t}\right)+f(t)=bt$，又将 t 改为 x 与关系式联立得方程组

$$\begin{cases} af\left(\dfrac{1}{x}\right) + f(x) = bx, \\ af(x) + f(x) = \dfrac{b}{x}, \end{cases}$$

可解得

$$f(x) = \frac{1}{a^2 - 1}\left(\frac{ab}{x} - bx\right) = \frac{ab - bx^2}{(a^2 - 1)x} \quad (|a| \neq 1).$$

显然 $$f(-x) = \frac{ab - b(-x)^2}{(a^2 - 1)(-x)} = -f(x).$$

所以 $f(x)$ 是奇函数.

例 24 证明:函数 $f(x) = 2x + \sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是严格递增的.

证 $\forall x, y \in \mathbf{R}$,且 $x < y$,有

$$|\sin y - \sin x| = 2\left|\sin\frac{y - x}{2}\right|\left|\cos\frac{y + x}{2}\right|$$
$$\leqslant 2\left|\sin\frac{y - x}{2}\right| \leqslant y - x,$$

即有 $$-(y - x) \leqslant \sin y - \sin x \leqslant y - x.$$

由此 $$f(y) - f(x) = 2(y - x) + (\sin y - \sin x)$$
$$\geqslant y - x > 0.$$

从而知 $f(x) = 2x + \sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是严格递增的.

例 25 设 $f(x), \varphi(x), \psi(x)$ 都是单调增函数,且满足

$$f(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant \psi(x),$$

证明: $$f[f(x)] \leqslant \varphi[\varphi(x)] \leqslant \psi[\psi(x)].$$

证 由 $f(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant \psi(x)$ 且 $f(x), \varphi(x), \psi(x)$ 均为单调增函数,得

$$f[f(x)] \leqslant f[\varphi(x)] \leqslant \varphi[\varphi(x)] \leqslant \varphi[\psi(x)] \leqslant \psi[\psi(x)],$$

即所证不等式成立.

例 26 讨论下列函数是否周期函数.若是,求出其周期.

(1) $y = x\cos x$; (2) $y = \sin^2 x$.

解 判断一个函数是否周期函数常用两种方法:一是将所给函数进行恒等变形,讨论是否为周期函数的和、差、积、商;二是利

用反证法，证明周期 T 不存在(或与变量有关).

(1) 因为在 $x\cos x$ 中，x 不是周期函数，所以函数的周期可能不存在. 用反证法. 设函数的周期 $T>0$，则

$$(x+T)\cos(x+T)=x\cos x.$$

令 $x=0$ 和 $x=\pi/2$，得

$$\begin{cases}T\cos T=0,\\ \left(T+\dfrac{\pi}{2}\right)\cos\left(\dfrac{T+\pi}{2}\right)=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos T=0,\\ \sin T=0.\end{cases}$$

显然，满足方程组的 T 不存在. 故 $y=x\cos x$ 不是周期函数.

(2) $\sin^2 x$ 是两个周期函数的积，可能是周期函数，用恒等变换法，得

$$y=\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x.$$

其中 $1/2$ 是常数，周期可取任意正数；$\cos 2x$ 是周期为 π 的周期函数. 所以 $y=\sin^2 x$ 是周期为 π 的函数.

例 27 证明：若函数 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 在数集 A 上有界，则函数 $f(x)+\varphi(x)$，$f(x)-\varphi(x)$，$f(x)\varphi(x)$ 在数集 A 上也有界.

证 若 $f(x)$ 有界，则 $\exists\, M_1>0$，$\forall\, x\in A$ 有 $|f(x)|\leqslant M_1$；若 $\varphi(x)$ 有界，则 $\exists\, M_2>0$，$\forall\, x\in A$ 有 $|\varphi(x)|\leqslant M_2$. 所以

$$|f(x)\pm\varphi(x)|\leqslant|f(x)|+|\varphi(x)|\leqslant M_1+M_2,$$

$$|f(x)\cdot\varphi(x)|=|f(x)|\cdot|\varphi(x)|\leqslant M_1\cdot M_2.$$

故函数 $f(x)+\varphi(x)$，$f(x)-\varphi(x)$，$f(x)\varphi(x)$ 在 A 上也有界.

例 28 证明：定义在同一数集上且周期是可通约的两个周期函数的和与积都是周期函数，并求 $f(x)=\sin x+\dfrac{1}{2}\sin 2x+\dfrac{1}{3}\sin 3x$ 的周期和 $f(x)=\sin^2 x$ 的周期.

证 设 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 是定义在同一数集上，且周期分别 T_1 和 T_2 的两个周期函数. 设 T 为 T_1 与 T_2 的公约数，即

$$T_1=k_1T,\quad T_2=k_2T\quad(k_1,k_2\in\mathbf{Z})$$

则 $$f_1(x+k_1T)=f_1(x),\quad f_2(x+k_2T)=f_2(x).$$

设 $F_1(x)=f_1(x)+f_2(x)$，于是

$$F_1(x+k_1k_2T)=f_1(x+k_1k_2T)+f_2(x+k_1k_2T)$$
$$=f_1(x)+f_2(x)=F_1(x).$$

设 $F_2(x)=f_1(x)f_2(x)$，于是

$$F_2(x+k_1k_2T)=f_1(x+k_1k_2T)f_2(x+k_1k_2T)$$
$$=f_1(x)f_2(x)=F_2(x).$$

在 $f(x)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x$ 中，$\sin x,\sin 2x,\sin 3x$ 的周期分别为 $2\pi,\pi,\frac{2}{3}\pi$，所以 $f(x)$ 的周期是其最小公倍数 2π.

$f(x)=\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ 的周期是 π（见例 25 题(2)）.

第二节　函数的极限

主要内容

1. 设 f 为定义在 $(a,+\infty)$ 上的函数，A 是一个确定的数，若 $\forall\, \varepsilon>0$，$\exists\, M>0$，使得当 $x>M$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称函数 f 当 x 趋向 $+\infty$ 时以 A 为极限，记作

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\ (x\to\infty).$$

2. 设 f 在点 x_0 的去心邻域 $U^\circ(x_0,\delta_0)$ 内有定义，A 是一个确定的数. 若 $\forall\, \varepsilon>0$，$\exists\, \delta>0\ (\delta<\delta_0)$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称 f 当 x 趋向 x_0 时以 A 为极限，记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A \ (x \to x_0).$$

3. 函数的极限具有以下的性质：

（1）惟一性　若极限$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在，则必是惟一的.

（2）局部有界性　若$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在，则存在$x_0$的某去心邻域$U^\circ(x_0,\delta)$，使得$f(x)$在邻域中有界.

（3）局部保号性　若$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A > 0$（或$< 0$），则对任意正数$r$（$0 < r < |A|$），存在$x_0$的某一去心邻域$U^\circ(x_0,\delta)$，使得对一切$x \in U^\circ(x_0,\delta)$，恒有$f(x) > r > 0$（或$f(x) < -r < 0$）.

（4）不等式性　若$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$与$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$都存在，且存在$x_0$的某一去心邻域$U^\circ(x_0,\delta)$，使得对一切$x \in U^\circ(x_0,\delta)$都有$f(x) \leqslant g(x)$，则

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leqslant \lim_{x \to x_0} g(x).$$

（5）迫敛性　若$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A$，且存在$x_0$的某一去心邻域$U^\circ(x_0,\delta)$，使得对一切$x \in U^\circ(x_0,\delta)$都有$f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$，则

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = A.$$

4. 若极限$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$和$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$都存在，则函数$f \pm g, f \cdot g$在$x \to x_0$时极限也存在，且

（1）$\lim\limits_{x \to x_0}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

（2）$\lim\limits_{x \to x_0}[f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

又若$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$，则$f/g$在$x \to x_0$时极限存在，且

（3）$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$.

5. 设 $f(x)$ 在 (x_0-r,x_0) $(r>0)$ 内有定义，A 是一个确定的数，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，使得当 $-\delta<x-x_0<0$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 $f(x)$ 在 x_0 的左极限是 A，记作

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A.$$

类似可以定义 $f(x)$ 在 x_0 的右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$.

函数 $f(x)$ 在 x_0 极限存在的充分必要条件是

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A.$$

以后，我们将 $U(x_0,\delta)$ 记作 $U(x_0)$，$U^\circ(x,\delta)$ 记作 $U^\circ(x_0)$.

6. 海涅(Heine)定理　设 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域有定义，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的充分必要条件是：对于任意满足条件 $\lim\limits_{x\to x_0} x_n=x_0$，且 $x_n\neq x_0(n=1,2,\cdots)$ 的数列 $\{x_n\}$，有

$$\lim_{x\to x_0} f(x_n)=A.$$

7. 柯西(Cauchy)准则　设 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域 $U^\circ(x_0,\delta_0)$ 内有定义，则极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的充分必要条件是：$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta(<\delta')>0$，使得对任何 $x',x''\in U^\circ(x_0,\delta_0)$，都有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

对于一些定理与法则，我们只写出了 $x\to x_0$ 时的情形，$x\to\infty$ 的情形希望读者自己写出.

8. 设 $f(x)$ 定义在 $U^\circ_+(x_0)$（或 $U^\circ_-(x_0)$）上是单调有界函数，则 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$（或 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$）存在.

9. 设 $f(t)$ 在 $U^\circ(t_0)$ 上有定义，且 $\lim\limits_{t\to t_0} f(t)=A$，$t=g(x)$ 在 $U^\circ(x_0)$ 上有定义，当 $x\in U^\circ(x_0)$ 时，$t=g(x)\in U^\circ(t_0)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=t_0$，则

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)]=A.$$

疑难解析

1. 怎样理解函数极限的 ε-δ 定义？

答　函数极限的 ε-δ 定义是在 $x \to x_0$ 情形的极限定义. 如同数列极限定义，ε 是可以任意取定的正数，它反映了函数值 $f(x)$ 与 A 的接近程度；δ 反映了 x 与 x_0 的接近程度，是一个与 ε 有关的量. 一般地，ε 越小，δ 也相应地要小一些.

在定义中只要求 $f(x)$ 在 $U^{\circ}(x_0)$ 有定义，是说明极限只研究 $f(x)$ 在 $x \to x_0$ 而不等于 x_0 的过程中函数值 $f(x)$ 的变化趋势.

在几何上，ε-δ 定义的意义是：当动点 x 进入以 x_0 为中心线、$x_0 - \delta$ 和 $x_0 + \delta$ 为边界的垂直带形域时，函数值 $f(x)$ 一定落在以 $y = A$ 为中心线、$A + \varepsilon$ 和 $A - \varepsilon$ 为边界的水平带形域内.

2. 在使用函数极限性质的时候要注意什么？

答　在函数极限问题中，x 的趋向可以是 $x_0, x_0^+, x_0^-, -\infty, +\infty$，函数的极限可以是有限数 $A, \infty, +\infty, -\infty$. 因此，讨论函数极限问题时，首先要注意必须在同一趋向下；其次，关于函数极限的性质，如局部保号性与迫敛性，只在极限为 $A, +\infty, -\infty$ 时才成立. 当 ∞ 未定号时，因无法与任意有限数比较而得不出结果.

在复合函数求极限时，由于内外层函数的不同情形的组合很多，做证明题时一定要全面进行考虑.

方法、技巧与典型例题分析

求函数的极限有很多种方法，其中许多与求数列极限的方法和技巧相同，读者可参阅第一章第四节.

一、用极限定义证明极限

用极限定义证明极限，在 $x \to x_0$ 时，$\forall\ \varepsilon > 0$，要找出对应的 δ；在 $x \to \infty$ 时，要找出对应的 M. 一般的方法是：将 $|f(x) - A|$ 经

变形、放大，得到 $|x-x_0|<\delta$ 或 $|x|>M$. 在变形时大多是改变 $f(x)$ 的形式，但有时也可以改变 A 的形式来实现.

例 1 证明：若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且 $f(x)>0(A\geqslant 0)$，则

$$\lim_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{A}.$$

证 分两种情形.

当 $A=0$ 时，若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，取 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，对任意满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 的 x，有 $|f(x)|<\varepsilon$，即 $\sqrt{f(x)}<\sqrt{\varepsilon}$. 故

$$\lim_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=0.$$

当 $A>0$ 时，若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，即 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，对任意满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 的 x，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，即

$$\begin{aligned}|\sqrt{f(x)}-\sqrt{A}|&=\frac{|f(x)-A|}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{A}}\\&\leqslant\frac{1}{\sqrt{A}}|f(x)-A|<\frac{1}{\sqrt{A}}\varepsilon.\end{aligned}$$

故
$$\lim_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{A}.$$

有时，在将 $|f(x)-A|$ 变形时，不仅得到 $x-x_0$ 因式，而且还得到含 x 的其它因式. 这时，我们要利用 $x\to x_0$ 这一条件，限定 x 的取值范围，得出 $|x-x_0|<\delta$，如例 2、例 3.

例 2 证明：$\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{\dfrac{7}{16x^2-9}}=1$.

证 因为

$$\begin{aligned}&\left|\sqrt{\frac{7}{16x^2-9}}-1\right|=\left|\frac{7/(16x^2-9)-1}{\sqrt{7/(16x^2-9)}+1}\right|\\&\leqslant\left|\frac{7}{16x^2-9}-1\right|=\frac{16|1+x||1-x|}{|(4x+3)(4x-3)|},\end{aligned}$$

设 $|x-1|<1$，即 $0<x<2$，则上式右边不大于 $\dfrac{16\cdot 3|1-x|}{3\cdot 4|x-3/4|}$.

再设 $|x-1|<\frac{1}{8}$，即 $1-\frac{1}{8}<x<1+\frac{1}{8}$，于是上式右边不大于 $32|1-x|$.

故 $\forall\ \varepsilon>0$，取 $\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{32},\frac{1}{8}\right\}$，则当 $|x-1|<\delta$ 时，有 $\left|\sqrt{\frac{7}{16x^2-9}}-1\right|<\varepsilon$，即

$$\lim_{x\to1}\sqrt{\frac{7}{16x^2-9}}=1.$$

例 3 按定义验证 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2x^2+1}{x^2-3}=2$.

证 因为 $\forall\ \varepsilon>0$，要找到 $M>0$，使 $|x|>M$ 时，有

$$\left|\frac{2x^2-1}{x^2-3}-2\right|=\frac{7}{|x^2-3|}<\varepsilon.$$

而当 $|x|>3$ 时，$|x^2-3|>|x|$，故要

$$\frac{7}{|x^2-3|}<\frac{7}{|x|}<\varepsilon.$$

只需 $|x|>\frac{7}{\varepsilon}$. 故 $\forall\ \varepsilon>0$，取 $M=\max\left\{3,\frac{7}{\varepsilon}\right\}$，当 $|x|>M$ 时，有

$$\left|\frac{2x^2-1}{x^2-2}-2\right|<\varepsilon.$$

于是
$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{x^2-3}=2.$$

二、用恒等变形求极限

例 4 求 $\lim\limits_{x\to-1}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^3+1}\right)$.

解
$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{x\to-1}\frac{x^2-x+1-3}{x^3+1}\\&=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x^2+x+1)}\\&=\lim_{x\to-1}\frac{x-2}{x^2-x+1}=-1.\end{aligned}$$

例 5　求 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{3/2}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x})$.

解　先有理化，再进行恒等变形.

$$原式=\lim_{x\to+\infty} x^{3/2}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty} x^{3/2}\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^{3/2}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1\right)\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}$$

$$=-\frac{1}{4}.$$

例 6　求 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}$.

解　$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}$　（分子二项式展开）

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}[x^n+nx^{n-1}\Delta x+\cdots+\Delta x^n-x^n]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[nx^{n-1}+\frac{n}{2}(n-1)x^{n-2}\Delta x+\cdots+\Delta x^{n-1}\right]$$

$$=nx^{n-1}.$$

例 7　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$.

解

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[n]{1+x}-1)(\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+x)^{n-2}}+\cdots+1)}{x(\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+x)^{n-2}}+\cdots+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}1\Big/[\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+x)^{n-2}}+\cdots+1]=1/n.$$

三、用变量代换求极限

例 8　求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt[3]{x^3+x^2})$.

解 令 $x=\frac{1}{t}$，则 $t=\frac{1}{x}\to 0^+$.

$$\text{原式}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sqrt{1+t}-\sqrt[3]{1+t}}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{(\sqrt{1+t}-1)-(\sqrt[3]{1+t}-1)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{t}{t(\sqrt{1+t}+1)}$$

$$-\lim_{t\to 0^+}\frac{t}{t(\sqrt[3]{(1+t)^2}+\sqrt[3]{(1+t)}+1)}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

例 9 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}\ (\alpha>0)$；　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{1/x}$.

解 (1) 令 $x=e^t, a=e^\alpha$，则 $a>1$，得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^{\alpha t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{a^t}\quad(\text{第一章第四节例 4})$$
$$=0.$$

(2) 由题(1)知，当 $\alpha=1$ 时，有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$，于是

$$\lim_{x\to+\infty}x^{1/x}=\lim_{x\to+\infty}e^{\ln x/x}=e^0=1.$$

例 10 求 $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi}{2}x$.

解法 1 令 $t=\frac{\pi}{2}(1-x)$，则 $\frac{\pi}{2}x=\frac{\pi}{2}-t$，于是

$$\text{原式}=\lim_{t\to 0}\frac{2}{\pi}t\cdot\tan\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\lim_{t\to 0}\frac{2t}{\pi}\cdot\cot t$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2}{\pi}\cdot\frac{t}{\tan t}=\frac{2}{\pi}.$$

解法 2 令 $x-1=t$，则 $\frac{\pi}{2}x=\frac{\pi}{2}(1+t)$，于是

$$\text{原式}=\lim_{t\to 0}(-t)\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}t\right)=\lim_{t\to 0}t\cdot\cot\frac{\pi t}{2}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t \cdot \pi/2}{\tan\pi(t/2)} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

这里用到了下一节的重要结论$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$和$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x} = 1$.

例 11 利用变量代换求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1}{x}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^\alpha - e^\beta}{\alpha - \beta}$.

解 (1) 令 $\arcsin x = t$，则 $x = \sin t$，于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t} = 1.$$

(2) 令 $\arctan x = t$，则 $x = \tan x$，于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\tan t} = 1.$$

(3) 令 $e^x - 1 = t$，则 $x = \ln(1+t)$，于是

$$\lim_{t\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)} = \lim_{t\to 0} 1\Big/\ln(1+t)^{1/t} = 1.$$

(4) 令 $\alpha - \beta = t$，则

$$\lim_{\alpha\to\beta}\frac{e^\alpha - e^\beta}{\alpha - \beta} = \lim_{t\to 0}\frac{e^\beta(e^t - 1)}{t}\text{（利用题(3)的结果）}$$
$$= e^\beta.$$

这里用到了下一节的另一重要结论$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$.

四、用迫敛性求极限

例 12 求$\lim\limits_{x\to 0} x\left[\dfrac{1}{x}\right]$.

解 因为$\dfrac{1}{x} - 1 < \left[\dfrac{1}{x}\right] \leqslant \dfrac{1}{x}$ $(x \neq 0)$，所以

当 $x > 0$ 时，$1 - x < x\left[\dfrac{1}{x}\right] \leqslant 1$；

当 $x < 0$ 时，$1 - x > x\left[\dfrac{1}{x}\right] \geqslant 1$.

于是
$$\lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1.$$

五、其它方法

例 13 设$\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=a>0$, $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=b$,证明:

$$\lim_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}=a^b.$$

证 引入函数 $\varphi(x)=v(x)\ln u(x)$,因为

$$\lim_{x\to x_0}\ln u(x)=\ln a\Rightarrow \lim_{x\to x_0}\varphi(x)=b\ln a,$$

故

$$\lim_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}=\lim_{x\to x_0}e^{\varphi(x)}=e^{b\ln a}=a^b.$$

这个例子给出了求幂指函数极限的公式.

例 14 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\tan x}$.

解 对函数变形可得

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}}\right]^{\tan x/\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{(\sqrt{x})^{\sqrt{x}}}\right]^{x/\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{(\sqrt{x})^{\sqrt{x}}}\right]^{\sqrt{x}},$$

而$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{(\sqrt{x})^{\sqrt{x}}}=1$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$,所以

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\tan x}=1^0=1.$$

例 15 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\frac{a^x-1}{a-1}\right)^{1/x}$, $a>0, a\neq 1$.

解 令 $f(x)=\left(\frac{1}{x}\frac{a^x-1}{a-1}\right)^{1/x}$,则对 $a>1, x>0$,有

$$\ln f(x)=-\frac{\ln x}{x}-\frac{\ln(a-1)}{x}+\frac{\ln(a^x-1)}{x}.$$

因为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(a-1)}{x}=0,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(a^x-1)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln(1-a^{-x})}{x}+\ln a\right)=\ln a,$$

所以

$$\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{1}{x}\frac{a^x-1}{a-1}\right)^{1/x}=\ln a.$$

当 $0<a<1, x>0$ 时，有

$$\ln f(x)=-\frac{\ln x}{x}-\frac{\ln(1-a)}{x}+\frac{\ln(1-a^x)}{x},$$

而 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0,\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1-a)}{x}=0,\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1-a^x)}{x}=0.$

所以 $$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{1}{x}\frac{a^x-1}{a-1}\right)^{1/x}=0.$$

综上所述，得

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\ln f(x)}=\begin{cases}a, & a>1,\\ 1, & 0<a<1.\end{cases}$$

例 16 讨论极限：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0},\ a_n\neq0,\ b_m\neq0.$$

解 利用第一章第四节例 8 结论可得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{b_n}, & m=n,\\ 0, & n<m,\\ \infty, & n>m.\end{cases}$$

本例的结果对 m,n 不是整数的情形也适用.

例 17 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{1+x}}}{\sqrt{x}}$.

解 $x\to+\infty$，分子各项中最高项次数为$\frac{1}{2}$，由系数比，得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{1+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}}=1.$$

例18 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x-\sqrt{x^2-1})^n+(x+\sqrt{x^2-1})^n}{x^n}$ $(n\in\mathrm{N})$.

解 $x\to\infty$. 分子最高项次数为 n，第一项的系数和为零，第二项系数和为 2^n；分母最高项次数为 n，系数为 1. 所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x-\sqrt{x^2-1})^n+(x+\sqrt{x^2-1})^n}{x^n}=\frac{2^n}{1}=2^n.$$

例 19 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{3/2}(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$.

解 先有理化，再比较最高项次数与系数.

$$原式=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{3/2}(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+2}+2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+2}+2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^{3/2}(\sqrt{x^2+2x}-x-1)(\sqrt{x^2+2x}+x+1)}{(\sqrt{x+2}+2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x^2+2x}+x+1)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^{3/2}}{(\sqrt{x+2}+2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x^2+2x}+x+1)}.$$

至此可以看出，分子 x 的次数是 3/2，系数是 -2，而分母 x 的次数最高也是 3/2，系数是 $4\times2=8$. 故

$$\lim_{x\to+\infty}x^{3/2}(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x}+1+\sqrt{x})=-\frac{2}{8}=-\frac{1}{4}.$$

例 20 求 $\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{2+e^{1/x}}{1+e^{4/x}}+\frac{\sin x}{|x|}\right]$.

解 用左、右极限求解. 因为

$$\lim_{x\to0^+}\left[\frac{2+e^{1/x}}{1+e^{4/x}}+\frac{\sin x}{|x|}\right]=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{2e^{-4/x}+e^{-3/x}}{e^{-4/x}+1}+\frac{\sin x}{x}\right]=1,$$

$$\lim_{x\to0^-}\left[\frac{2+e^{1/x}}{1+e^{4/x}}+\frac{\sin x}{|x|}\right]=\lim_{x\to0}\left[\frac{2+e^{1/x}}{1+e^{4/x}}-\frac{\sin x}{x}\right]=2-1=1,$$

所以
$$\lim_{x\to0}\left[\frac{2+e^{1/x}}{1+e^{4/x}}+\frac{\sin x}{|x|}\right]=1.$$

例 21 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{1-\cos ax}}\ (0<|a|<\pi)$.

解 用左、右极限求解. 当 $a>0$ 时，有

$$\lim_{x\to0^-}\frac{x}{\sqrt{1-\cos ax}}=\lim_{x\to0^-}\frac{x}{\sqrt{2\sin^2(ax/2)}}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{-x}{\sqrt{2}\sin(ax/2)}=-\frac{\sqrt{2}}{a},$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sqrt{1-\cos ax}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sqrt{2}\sin(ax/2)}=\frac{\sqrt{2}}{a};$$

当 $a<0$ 时，有

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{\sqrt{1-\cos ax}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{\sqrt{2}\sin(ax/2)}=\frac{\sqrt{2}}{a},$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sqrt{1-\cos ax}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x}{\sqrt{2}\sin(ax/2)}=-\frac{\sqrt{2}}{a}.$$

所以，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1-\cos ax}}$ 不存在.

例 22 求 $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{2a}{3}+\dfrac{a}{\pi}\arctan\dfrac{1}{x-a}\right)$.

解 $a\neq 0$ 时，讨论左、右极限. 因为

$$\lim_{x\to a^+}\left(\frac{2a}{3}+\frac{a}{\pi}\arctan\frac{1}{x-a}\right)=\frac{2a}{3}+\frac{a}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{7a}{6},$$

$$\lim_{x\to a^-}\left(\frac{2a}{3}+\frac{a}{\pi}\arctan\frac{1}{x-a}\right)=\frac{2a}{3}+\frac{a}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{a}{6},$$

左、右极限存在，但不相等，所以

$$\lim\frac{2a}{3}+\frac{a}{\pi}\arctan\frac{1}{x-a}\quad(a\neq 0)$$

不存在.

$a=0$ 时，显然有 $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{2a}{3}+\dfrac{a}{\pi}\arctan\dfrac{1}{x-a}\right)=0$.

例 23 若 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}\right)=0$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^3}$.

解
$$\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=\frac{\sin 6x-6x+6x+xf(x)}{x^3}$$
$$=\frac{\sin 6x-6x}{x^3}+\frac{6x+xf(x)}{x^3}.$$

当 $x\to 0$ 时，$6x-\sin 6x\sim(6x)^3/6$. 因而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=-\lim_{x\to 0}\frac{6x-\sin 6x}{x^3}+\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{(6x)^3}{6x^3}+\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2},$$

所以 $$\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{36x^3}{x^3}=36.$$

例 24 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4\arctan x-\pi}{x-1}$.

解 作变量代换 $t=x-1$，则 $x=t+1$，再利用等式

$$\arctan x-\arctan y=\arctan\frac{x-y}{1+xy}\quad(xy>-1),$$

则 $$\begin{aligned}原式&=4\lim_{t\to 0}\frac{\arctan(t+1)-\arctan 1}{t}\\&=4\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\arctan\frac{(1+t)-1}{1+(1+t)\cdot 1}\right]\\&=4\lim\frac{1}{t}\arctan\left(\frac{t}{2+t}\right)\\&=4\lim_{t\to 0}\left(\frac{t}{2+t}\cdot\frac{1}{t}\right)=\frac{4}{2}=2.\end{aligned}$$

最后一个等式利用了等价无穷小的代换.

第三节 两个重要极限 无穷小量与无穷大量

主要内容

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$，$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=\mathrm{e}$.

2. 若函数 $f(x)$ 的极限等于零，则称这个函数为无穷小量，简称无穷小，用记号“o”表示.

函数 f 在 $x\to x_0$ 时极限为 A 的充要条件是 $f(x)-A$ 在 $x\to x_0$ 时为无穷小量.

3. 无穷小量有如下运算性质：

(1) 有限个无穷小量之和是无穷小量.

(2) 有界函数与无穷小量的乘积是无穷小量.

(3) 常数与无穷小量的乘积是无穷小量.

(4) 有限个无穷小量的乘积是无穷小量.

4. 无穷小量阶的比较

设在 x 的同一趋向下,f,g 均为无穷小量,则:

若 $\lim \frac{f}{g} = 0$,称 f 为比 g 高阶的无穷小量.

若 $\lim \frac{f}{g} = \infty$,称 f 为比 g 低阶的无穷小量.

若 $\lim \frac{f}{g} = c \neq 0$,称 f 与 g 是同阶无穷小量.

若 $\lim \frac{f}{g} = 1$,称 f 与 g 是等价无穷小量,记作 $f \sim g$.

常用的等价无穷小量有:

当 $x \to 0$ 时,$x \sim \sin x \sim \tan x \sim e^x - 1 \sim \ln(1+x) \sim \arcsin x \sim \arctan x$, $\sqrt[n]{1+x} \sim 1 + \frac{x}{n}$, $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$.

5. 若函数 $f(x)$ 以 ∞(或 $-\infty$, $+\infty$)为极限,则称 f 为无穷大量,用记号"O"表示.

6. 若函数 $f(x)$ 在 x 的某一趋向下为无穷小量,则 $\frac{1}{f(x)}$ 在 x 的同一趋向下为无穷大量($f \neq 0$).

7. 无穷大量阶的比较类同于无穷小量阶的比较.

疑 难 解 析

1. 怎样理解无穷小量和无穷小量的阶?

答　无穷小量是一个变量,它在 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$)的过程中可以变得小于事先给定的任意小正数.无穷小量是在 x 的某一趋向下实现的,因而不是普遍意义的.

在 x 的同一趋向下的几个无穷小量收敛于零的速度有快慢之分，无穷小量的阶就是对它们的收敛速度作出的判断. 但是，并不是任何两个无穷小量都可以进行比较的. 如 $x \to 0$ 时，$x\sin\frac{1}{x}$ 是无穷小量，但它没有阶. 事实上，若其阶为 α，则 $\alpha \leqslant 1$. 当 $\alpha < 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}\Big/x^{\alpha} = 0$；当 $\alpha = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}\Big/x$ 不存在，都与无穷小量阶的定义相矛盾.

2. 怎样理解无穷大量和无穷大量的阶？

答　请读者参照疑难解析 1 自己作出回答.

需要注意的是：无穷大量一定是无界函数，但无界函数不一定是无穷大量. 如函数 $f(x) = x\sin x$ 在 $x \to +\infty$ 时是无界函数，因为对任何 $M > 0$，取 $x = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$，总能使

$$f(x) = \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)\sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 2n\pi + \frac{\pi}{2} > M.$$

但当 $x \to +\infty$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \neq \infty$，因为若取数列 $x_n = 2n\pi\ (n = 1,2,\cdots)$，有 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = 0$.

3. 在具体计算中，使用等价量代换要注意什么问题？

答　在计算中出现无穷小量(或无穷大量)的相互叠加(如函数的代数和)时，不能直接进行等价量代换. 应将它们分离(如代数和化为乘积)后才能进行代换，如

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim\frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x \cdot x^3}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x \cdot x^2/2}{\cos x \cdot x^3} = \frac{1}{2}.$$

如果直接进行代换，将得到错误的结果.

方法、技巧与典型例题分析

两个重要极限的利用与等价无穷小(大)代换是极限计算的

重要方法.利用两个重要极限的技巧在于掌握它们的形式特点.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 的形式特点是,在 x 的趋向下,分式的分母是无穷小量,分子是同一无穷小量的正弦函数.这里 x 趋向于什么不是重要的,重要的是分母是无穷小量,分子是同一无穷小量的正弦函数.因而 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin(x-a)}{x-a}=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin(1/x)}{1/x}=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=\mathrm{e}$ 的形式特点是,幂指函数的底数是1与一个无穷小量的和,指数是同一无穷小量的倒数.同样,x 趋向于什么不是重要的.因而

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\csc x}=\mathrm{e},$$

$$\lim_{x\to+\infty}(1-2/x)^{2x}=\lim_{x\to+\infty}(1-2/x)^{\frac{x}{2}\cdot 4}=\mathrm{e}^{-4}.$$

因此,如何将函数变形为重要极限的形式,成为我们解题的关键.无穷小量代换应注意的问题已在疑难解析3中指出,不再重复.

一、两个重要极限

例1 利用重要极限求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}x\cot 2x$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}2^x\sin\dfrac{\pi}{2^x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x}\cdot\sin(1/x)}{\sqrt{x}-1}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{x^2-4}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$;

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2ax-\sin ax}{3bx+\sin bx}$.

解 将函数变形为重要极限形式后,再利用重要极限求出.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}x\cot 2x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sin 2x}\dfrac{\cos 2x}{2}=\dfrac{1}{2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}2^x\sin\dfrac{\pi}{2^x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\pi/2^x)}{\pi/2^x}\cdot\pi=\pi\cdot 1=\pi$.

(3)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x}\sin(1/x)}{\sqrt{x}-1}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin(1/x)}{1/x}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\\&=1\cdot 1=1.\end{aligned}$$

(4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{x-2}\cdot\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{4}$.

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2(x/2)}{(x/2)^2\cdot 4}=1^2\cdot\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$.

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2ax-\sin ax}{3bx+\sin bx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-(\sin ax)/ax}{3+(\sin bx)/bx}\cdot\dfrac{ax}{bx}$

$$=\frac{2-1}{3+1}\cdot\frac{a}{b}=\frac{a}{4b}.$$

例 2　利用重要极限求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to n\pi}\dfrac{\sin x}{x-n\pi}$ $(n\in\mathbf{N}^+)$;

(3) $\lim\limits_{x\to a}\sin\dfrac{x-a}{2}\tan\dfrac{\pi x}{2a}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(1-\cos\dfrac{\pi}{x}\right)$.

解　此例的变形要比例 1 复杂，因此要谨防出错.

(1) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\sin x\cos x}{\cos x\cdot x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{2\sin^2(x/2)}{(x/2)^2}\cdot\frac{1}{4\cos x}$$

$$=1\cdot 2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

(2) 令 $t=x-n\pi$，则 $x=n\pi+t$，于是

$$原式=\lim_{t\to 0}\frac{(-1)^n\sin t}{t}=(-1)^n.$$

(3) 令 $t=x-a$，则 $x=a+t$，于是

$$原式=\lim_{t\to 0}\sin\frac{t}{2}\cdot\tan\frac{\pi(a+t)}{2a}$$

$$=\lim_{t\to 0}\sin\frac{t}{2}\cdot\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi t}{2a}\right)=\lim_{t\to 0}\sin\frac{t}{2}\left(-\cot\frac{\pi t}{2a}\right)$$

$$=-\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t/2)}{t/2}\cdot\frac{\pi t/(2a)}{\tan[(\pi t/2a)]}\cdot\frac{a}{\pi}=-\frac{a}{\pi}.$$

(4) 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2[1-\cos(\pi/x)][1+\cos(\pi/x)]}{1+\cos(\pi/x)}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\sin^2(\pi/x)}{1+\cos(\pi/x)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin^2(\pi/x)}{(\pi/x)^2}\cdot\pi^2\cdot\frac{1}{1+\cos(\pi/x)}$$
$$= 1^2\cdot\pi^2\cdot 1/2 = \pi^2/2.$$

例 3 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{x\sin x}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+x\sin x}-1)+(1-\cos x)}{x\sin x}$.

其中

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x\sin x}\xlongequal{\text{有理化}}\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{x\sin x(\sqrt{1+x\sin x}+1)}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(x/2)}{(x/2)\cdot 2\sin(x/2)\cos(x/2)\cdot 2}=\frac{1}{2}.$$

所以 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{x\sin x}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

例 4 设 $f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx$，其中 a_1，$a_2,\cdots,a_n$ 是常数，且 $\forall\, x\in\mathbf{R}$，有 $|f(x)|\leqslant|\sin x|$，证明：

$$|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\leqslant 1.$$

证 利用极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. 用 $|x|\neq 0$ 除 $|f(x)|\leqslant|\sin x|$，将 $f(x)$ 用等式代入，得

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right|=\left|a_1\frac{\sin x}{x}+2a_2\frac{\sin 2x}{2x}+\cdots+na_n\frac{\sin nx}{nx}\right|$$
$$\leqslant\left|\frac{\sin x}{x}\right|\leqslant 1$$

或 $$-1\leqslant a_1\frac{\sin x}{x}+2a_2\frac{\sin 2x}{2x}+\cdots+na_n\frac{\sin nx}{nx}\leqslant 1.$$

上述不等式对任何 $x\neq 0$ 都成立. 当 $x\to 0$ 时，有

$$-1\leqslant a_1+2a_2+\cdots+na_n\leqslant 1,$$

所以 $$|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\leqslant 1.$$

例 5 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos a_1x\cdots\cos a_nx}{x^2}$.

解 先利用 $x_0 + \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = x_n$ 将分子变形，然后利用 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ 即可求得.

$$\text{原式} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}[(1-\cos a_1x) + (\cos a_1x - \cos a_1x\cos a_2x) + \cdots$$
$$+ (\cos a_1x\cdots\cos a_{n-1}x - \cos a_1x\cdots\cos a_nx)]$$
$$= \lim_{x\to 0}\sum_{i=1}^{n}\cos a_1x\cdots\cos a_{i-1}x\cdot\frac{1-\cos a_ix}{x^2}\ (\text{令} \cos a_0x = 1)$$
$$= \lim_{x\to 0}\sum_{i=1}^{n}\cos a_1x\cdots\cos a_{i-1}x\frac{\sin^2(a_ix/2)}{(a_ix/2)^2}\cdot\frac{a_i^2}{2}$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{2} = \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2).$$

例 6 求 $\lim_{x\to 0}\frac{\tan(a+x)\tan(a-x) - \tan^2 a}{x^2}$.

解 先变形，再利用重要极限求解.

$$\text{原式} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\tan a + \tan x}{1 - \tan a\tan x}\cdot\frac{\tan a - \tan x}{1 + \tan a\tan y} - \tan^2 a\right)$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\tan^2 a - \tan^2 x}{1 - \tan^2 a\tan^2 x} - \tan^2 a\right)$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{x^2}\cdot\left(\frac{\tan^4 a - 1}{1 - \tan^2 a\tan^2 x}\right) = \tan^4 a - 1.$$

例 7 利用重要极限求下列极限：

(1) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x}$；　　(2) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{2x}$；

(3) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2+1}$；　　(4) $\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{1-2x}$.

解 仍然是从 $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$ 的形式性入手.

(1) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}\cdot\frac{3x}{x/2}} = e^6$.

(2) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{2x} = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{-\frac{x}{3}\cdot\frac{2x}{-x/3}} = e^{-6}$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2\cdot(x^2+1)/x^2}=\mathrm{e}.$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}=\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{1/x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{-1/2x\cdot -2}=\mathrm{e}^{-2}.$

例 8 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\cos x^{1/(1-\cos x)}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{1/(x-a)}$ $(a\neq k\pi)$.

解 先变形为$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$形式.

(1) 原式 $=\lim\limits_{x\to\pi/4}\{[1+(\tan x-1)]^{1/(\tan x-1)}\}^{\tan 2x\cdot(\tan x-1)}$,

而 $\tan 2x\cdot(\tan x-1)=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}(\tan x-1)$

$=-\frac{2\tan x}{1+\tan x}\xrightarrow{x\to\pi/4}-1.$

所以 原式 $=\mathrm{e}^{-1}$.

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}[1+(\cos x-1)]^{1/(\cos x-1)\cdot(-1)}=\mathrm{e}^{-1}$.

(3) 原式$=\lim\limits_{x\to 0^+}[1+(\cos\sqrt{x}-1)]^{1/(\cos\sqrt{x}-1)\cdot(\cos\sqrt{x}-1)/x}$

$=\mathrm{e}^{-1/2}$.

(4) 原式 $=\lim\limits_{x\to a}\left(1+\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}\right)^{\sin a/(\sin x-\sin a)\cdot(\sin x-\sin a)/[(x-a)\sin a]}$.

而 $\frac{\sin x-\sin a}{(x-a)\sin a}=\frac{2\cos(x+a)/2\cdot\sin(x-a)/2}{(x-a)\sin a}\xrightarrow{x\to a}\cot a$,

所以 原式 $=\mathrm{e}^{\cot a}$.

此类题可以转化为下述命题来解.

若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是定义在$(-\infty,+\infty)$上的两个函数，且 $\lim f(x)=0$，$\lim g(x)=\infty$，$\lim[f(x)g(x)]=a$（a 为有限数或 $\pm\infty$），则

$$\lim[1+f(x)]^{g(x)}=\mathrm{e}^{\lim[f(x)g(x)]}=\mathrm{e}^{a}.$$

例 9 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[x]{a}+\sqrt[x]{b}}{2}\right)^{x}(a>0,b>0)$.

解 化为重要极限形式.

$$\text{原式}=\lim_{x\to\infty}\left[1+\left(\frac{\sqrt[x]{a}-\sqrt[x]{b}}{2}-1\right)\right]^{\left(\frac{1}{\frac{\sqrt[x]{a}+\sqrt[x]{b}}{2}-1}\right)\left(\frac{\sqrt[x]{a}+\sqrt[x]{b}}{2}-1\right)x}.$$

而 $$\left(\frac{\sqrt[x]{a}+\sqrt[x]{b}}{2}-1\right)x=\frac{1}{2}\left[\left(\sqrt[x]{a}-1\right)+\left(\sqrt[x]{b}-1\right)\right]x,$$

其中 $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[x]{a}-1\right)x\overset{x=1/t}{=\!=\!=}\lim_{t\to0}\frac{a^{t}-1}{t}$$

$$\overset{a^{t}-1=y}{=\!=\!=\!=}\lim_{y\to0}\frac{y}{\log a(1+y)}=\lim_{y\to0}\frac{1}{\log a(1+y)^{1/y}}=\ln a.$$

所以 $$\left(\frac{\sqrt[x]{a}+\sqrt[x]{b}}{2}-1\right)x=\frac{1}{2}(\ln a+\ln b),$$

故 $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt[x]{a}+\sqrt[x]{b}}{2}\right)^{x}=\mathrm{e}^{(\ln ab)/2}=\sqrt{ab}.$$

例 10 求$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a^{x}+b^{x}+c^{x}}{3}\right)^{1/x}$, $a>0,b>0,c>0$ 和

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{a_1^{x}+a_2^{x}+\cdots+a_n^{x}}{n}\right)^{1/x},\ a_i>0,i=1,2,\cdots.$$

解 利用例 9 的方法.

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{a^{x}+b^{x}+c^{x}}{3}\right)^{1/x}$$

$$=\lim_{x\to0}\left[1+\left(\frac{a^{x}+b^{x}+c^{x}}{3}-1\right)\right]^{\left(\frac{1}{\frac{a^{x}+b^{x}+c^{x}}{3}-1}\right)\left(\frac{a^{x}-1+b^{x}-1+c^{x}-1}{3x}\right)}$$

$$=\sqrt[3]{abc}.$$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{a_1^{x}+\cdots+a_n^{x}}{n}\right)^{1/x}$$

$$=\lim_{x\to0}\left[1+\left(\frac{a_1^{x}+\cdots+a_n^{x}}{n}-1\right)\right]^{\left(\frac{1}{\frac{a_1^{x}+\cdots+a_n^{x}}{n}-1}\right)\left(\frac{a_1^{x}-1+\cdots+a_n^{x}-1}{nx}\right)}$$

$$=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

例 11 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$.

解 将原式分解后凑成重要极限形式.

$$\text{原式}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+a)^{x+a}}{(x+a+b)^{x+a}}\cdot\frac{(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{x+b}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}1\Big/\left[\left(1+\frac{b}{x+a}\right)^{x+a}\cdot\left(1+\frac{a}{x+b}\right)^{x+b}\right]$$

$$=\frac{1}{e^a\cdot e^b}=e^{-(a+b)}.$$

例12 求$\lim\limits_{x\to+\infty}[(x+2)\ln(x+2)-2(x+1)\ln(x+1)+x\ln x]x$.

解 将原式进行拆、拼变形,化为重要极限形式.

$$\text{原式}=\lim_{x\to+\infty}[(x+1)\ln\frac{x+2}{(x+1)^2}+\ln(x+2)$$
$$+(x+1)\ln x-\ln x]x$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[(x+1)\ln\frac{(x+2)x}{(x+1)^2}+\ln\frac{x+2}{x}\right]x$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left\{\left[(x^2+x)\ln\left(1-\frac{1}{(x+1)^2}\right)\right]+\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)^x\right\}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\left\{\left[1-\frac{1}{(x+1)^2}\right]^{(x+1)^2}\left[1-\frac{1}{(x+1)^2}\right]^{-(x+1)^2\cdot\frac{1}{x+1}}\right\}$$

$$+\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x/2\cdot2}$$

$$=\ln e^{-1}+\ln e^2=-1+2=1.$$

二、无穷小量与无穷大量

例 13 证明下列关系式:

(1) $\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}\sim\dfrac{1}{4}x^3(x\to0)$;

(2) $\sqrt{x+\sqrt{1+\sqrt{x}}}\sim\sqrt{x}\ (x\to\infty)$.

解 按定义求极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3/4}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3(\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x})/4}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x(\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x})/4}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot x^2/2}{x^3/2} = 1.$$

(2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{1+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{1+\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+\sqrt{\dfrac{1}{x^3}}}} = 1.$

所以，题(1)、题(2) 所示关系式成立.

例 14 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别是关于 $x-a$ 的 p 级和 q 级无穷小，求 $f(x) \pm g(x)$，$f(x)g(x)$，$f(x)/g(x)$ 关于 $x-a$ 的无穷小的级.

解 设 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{(x-a)^p} = \alpha \neq 0$，$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x)}{(x-b)^q} = \beta \neq 0.$

(1) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) \pm g(x)}{(x-a)^t}$

$$= \lim \frac{f(x)}{(x-a)^p}(x-a)^{p-t} \pm \frac{g(x)}{(x-a)^q}(x-a)^{q-t}.$$

因为
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{(x-a)^p}(x-a)^{p-t} = \begin{cases} 0, & t < p, \\ \alpha, & t = p, \end{cases}$$

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{(x-a)^q}(x-a)^{q-t} = \begin{cases} 0, & t < q, \\ \beta, & t = q, \end{cases}$$

故
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) \pm g(x)}{(x-a)^t} = \begin{cases} \alpha \neq 0, & t = p = \min(p,q) < q, \\ \beta \neq 0, & t = q = \min(p,q) < p. \end{cases}$$

则 $f(x) \pm g(x)$ 是关于 $x-a$ 的 $t(t = \min(p,q))$ 阶无穷小.

当 $p = q$ 时，有

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) \pm g(x)}{(x-a)^p} = \alpha + \beta \neq 0 \ (\alpha + \beta \neq 0),$$

这时 $f(x) \pm g(x)$ 是关于 $x-a$ 的 $p(p = q)$ 阶无穷小.

(2) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)g(x)}{(x-a)^{p+q}} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{(x-a)^p} \cdot \dfrac{g(x)}{(x-a)^q} = \alpha\beta \neq 0,$

故 $f(x)g(x)$ 是关于 $(x-a)$ 的 $p+q$ 阶无穷小.

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)/g(x)}{(x-a)^{p-q}}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{(x-a)^{p}}\Big/\dfrac{g(x)}{(x-a)^{q}}=\dfrac{\alpha}{\beta}\neq 0$,

故 $f(x)/g(x)$ 是关于 $(x-a)$ 的 $p-q(p>q)$ 阶无穷小.

例 15 证明:当 $x\to a$ 时,有

(1) $o[f(x)]\cdot o[g(x)]=o[f(x)g(x)]$;

(2) $O[f(x)]\cdot O[g(x)]=O[f(x)g(x)]$;

(3) $o\{O[f(x)]\}=o[f(x)]$;

(4) $O\{o[f(x)]\}=o[f(x)]$.

其中 $o[f(x)]$ 表示是关于 $f(x)$ 的高阶无穷小,$O[f(x)]$ 表示是关于 $f(x)$ 的高阶无穷大.

证 (1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{o[f(x)]o[g(x)]}{f(x)g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{o[f(x)]}{f(x)}\cdot\dfrac{o[g(x)]}{g(x)}=0$,

故
$$o[f(x)]o[g(x)]=o[f(x)g(x)].$$

(2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{O[f(x)]O[g(x)]}{f(x)g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{O[f(x)]}{f(x)}\cdot\dfrac{O[g(x)]}{g(x)}=A\neq 0$,

故
$$O[f(x)]\cdot O[g(x)]=O[f(x)g(x)]$$

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{o\{O[f(x)]\}}{f(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{o\{O[f(x)]\}}{O[f(x)]}\cdot\dfrac{O[f(x)]}{f(x)}=0$,

故
$$o\{O[f(x)]\}=o[f(x)].$$

(4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{O\{o[f(x)]\}}{f(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{O\{o[f(x)]\}}{o[f(x)]}\cdot\dfrac{o[f(x)]}{f(x)}=0$,

故
$$O\{o[f(x)]\}=o[f(x)].$$

例 16 利用等价无穷小代换求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 2\pi}\dfrac{\sqrt[n]{1(x-2\pi)^2}-1}{1-\cos x}$; (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-e^{x/3}}{\ln(1+2x)}$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}x(\sqrt[3]{x^3+x}-\sqrt[3]{x^3-x})$; (4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\tan^4 x}{\sin^3 x(1-\cos x)}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{e^x-1}$; (6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x^2}{x\sin x^3}$.

解 (1) 因为 $\sqrt[n]{1+(x-2\pi)^2}\sim 1+\dfrac{1}{n}(x-2\pi)^2$, $1-\cos$

$= 1 - \cos(2\pi - x) \sim (2\pi - x)^2/2 = (x - 2\pi)^2/2$，所以

$$\lim_{x\to 2\pi}\frac{\sqrt{1+(x-2\pi)^2}-1}{1-\cos x} = \lim_{x\to 2\pi}\frac{(x-2\pi)^2/n}{(x-2\pi)^2/2} = \frac{2}{n}.$$

(2) 因为 $\sqrt{1+x} \sim 1+\dfrac{x}{2}$，$e^{x/3} \sim 1+\dfrac{x}{3}$，$\ln(1+2x) \sim 2x$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-e^{x/3}}{\ln(1+2x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1+x/2-1-x/3}{2x} = \frac{1}{12}.$$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty} x(\sqrt[3]{x^3+x} - \sqrt[3]{x^3-x})$

$$= \lim_{x\to\infty} x^2\left[\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}}-1\right) - \left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^2}}-1\right)\right].$$

因为 $\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x^2}} \sim 1+\dfrac{1}{3x^2}$，$\sqrt[3]{1-\dfrac{1}{x^2}} \sim 1-\dfrac{1}{3x^2}$，所以

$$\lim_{x\to\infty} x(\sqrt[3]{x^3+x} - \sqrt{x^3-x}) = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{3x^2} = \frac{2}{3}.$$

(4) 因为 $\tan^4 x \sim x^4$，$1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$，$\sin^3 x \sim x^3$，所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\tan^4 x}{\sin^3 x(1-\cos x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot x^4}{x^3\cdot x^2/2} = 2.$$

(5) 因为 $\sqrt{1+\tan x} \sim 1+\dfrac{x}{2}$，$\sqrt{1-\tan x} \sim 1-\dfrac{x}{2}$，$e^x - 1 \sim x$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{e^x-1} = \lim_{x\to 0}\frac{1+x/2-1+x/2}{x} = 1.$$

(6) 因为 $1-\cos x^2 \sim \dfrac{x^4}{2}$，$\sin x^3 \sim x^3$，所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos x^2}{x\sin x^3} = \lim\frac{x^4/2}{x\cdot x^3} = \frac{1}{2}.$$

例 17 利用等价无穷小求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x-(1-\cos\sqrt{x})}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\cot x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos(1/x)}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$；　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x}\right)$.

解　(1) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos x}{x(1-\cos\sqrt{x})(1+\sqrt{\cos x})}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2/2}{x\cdot(\sqrt{x})^2/2\cdot 1}=\frac{1}{2}.$$

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{\sin x}\dfrac{x-\sin x}{x\sin x}$.

因为 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x-\dfrac{1}{3!}x^3\Rightarrow x-\sin x\sim\dfrac{x^3}{3!}$，$\sin x\sim x$，所以

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{x^3/3!}{x^3}\cdot\cos x=\frac{1}{6}.$$

(3) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos(1/x)}{2\ln(1+x)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{3\sin x}{x}+x\cos\frac{1}{x}\right).$$

因为 $\lim\limits_{x\to 0}x\cos\dfrac{1}{x}$ 是无穷小与有界量的乘积，故

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\cos(1/x)}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=\frac{3}{2}+0=\frac{3}{2}.$$

(4) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^2\tan x}$.

因为 $x\to 0$ 时，$\tan x\sim x+\dfrac{x^3}{3}\Rightarrow\tan x-x\sim\dfrac{x^3}{3}$，$\tan x\sim x$，所以

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^3/2}{x^2\cdot x}=\frac{1}{3}.$$

例 18　已知 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+ax^2+b}{x-1}=5$，求 a,b 的值.

解　由极限与无穷小量的关系，得

$$\frac{x^3+ax^2+b}{x-1}=5+\alpha(x),$$

其中
$$\alpha(x)\xrightarrow{x\to 1}0.$$

故 $$\lim_{x\to 1} x^3 + ax^2 + b = \lim_{x\to 1}(x-1)(5+\alpha(x)) = 0.$$

又 $$\lim_{x\to 1} x^3 + ax^2 + b = 1 + a + b \Rightarrow 1 + a + b = 0,$$

于是

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+ax^2+b}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x^3+ax^2-(1+a)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x^3-1)+a(x^2-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1} x^2 + x + 1 + ax + a = 2a + 3 = 5.$$

所以 $$a = 1,\quad b = -1 - a = -2.$$

例 19 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{n}+\lambda\sin\frac{x}{n}\right)^n$, $x \neq 0$.

解 令 $\cos\frac{x}{n}+\lambda\sin\frac{x}{n} = 1+\frac{x_n}{n}$,则

$$x_n = n\left(\cos\frac{x}{n}+\lambda\sin\frac{x}{n}-1\right)$$

$$= \lambda x\frac{\sin(x/n)}{x/n} - x\frac{1-\cos(x/n)}{x/n}$$

$$= \lambda x\frac{x/n}{x/n} - x\frac{(x/n)^2/2}{x/n}.$$

所以 $$\lim_{n\to\infty} x_n = \lambda x.$$

又 $$\left(\cos\frac{x}{n}+\lambda\sin\frac{x}{n}\right)^n = \left[\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^{n/x_n}\right]^{x_n},$$

故 $$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{n}+\lambda\sin\frac{x}{n}\right)^n = e^{\lambda x}.$$

例 20 设当 $x\to 0$ 时,$(1+\alpha x^2)^{1/3}-1$ 与 $\cos x - 1$ 是等价无穷小,求常数 α.

解 因为当 $x\to 0$ 时,$1-\cos x \sim x^2/2$,$(1+\alpha x^2)^{1/3}-1 \sim \alpha x^2/3$,所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+\alpha x^2)^{1/3}}{\cos x - 1} = \lim_{x\to 0}\frac{\alpha x^2/3}{-x^2/2} = -2\alpha/3 = 1.$$

从而 $$\alpha = -3/2.$$

例 21 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sec x+\tan x)}{\sin x}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{\tan x-\sin x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to +\infty}x^2(a^{1/x}-a^{1/(x+1)})$;　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x(e^{\sin x}-1)^4}{\sin^2 x(1-\cos x)}$.

解 (1) 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\dfrac{1+\sin x}{\cos x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)-\ln\cos x}{\sin x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos^2 x}{\sin x}.$$

因为当$x\to 0$时,$\ln(1+\sin x)\sim\sin x\sim x$,$\ln\cos^2 x=\ln(1-\sin^2 x)\sim -\sin^2 x\sim -x^2$,所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sec x+\tan x)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}-\frac{1}{2}\lim\frac{-x^2}{x}=1-0=1.$$

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}e^{\sin x}\dfrac{e^{\tan x-\sin x}-1}{\tan x-\sin x}$.

因为当 $x\to 0$ 时,$e^{\tan x-\sin x}-1\sim\tan x-\sin x$,所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{\tan x-\sin x}=\lim_{x\to 0}e^{\sin x}\cdot\lim\frac{e^{\tan x-\sin x}}{\tan x-\sin x}=e^0\cdot 1=1.$$

(3) 原式$=\lim\limits_{x\to +\infty}a^{1/(x+1)}\dfrac{a^{1/x-1/(x+1)}-1}{(1/x)^2}$

$$=\lim a^{1/(x+1)}\frac{a^{1/x(x+1)}-1}{(1/x)^2}.$$

因为当$x\to +\infty$时,$\dfrac{1}{x^2}\sim\dfrac{1}{x(x+1)}$,$a^{1/x(x+1)}-1\sim\dfrac{1}{x(x+1)}\ln a\sim\dfrac{1}{x^2}\ln a$,所以

$$\lim_{x\to +\infty}x^2(a^{1/x}-a^{1/(x+1)})=\lim_{x\to +\infty}a^{1/(x+1)}\frac{(1/x^2)\ln a}{(1/x^2)}$$
$$=1\cdot\ln a=\ln a.$$

(4) 因为当$x\to 0$时,$e^{\sin x}-1\sim\sin x\sim x$,$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$,所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x(e^{\sin x}-1)^4}{\sin^2 x(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\cos x\frac{x^4}{x^2\cdot x^2/2}=2.$$

例 22 设$f,g:A\subseteq\mathbf{R}\to\mathbf{R}$是两个函数,且$\forall x\in A,f(x)>$

0,则称形如 $f(x)^{g(x)}$ 的函数为幂指函数. 若 $\lim f(x)=1,\lim g(x)=\infty$,则称极限 $\lim f(x)^{g(x)}$ 属于 1^∞ 型不等式,可以利用等式

$$f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$$

转化为 $0\cdot\infty$ 型未定式 $g(x)\ln f(x)$ 的极限问题.

(1) 设 $g_1(x)\sim g_2(x)$,证明:若 $\lim f(x)^{g_1(x)}$ 存在,则

$$\lim f(x)^{g_2(x)}=\lim f(x)^{g_1(x)}.$$

(2) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\ln x=\ln x_0$,证明:若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a>0,\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=b$,则

$$\lim_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=a^b.$$

(3) 求下列极限:

$1°\ \lim\limits_{x\to 0}(1-\sin x)^{1/x}$; $\qquad 2°\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$.

证 (1) 若 $\lim f(x)^{g_1(x)}$ 存在,则 $\lim e^{g_1(x)\ln f(x)}$ 存在,即 $\lim g_1(x)\ln f(x)$ 存在. 由等价无穷小代换得

$$\lim g_2(x)\ln f(x)=\lim g_1(x)\ln f(x),$$

所以
$$\lim e^{g_2(x)\ln f(x)}=\lim e^{g_1(x)\ln f(x)},$$

即
$$\lim f(x)^{g_2(x)}=\lim f(x)^{g_1(x)}.$$

(2) 令 $f(x)^{g(x)}=y$,则 $\ln y=g(x)\ln f(x)$,故有

$$\lim_{x\to x_0}\ln y=\lim_{x\to x_0}g(x)\ln f(x),$$

即
$$\ln(\lim_{x\to x_0}y)=\lim_{x\to x_0}g(x)\lim_{x\to x_0}\ln f(x),$$

从而
$$\ln(\lim_{x\to x_0}f(x)^{g(x)})=b\ln a\Rightarrow\lim_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=a^b.$$

(3) 1° 因为 $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin x)^{1/x}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\ln(1-\sin x)}$,而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-\sin x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{x}=-1,$$

故
$$\lim_{x\to 0}(1-\sin x)^{1/x}=e^{-1}.$$

2° 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{x^2\ln\cos\frac{1}{x}}$,而

$$\lim_{x\to\infty} x^2\ln\cos\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left[1+\left(\cos\frac{1}{x}-1\right)\right]}{1/x^2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cos\frac{1}{x}-1}{1/x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-(1/x^2)\cdot 1/2}{1/x^2}=-\frac{1}{2},$$

故
$$\lim_{x\to 0}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2}=\mathrm{e}^{-1/2}.$$

第四节　连续函数

主要内容

1. 函数 f 在点 x_0 连续的三个等价定义：

(1) 函数 f 在 $U(x_0)$ 有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

(2) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，其中 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

(3) $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时，总有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

2. 设函数 f 在 $U^+(x_0)$（或 $U^-(x_0)$）内有定义，且

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)\left(\text{或}\lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)\right),$$

则称函数 f 在点 x_0 右连续(或左连续).

函数 f 在点 x_0 连续的充要条件是：函数 f 在点 x_0 左、右连续.

3. 若函数 f 在点 x_0 不连续，则称 x_0 为 f 的间断点.

(1) 在 x_0 处 f 左、右极限都存在的间断点称为第一类间断点，包括

1° 可去间断点　　存在 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，但 f 在 x_0 无定义，或 $f(x_0)\neq A$.

2° 跳跃间断点　在 x_0 左、右极限存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$.

(2) 在 x_0 处 f 左、右极限至少有一个不存在的间断点称为第二类间断点.

4. 若函数 f 在区间 I 上每一点都连续，则称 f 为 I 上的连续函数.

5. 连续函数的局部性质

(1) 局部有界性　若函数 f 在 x_0 连续，则函数 f 在 x_0 的某邻域内有界.

(2) 局部保号性　若函数 f 在 x_0 连续，且 $f(x_0) \neq 0$，则 f 在 x_0 的某邻域内与 $f(x_0)$ 同号. 且 $\exists\ \gamma > 0$，使在 $U(x_0)$ 内，$|f(x)| > \gamma > 0$.

(3) 四则运算　若函数 f, g 在点 x_0 都连续，则 $f \pm g, f \cdot g, f/g\ (g(x_0) \neq 0)$ 在 x_0 仍连续.

(4) 复合性　若函数 f 在点 x_0 连续，g 在点 u_0 连续，且 $u_0 = f(x_0)$，则复合函数 $f \circ g$ 在 x_0 连续.

6. 有界性定理　若函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，则 f 在 $[a,b]$ 上有界.

7. 最值定理　若函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，则 f 在 $[a,b]$ 上取得最大值和最小值.

8. 介值性定理　若函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，$x_1, x_2 \in [a,b]$，且 $f(x_1) \neq f(x_2)$，则 f 可取到介于 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 之间的每一个值.

若函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，则在 (a,b) 内至少存在一点 x_0，使 $f(x_0) = 0$.

9. 反函数连续性定理　若函数 f 在 $[a,b]$ 上严格单调增加（或单调减少）且连续，则反函数 f^{-1} 在其相应定义域 $[f(a), f(b)]$（或 $[f(b), f(a)]$）上连续.

10. 设函数 f 定义在 I 上，$\forall\ \varepsilon > 0$，$\exists\ \delta > 0$，使对于一切 x', x''

$\in I$，只要 $|x'-x''|<\delta$，就有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$. 则称 f 在 I 上一致连续.

11. 一致连续性定理　若函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，则在 f 上一致连续.

疑难解析

1. 为什么要研究连续函数?

答　连续函数有许多优点：

(1) 有广泛的应用. 自然界和科学技术中的许多问题可以用连续函数来描述.

(2) 有优良的局部性质. 当我们研究一点 x_0 附近(某邻域内)函数性质时，连续函数的局部有界性与局部保号性会给研究以很大的便利.

(3) 便于计算函数的极限. 当函数连续时，极限记号与函数记号可以交换；即运算"f"与"lim"可以交换顺序，$\lim f(x)=f[\lim x]$. 尤其在复合函数情形时效果更为显著.

(4) 闭区间上连续函数具有优良的整体性质，如有界性、取最值性、介值性和一致连续性. 数学分析中很多问题的研究证明要应用这些性质来进行.

2. 在区间上函数 f 连续与一致连续有什么不同?

答　在区间上函数连续与一致连续有重大的差别. 从两者定义上可以看出：对于 f 连续来说，当 ε 给定时，对不同的 $x\in I$，相应的 δ 不仅与 ε 有关，还与 x 有关；而对于 f 一致连续情形，当 ε 给定时，相应的 δ 只与 ε 有关而与 x 无关.

连续函数在区间 I 上的一致连续性是函数在 I 上整体变化情况的一种衡量. 如果连续函数的图像在每个局部都比较平缓，即其陡势受到控制，函数可能是一致连续，所以可以通过图像对函数的一致连续性作一初步估计.

方法、技巧与典型例题分析

连续性和一致连续性概念是数学分析的主要理论基础，因此，利用连续性和一致连续性来证明命题，是检验对概念的理解程度好坏的方法. 一般都采用直接证明的方法进行，有时也采用反证法进行.

一、连续函数概念的命题

例 1 设函数 $f(x)$ 对一切 $x_1,x_2\in I$，满足等式 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$，且 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，证明：$f(x)$ 在任意 $x\in I$ 连续.

证 在等式 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$ 中令 $x_2=0$，则

$$f(x_1)=f(x_1)+f(0)\Rightarrow f(0)=0.$$

又由 $f(x)$ 在 $x=0$ 的连续性，有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(\Delta x)=f(0)=0$. 而由所给等式

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(x_0)+f(\Delta x)-f(x_0)=f(\Delta x),$$

取 $\Delta x\to 0$ 的极限，即得

$$\lim_{\Delta x\to 0}f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}f(\Delta x)=0,$$

所以，$f(x)$ 在任意点 $x_0\in I$ 连续.

例 2 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 连续，且 $f(x_0)>0$，证明：$\exists\ \delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，$f(x)>0$.

证 取 $\varepsilon=f(x_0)>0$，则由于 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 连续，$\exists\ \delta>0$，使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon=f(x_0)$. 从而

$$f(x)>f(x_0)-f(x_0)=0.$$

例 3 设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，证明：

(1) 若对任何有理数 $r\in[a,b]$，有 $f(r)=0$，则在 $[a,b]$ 上，$f(x)\equiv 0$.

(2) 若对任何有理数 $r_1,r_2\in[a,b]$，$r_1<r_2$，有 $f(r_1)<f(r_2)$，

则 f 在$[a,b]$上严格递增.

证 (1)对任何无理数$x_0\in[a,b]$,取有理点列$\{r_n\}\subset[a,b]$,使$r_n\to x_0(n\to+\infty)$,则

$$f(x_0)=\lim_{n\to+\infty}f(r_n)=0.$$

由 x_0 的任意性和 $f(r)=0$ 知,$f(x)\equiv 0$.

(2)对任意$x_1,x_2\in(a,b)$,$x_1<x_2$,取有理数$r_1,r_2\in(x_1,x_2)$,$r_1<r_2$,则由 f 的连续性知,对 $\varepsilon=\frac{1}{2}[f(r_2)-f(r_1)]>0$,$\exists\ \delta>0$(可设 $\delta=\min\{r_1-x_1,x_2-r_2\}$),使对于 $r_1'\in(x_1,x_1+\delta)$ 及 $r_2'\in(x_2-\delta,x_2)$,且 r_1',r_2' 为有理数,有

$$f(x_1)<f(r_1')+\varepsilon,\quad f(x_2)>f(r_2')-\varepsilon.$$

因为 $r_1'<r_1<r_2<r_2'$,故由 f 在有理点上的严格递增和上面给出的不等式,有

$$f(x_1)<f(r_1')+\varepsilon<f(r_1)+\varepsilon=f(r_2)-\varepsilon<f(r_2')-\varepsilon<f(x_2),$$

由 $x_1<x_2$ 和 x_1,x_2 的任意性知,f 在$[a,b]$上严格递增.

例 4 证明:若函数 f 和 g 是连续的,则函数 $\varphi=\min\{f,g\}$ 和 $\psi=\max\{f,g\}$ 也是连续的.

证 (1)$\forall\ x_0\in I$,若 $f(x_0)\neq g(x_0)$,不妨设 $f(x_0)>g(x_0)$,由 f 和 g 的连续性得

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=f(x_0)-g(x_0)>0,$$

即 $\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ \delta>0$ 当 $|x-x_0|<\delta$ 时,总有

$$f(x)-g(x)>0,\quad 即\quad f(x)>g(x).$$

所以,当 $|x-x_0|<\delta$ 时,有

$$\varphi(x)=\min\{f(x),g(x)\}=g(x)$$

和
$$|\varphi(x)-\varphi(x_0)|=|g(x)-g(x_0)|<\varepsilon,$$

即
$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_0).$$

所以,当 $f(x_0)\neq g(x_0)$ 时,$\varphi(x)$ 在 x_0 连续.

若 $f(x_0)=g(x_0)$,则 $\varphi(x_0)=f(x_0)=g(x_0)$,由 f 和 g 的连

续性知，$\forall\ \varepsilon > 0$，$\exists\ \delta > 0$，当 $|x - x_0| < \delta$ 时，

$$|f(x) - \varphi(x_0)| = |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

与
$$|g(x) - \varphi(x_0)| = |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$$

同时成立，于是 $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$ 成立. 所以 $f(x_0) = g(x_0)$ 时，$\varphi(x)$ 在 x_0 也连续.

由 x_0 的任意性知，$\varphi = \min\{f, g\}$ 是连续函数.

(2) 类似可证. 请读者一试.

例 5 区间 (a,b) 内单调函数的不连续点必为第一类间断点.

证 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调增加(单调减少可类似证明). 任取 $x_0 \in (a,b)$，则集合 $\{f(x) | x \in (a, x_0)\}$ 有上界，且为上确界，记为 $\alpha = \sup\{f(x) | x \in (a, x_0)\}$. 对一切 $x \in (a, x_0)$，有 $f(x) \leqslant \alpha$.

而 $\forall\ \varepsilon > 0$，$\exists\ x' \in (a, x_0)$，使得 $f(x') > \alpha - \varepsilon$ 成立. 取 $\delta = x_0 - x' > 0$，则当 $-\delta > x - x_0 < 0$ 时，有 $x' < x < x_0$，于是，有

$$-\varepsilon < f(x') - \alpha \leqslant f(x) - \alpha \leqslant 0.$$

即
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \alpha.$$

类似可证 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \beta$，其中

$$\beta = \inf\{f(x) | x \in (x_0, b)\}.$$

以上两式说明：若 x_0 是单调函数在 (a,b) 内的间断点，必为第一类间断点中的跳跃间断点.

例 6 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续，且 $f(0) = 0$，已知 $|g(x)| \leqslant |f(x)|$，证明：函数 $g(x)$ 在 $x = 0$ 也连续.

证 因为 $|g(x)| \leqslant |f(x)|$，所以 $|g(0)| \leqslant |f(0)| = 0$，即 $g(0) = 0$. 又 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$，即 $\lim\limits_{x \to 0} |f(x)| = 0$，于是，有

$$0 \leqslant |g(x)| \leqslant |f(x)| \leqslant 0 \quad (x \to 0).$$

由迫敛性知，$\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0 = g(0)$，所以 $g(x)$ 在 $x = 0$ 连续.

例 7 设函数 f 在 (a,b) 内每一点处的左、右极限都存在，又 $\forall\ x, y \in (a,b)$，有

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}[f(x)+f(y)],$$

证明：f 在 (a,b) 内连续.

证 $\forall x_0 \in (a,b)$，记 $f(x_0^+) = A^+$，$f(x_0^-) = A^-$. 以下证明 $A^+ = A^- = f(x_0)$.

在不等式中令 $x = x_0$，分别取 $y \to x_0^+$ 与 $y \to x_0^-$ 时的极限，得

$$\begin{cases} A^+ \leqslant \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}A^+, \\ A^- \leqslant \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}A^-, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A^+ \leqslant f(x_0), \\ A^- \leqslant f(x_0). \end{cases}$$

在不等式中又令 $x = x_0 + h$，$y = x_0 - h$，取 $h \to 0$ 时的极限，得

$$f(x_0) \leqslant \frac{1}{2}(A^+ + A^-).$$

于是 $A^+ = A^- = f(x_0)$. 由 x_0 的任意性知，$f(x)$ 在 (a,b) 内连续.

题给不等式是 (a,b) 内 f 为凸函数的条件，因此本例又说明：对于凸函数 f，只要在 (a,b) 内每一点存在左、右极限，则必为连续函数.

例 8 证明：若 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内必有界.

证 令 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$，则 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists X > 0$，只要 $|x| > X$，就有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，也就是 $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$.

由于 $f(x)$ 在 $[-X, X]$ 上连续，则由有界性定理，$\exists M$，使 $|f(x)| \leqslant M$. 因而若取 $N = \max\{M, |A-\varepsilon|, |A+\varepsilon|\}$，一定有 $|f(x)| \leqslant M$，$x \in (-\infty, +\infty)$.

例 9 设 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的实函数，且满足：$f(a) < c < f(b)$，则在 a,b 间存在一个 x，使 $f(x) = c$，且当 r 为有理数时，满足 $f(x) = r$ 的 x 组成一个闭集. 证明：f 是连续函数.

证 用反证法. 若 $f(x)$ 在 $x_0 \in (-\infty, +\infty)$ 上不连续，则

$\exists\ \varepsilon_0$ 及点列$\{x_n\}$,$x_n \to x_0$,使

$$|f(x_n) - f(x_0)| > \varepsilon_0 \quad (n = 1,2,\cdots),$$

即 $\quad f(x_n) < f(x_0) - \varepsilon \quad$ 或 $\quad f(x_n) > f(x_0) + \varepsilon.$

若有无穷多个点$\{x_{n_i}\}$,使$f(x_{n_i}) < f(x_0) - \varepsilon_0$,则$\exists$ 有理数r_i,使

$$f(x_{n_i}) < r_i < f(x_0) \quad (i = 1,2,\cdots).$$

由题设知,$\exists\ \xi_i$,使ξ_i在x_0与x_{n_i}之间,有$r_i = f(\xi_i)$ $(i = 1,2,\cdots)$,而$\{\xi_i\}$为一个闭集. 故$\lim\limits_{i\to\infty}\xi_i = x_0 \in \{\xi_i\}$. 从而$f(x_0) = r_i$,推出矛盾.

对于若有无穷多个点$\{x_{n_j}\}$,使$f(x_{n_j}) > f(x_0) + \varepsilon$的情况,可以用类似方法推出矛盾.

综上所述知,$f(x)$是$(-\infty, +\infty)$上的连续函数.

例 10 设f是不为常数的连续周期函数,证明:f必有最小正周期.

证 设f的正周期的集合为$T = \{t \mid t$为f正周期$\}$,显然$\inf T = t_0$(因为T有下界 0).

设$t_0 > 0$,根据确界的性质,存在$\{t_n\} \subset T$,使$\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t_0$. 则由$f$的连续性,$\forall\ x \in \mathbf{R}$,有

$$f(x + t_0) = \lim_{n\to\infty} f(x + t_n) = f(x),$$

所以,t_0是f的周期.

用反证法证$t_0 \neq 0$. 若$t_0 = 0$,则$\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0$. 即$\forall\ x \in \mathbf{R}$,$\exists\ \{x_n\} \to x$ $(x_n = k_n x_n + r_n, n = 1,2,\cdots$. 其中$k_n$为整数,$0 \leqslant r_n \leqslant t_n)$. 于是,由$f$的连续性

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(k_n t_n) = f(0),$$

即$f(x) \equiv f(0)$,与假设矛盾,故$t_0 > 0$.

由于t_0是f的正周期下界,且$t_0 > 0$,所以t_0是f最小正周期.

例 11 设$f(x)$在$(0,1)$内有定义,且函数$e^x f(x)$与$e^{-f(x)}$在$(0,1)$内都是单调不减的. 证明:$f(x)$在$(0,1)$内连续.

证　先证 $\exists\, x_0 \in (0,1)$，左、右极限存在，再证它们相等.

$\forall\, x_0 \in (0,1)$，因 $e^{-f(x)}$ 单调不减，故 $x > x_0$ 时，$e^{-f(x)} \geqslant e^{-f(x_0)} \Rightarrow e^{f(x_0)} \geqslant e^{f(x)}$，$f(x_0) \geqslant f(x)$，即 $f(x)$ 单调递减. 所以，对于 $x_0 \in (0,1)$，$f(x_0+0)$，$f(x_0-0)$ 都存在.

又由 $e^x f(x)$ 单调不减知：当 $x > x_0$，$e^x f(x) \geqslant e^{x_0} f(x_0)$，令 $x \to x_0^+$，则 $e^x f(x_0+0) \geqslant e^x f(x_0) \Rightarrow f(x_0+0) \geqslant f(x_0)$. 在前段中，令 $x \to x_0^+$，得 $f(x_0) \geqslant f(x_0+0)$，故有 $f(x_0) = f(x_0+0)$. 类似可证 $f(x_0-0) = f(x_0)$. 从而知 $f(x)$ 在 x_0 连续. 由 x_0 的任意性，确认 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续.

例 12　证明：对于黎曼函数

$$R(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q}, & \text{当 } x = \dfrac{p}{q} \text{ 为既约分数}, \quad q > 0, \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数及零}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

$R(x)$ 在无理点上连续，在有理点上间断.

证　任取 $x_0 \in (0,1)$，则 $\forall\, \varepsilon > 0$，由无理点的稠密性，只有有限个正整数 $q \leqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$. 即在 $(0,1)$ 中，只有有限个有理点 $\dfrac{p}{q}$，使 $R\left(\dfrac{p}{q}\right) = \dfrac{1}{q} \geqslant \varepsilon$. 于是，$\exists\, \delta > 0$，使在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 中没有有理点 $x(x \neq x_0)$，出现 $R(x) \geqslant \varepsilon$. 从而，当 $0 < |x-x_0| < \delta$ 时，恒有 $|R(x)| < \varepsilon$，即 $\lim\limits_{x \to x_0} R(x) = 0$.

若 x_0 是无理点，则由 $R(x_0) = 0$ 知，$R(x)$ 在 x_0 连续；若 x_0 是有理点，则由 $R(x_0) = \dfrac{1}{q} \neq 0$ 知，$R(x)$ 在 x_0 间断.

例 13　设 $f(x)\, \forall\, x \in (-\infty, +\infty)$，有 $f(x^2) = f(x)$，且 $f(x)$ 在 $x = 0$ 和 $x = 1$ 连续，证明：$f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 为常数.

证　当 $x > 0$ 时，因为 $f(x^2) = f(x)$，所以

$$f(x) = f(x^{1/2}) = f(x^{1/4}) = \cdots = f(x^{1/2^n}) = \cdots,$$

故
$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f(x^{1/2^n}) = f(\lim_{n \to \infty} x^{1/2^n}) = f(1).$$

当 $x<0$ 时，可得 $f(x)=f(x^2)=f(1)$（此时 $x^2>0$）.

当 $x=0$ 时，$f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(1)$.

综上所述知，$f(x)\equiv f(1)$.

例 14 确定 a,b 的值，使 $f(x)=\dfrac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}$ 有无穷间断点 $x=0$ 和可去间断点 $x=1$.

解 要 $x=0$ 为无穷间断点，应有

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-a)(x-1)}{e^x-b}=\frac{a}{1-b}=0.$$

故当 $a=0,b\neq 1$ 时，$x=0$ 为无穷间断点.

要 $x=1$ 为可去间断点，应有

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{e(e^{x-1}-b/e)}{(x-a)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{e}{x-a}=\frac{e}{1-a},$$

即

$$e^{x-1}-\frac{b}{e}\sim x-1\Rightarrow\frac{b}{e}=1\Rightarrow b=e.$$

所以，应有 $a=0,b=e$.

例 15 讨论下面函数的连续性：

$$f(x)=\begin{cases}1/(1-e^{x/(x-1)}), & x\neq 1,\\ 1, & x=1.\end{cases}$$

若有间断点，指出其类型.

解 在 $x=0$ 与 $x=1$，$f(x)$ 无定义，所以 $x=0$ 和 $x=1$ 是间断点. 在其它点 $f(x)$ 连续. 因为

$$\lim_{x\to 1^-}1\Big/\left(1-e^{x/(x-1)}\right)=1,\quad \lim_{x\to 1^+}1\Big/\left(1-e^{x/(x-1)}\right)=0.$$

$$\lim_{x\to 0^-}1\Big/\left(1-e^{x/(x-1)}\right)=+\infty,\quad \lim_{x\to 0^+}1\Big/\left(1-e^{x/(x-1)}\right)=-\infty.$$

所以，$x=1$ 是第一类间断点（跳跃间断点），$x=0$ 是第二类间断点（无穷间断点）.

例 16 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2+1}{x+1}-(ax+b)\right]=0$，求 a,b 的值.

解 因为

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x+1}-(ax+b)=\frac{x^2+1-(ax+b)(x+1)}{x+1}$$
$$=\frac{(1-a)x^2-(a+b)x+1-b}{x+1},$$

而
$$\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2-(a+b)x+1-b}{x+1}=0,$$

所以，必有 $1-a=0$（否则$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$）$\Rightarrow a=1$. 又

$$a+b=0（否则\lim_{x\to\infty}f(x)=-(a+b)\neq 0）\Rightarrow b=-a=-1.$$

综上所述知，要使等式成立，必须使 $a=1,b=-1$.

由于$\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-(ax+b)]=0$ 的几何意义是：直线 $y=ax+b$ 是函数 $g(x)$ 曲线的斜渐近线. 故此例说明，函数 $g(x)=\dfrac{x^2+1}{x+1}$ 以 $y=x-1$ 为斜渐近线.

二、闭区间上的连续函数

例 17 证明：若函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上每个函数值恰好取得两次，则函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上不连续.

证 用反证法和闭区间上连续函数的介值定理证明. 设 f 在$[a,b]$上连续，则有惟一的 $c\in[a,b]$，使 $f(a)=f(c)$. 为简单计，设 $c=b$，则 $f(a)=f(b)$.

$\forall\ x\in(a,b)$，有 $f(x)<f(a)$ 或 $f(x)>f(a)$. 取 $f(x)>f(a)$（$f(x)<f(a)$ 类似可证），则 $f(a)=f(b)$ 是 f 在$[a,b]$上的最小值 m. 由 f 的连续性，f 在$[a,b]$必有最大值 M，依题设有 $x,y\in[a,b]$，且 $x<y$，使 $f(x)=f(y)=M$（见图 2.2）.

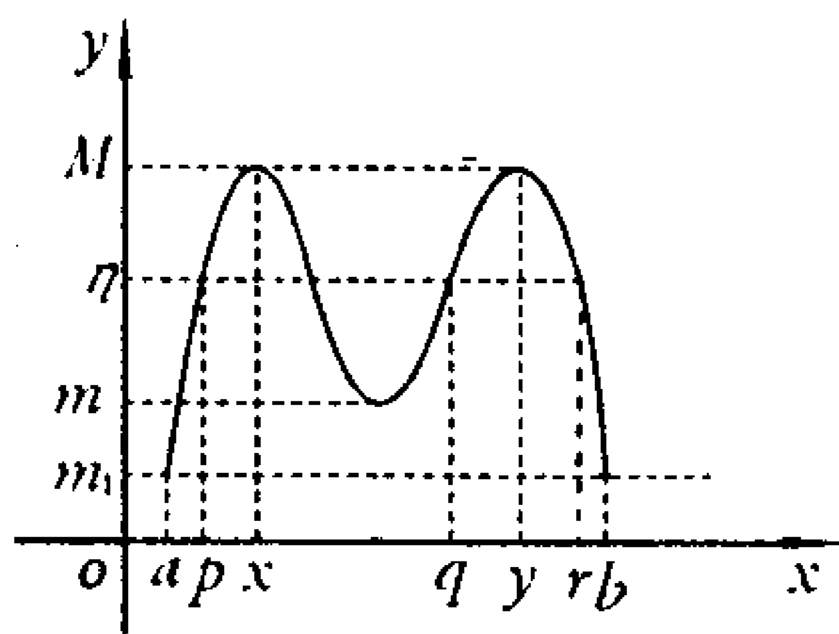


图 2.2

而 f 在$[x,y]$上连续，故在(x,y)内 f 有最小值 m_1，使 $m<m_1<M$. 则$\forall\ \eta\in[m_1,M]$，依连续函数的介值定理，在$[a,x]$，$[x,y]$，$[y,b]$内至少各有一点 p,q,r 存在，使

$$f(p)=f(q)=f(r)=\eta.$$

推出与题设相矛盾. 故可确定, f 在 $[a,b]$ 上不是连续函数.

例 18 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $a<c<d<b$, 证明: 对任意正数 p 和 q, 至少有一 $\xi\in[c,d]$, 使

$$pf(c)+qf(d)=(p+q)f(\xi).$$

证 因 $[c,d]\subset[a,b]$, 所以 f 在 $[c,d]$ 上连续, 必在 $[c,d]$ 上有最大值 M 与最小值 m, 使

$$m\leqslant f(c)\leqslant M,\quad m\leqslant f(d)\leqslant M.$$

又因 $p>0, q>0$, 所以

$$pm\leqslant pf(c)\leqslant pM,\quad qm\leqslant qf(d)\leqslant qM,$$

得 $$(p+q)m\leqslant pf(c)+qf(d)\leqslant(p+q)M,$$

即 $$m\leqslant\frac{pf(c)+qf(d)}{p+q}\leqslant M.$$

于是, 依闭区间上连续函数的介值定理, 在 $[c,d]$ 上至少有一点 ξ, 使

$$f(\xi)=\frac{pf(c)+qf(d)}{p+q}.$$

从而有 $$pf(c)+qf(d)=(p+q)f(\xi).$$

例 19 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续, 且 $f(0)=f(2a)$, 证明: 在 $[0,a]$ 上至少存在一点 ξ, 使 $f(\xi)=f(x+a)$.

证 令 $F(x)=f(x)-f(x+a)$, 则由 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续知, $f(x+a)$ 在 $[0,a]$ 上连续, 所以 $F(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续. 由于

$$F(0)=f(0)-f(a),$$

$$F(a)=f(a)-f(2a)=-[f(0)-f(a)]=-F(0),$$

故若 $f(0)-f(a)=0$, 有 $f(0)=f(a)=f(2a)$, 即当 $\xi=a$ 时, 有 $f(\xi)=f(\xi+a)$; 若 $f(0)-f(a)\neq0$, 有 $F(0)F(a)<0$, 由零点定理, 至少有一点 $\xi\in(0,a)$, 使 $F(\xi)=0$, 即 $f(\xi)=f(\xi+a)$.

综上所述知, 在 $[0,a]$ 上至少有一点 ξ, 使 $f(\xi)=f(\xi+a)$.

例 20 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且无零点, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒正(或恒负).

证 用反证法. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不恒正(或不恒负), 可设

$f(x_1)<0, f(x_2)>0, x_1, x_2 \in [a,b]$ 且 $x_1<x_2$. 由闭区间上连续函数的零点定理,至少有一点 $\xi \in (x_1,x_2)$,使 $f(\xi)=0$. 与题设 $f(x)$ 无零点矛盾. 故 $f(x)$ 在$[a,b]$ 上必恒正(或恒负).

例 21 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续,且是一一对应的,证明:

(1) 当 $f(a)<f(b)$ 时,$f(x)$ 严格单调增加;

(2) 当 $f(a)>f(b)$ 时,$f(x)$ 严格单调减少.

证 (1) 用反证法. 设 $f(x)$ 不严格单调增加. 则 $\exists\, x_1, x_2 \in [a,b]$,且 $x_1<x_2$,而 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$. 因函数是一一对应的,故必有 $f(x_1)>f(x_2)$.

若 $f(x_2)>f(a)$,依闭区间上连续函数的介值定理,$\exists\, \xi \in (a,x_1)$,使得 $f(\xi)=f(x_2)(\xi<x_1<x_2)$. 这与函数 $f(x)$ 是一一对应的矛盾.

若 $f(x_2)<f(a)$,同样知$\exists\, \eta \in (x_2,b)$,使得$f(\eta)=f(a)$ $(\eta>x_2 \geqslant a)$. 这也与函数 $f(x)$ 是一一对应的矛盾.

综上所述知,此时 $f(x)$ 严格单调增加.

(2) 令 $g(x)=-f(x)$,则 $g(a)<g(b)$. 由题(1) 知 $g(x)$ 严格单调增加. 故 $f(x)$ 严格单调减少.

例 22 设 $f:[0,1]\to[0,1]$ 为连续函数,$f(0)=0, f(1)=1, f[f(x)]=x$. 证明:$f(x)=x$.

证 因为$\forall\, x_1, x_2 \in [0,1]$,若 $f(x_1)=f(x_2)$,则由 $f[f(x)]=x$ 知

$$x_1=f[f(x_1)]=f[f(x_2)]=x_2.$$

所以,f 是一一对应的. 现证明 f 是严格单调的,用反证法. 设 f 不严格单调,则必$\exists\, x_1<x_2<x_3$,使得 $f(x_1)<f(x_2)$,但 $f(x_2)>f(x_3)$(或 $f(x_1)>f(x_2), f(x_2)<f(x_3)$) 下面讨论 $f(x_1)<f(x_2), f(x_2)>f(x_3)$ 的情形(括号内情形类似可证).

任取一数 c,使 $\max\{f(x_1), f(x_3)\}<c<f(x_2)$,则由闭区间上的介值定理知:$\exists\, \xi_1 \in (x_1,x_2)$ 和 $\xi_2 \in (x_2,x_3)$,使 $f(\xi_1)=c=f(\xi_2)$. 这与 f 的一一对应性矛盾,故 f 是严格单调的.

因为 $\forall x \in [0,1]$，因此要么 $f(x) \geqslant x$，因此要么 $f(x) \leqslant x$. 由于 $f(x)$ 严格单调，且 $f(0)=0, f(1)=1$，所以 $f(x)$ 是严格单调增加的. 因此，当 $f(x) \geqslant x$ 时，有

$$x = f[f(x)] \geqslant f(x);$$

当 $f(x) \leqslant x$ 时，有

$$x = f[f(x)] \leqslant f(x).$$

故总有

$$f(x) = x.$$

例 23 设函数 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f_1(a) < f_2(a)$，$f_1(b) > f_2(b)$，证明：在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f_1(\xi) = f_2(\xi)$.

证 引入辅助函数 $F(x) = f_1(x) - f_2(x)$，则由题设条件知：$F(a) < 0, F(b) > 0$，$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 依闭区间上连续函数的零点定理，在 (a,b) 内至少有一点 ξ，使 $F(\xi) = 0$，即 $f_1(\xi) = f_2(\xi)$.

例 24 证明：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$，则在 $[x_1, x_n]$ 上必有一点 ξ，使

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

证 因为 $f(x)$ 在 $[x_1, x_n]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[x_1, x_n]$ 上有最大值 M 和最小值 m，故对 x_i 有

$$m \leqslant f(x_i) \leqslant M \quad (x_i \in [x_1, x_n], i = 1, 2, \cdots, n).$$

于是

$$nm \leqslant f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \leqslant nM,$$

即

$$m \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} \leqslant M.$$

由闭区间上连续函数的介值定理知，存在 $\xi \in [x_1, x_n]$，使

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}, \quad \xi \in [a,b].$$

类题 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，且 $x_i \in (a,b)$，$i = 1, 2, \cdots, n$，则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使

$$f(\xi)=\frac{2[f(x_1)+2f(x_2)+nf(x_n)]}{n(n+1)}.$$

证 这时，因为不知 x_i 的大小，可取区间 $[c,d]$，其中

$$c=\min\{x_i\},\quad d=\max\{x_i\}.$$

则 $f(x)$ 在 $[c,d]$ 内连续且有最大值 M 和最小值 m. 仿效例 24 中的做法，得

$$\frac{n(n+1)}{2}m\leqslant f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+nf(x_n)\leqslant\frac{n(n+1)}{2}M,$$

即
$$m\leqslant\frac{2[f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+nf(x_n)]}{n(n+1)}\leqslant M.$$

依介值定理即得，至少有一点 $\xi\in[c,d]\subset(a,b)$，使

$$f(\xi)=\frac{2[f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+nf(x_n)]}{n(n+1)}.$$

例 25 设 $f(x)$ 在 $[0,n]$ 上连续，$f(0)=f(n)\ (n\in\mathbf{N})$，证明：在 $(0,n)$ 内至少有一点 ξ，使 $f(\xi+1)=f(\xi)$.

证 作辅助函数 $F(x)=f(x+1)-f(x)$，则 $F(x)$ 在 $[0,n-1]$ 上连续，且

$$F(i)=f(i+1)-f(i)\quad(i=0,1,\cdots,n-1),$$

于是
$$F(0)+F(1)+\cdots+F(n-1)=f(n)-f(0)=0.$$

记 $F(x)$ 在 $[0,n-1]$ 上的最大值为 M，最小值为 m，则由例 24 知，$m\leqslant\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}F(i)\leqslant M$. 于是，由闭区间上连续函数的介值定理知，在 $(0,n-1)$ 内至少存在一点 ξ，使

$$F(\xi)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}F(i)=0,$$

即
$$f(\xi+1)=f(\xi),\ \xi\in(a,b).$$

例 26 设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，$\forall\ x\in[a,b]$，记 $M(x)=\sup\limits_{a\leqslant t\leqslant x}f(t)$，证明：$M(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

证 任取 $x_0\in(a,b)$，则 $\forall\ x\in(a,x_0)$，有

$$f(x)\leqslant\sup_{a\leqslant t\leqslant x}f(t)=M(x)\leqslant M(x_0-0)\ (\text{因为 } M(x) \text{ 递增})$$

$$\Rightarrow M(x_0) = \sup_{a \leqslant t \leqslant x} f(x) \leqslant M(x_0 - 0),$$

故知
$$M(x_0 - 0) = M(x_0).$$

又，由 f 在 x_0 的连续性，$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0, \forall\ h \in (0,\delta)$ 以及 $x \in (x_0, x_0 + h)$，有

$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon \leqslant M(x_0) + \varepsilon$$
$$\Rightarrow \sup_{x \in (x_0, x_0+h)} f(x) \leqslant M(x_0 + \varepsilon),$$

从而得 $M(x_0 + h) = \sup\limits_{a \leqslant x \leqslant x_0+h} f(x)$

$$= \max\{M(x_0), \sup_{x \in (x_0, x_0+h)} f(x)\} \leqslant M(x_0) + \varepsilon.$$

令 $h \to 0^+$，由 ε 的任意性，即得

$$M(x_0 + 0) \leqslant M(x_0) \Rightarrow M(x_0 + 0) = M(x_0).$$

所以，$M(x)$ 在 x_0 连续，即 $M(x)$ 在 $[a,b]$ 连续.

类似可证以下命题：若 f 在 $[a,b]$ 上连续，则 $m(x) = \min\limits_{a \leqslant t \leqslant x}\{f(t)\}$ 和 $M(x) = \min\limits_{a \leqslant t \leqslant x}\{f(t)\}$ 在 $[a,b]$ 上连续.

例 27 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 f 满足：f 在 $x = 0$ 连续，且对 $x, y \in \mathbf{R}$ 有 $f(x + y) = f(x) + f(y)$. 证明：(1) f 在 $\mathbf{R}$ 上连续；(2) $\forall\ x \in \mathbf{R}, f(x) = xf(1)$.

证 (1) 令 $x = y = 0$，则知 $f(0) = 0$. $\forall\ x_0 \in \mathbf{R}$，由 $f(x) = f(x - x_0) + f(x_0)$ 及 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的连续性得

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0}[f(x - x_0) + f(x_0)] = f(0) + f(x_0) = f(x_0),$$

所以，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续.

(2) 以 $y = -x$ 代入，得 $f(x) = f(-x)$，即 f 为奇函数. 对正整数 p, q，反复运用等式 $f(x + y) = f(x) + f(y)$，得

$$f(p) = pf(1), \quad f\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{1}{q} f(1).$$

由此结果及 f 为奇函数知，对任何有理数 $r = \dfrac{p}{q}\ (q \neq 0)$，有

$$f(r) = rf(1).$$

因此，$\forall\ x \in \mathbf{R}$，取有理数列 $\{r_n\}$，$r_n \to x\ (n \to \infty)$，可由 f 的连

续性得

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f(r_n)=\lim_{n\to\infty}r_nf(1)=xf(1).$$

三、一致连续性问题

例 28 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内一致连续，证明：

(1) $\exists\ \delta>0$，使 $\forall\ x_0$，当 $x\in(a,b)\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 时，$|f(x)|\leqslant|f(x_0)|+1$；

(2) $f(x)$ 在 (a,b) 内有界.

证 (1) 因为 $f(x)$ 一致连续，故对 $\varepsilon=1>0$，$\exists\ \delta>0$，当 $x\in(a,b)\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 时，有

$$|f(x)-f(x_0)|<1\Rightarrow|f(x)|\leqslant|f(x_0)|+1.$$

(2) 利用题(1) 中的 δ，把 (a,b) 分为 n 个小区间，分点为 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，使

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}(x_k-x_{k-1})<\delta.$$

取
$$M=\max_{1\leqslant k\leqslant n-1}\{f(x_k)+1\},\quad\forall\ x\in(a,b),$$

x 必落在其中一个小区间上. 则依题(1)，有

$$|f(x)-f(x_k)|<1\ (1\leqslant k\leqslant n-1),$$

或
$$|f(x)-f(x_{k-1})|<1\ (2\leqslant k\leqslant n).$$

故
$$|f(x)|\leqslant M.$$

例 29 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，证明：$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

证 由极限存在知，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ X>0$，当 $x>X$ 时，有

$$|f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

故 $\forall\ x',x''\in[a,+\infty)$，当 x',x'' 均 $>X$ 时，有

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant|f(x')-A|+|f(x'')-A|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

由于 $f(x)$ 在 $[a,X+1]$ 上连续，必在 $[a,X+1]$ 上一致连续. 即 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta_0>0$，当 $|x_2-x_1|<\delta_0$ 且 $x_1x_2\in[a,X+1]$ 时，有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

设 $\delta=\min\{\delta_0,1\}$，则对于任意两个 x_1 和 x_2，当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，有三种情形.

(1) x_1,x_2 均 $\in[X,+\infty)$，则由第一个不等式知

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.$$

(2) $x_1\in[X,+\infty)$，$x_2\in[a,X]$（或 x_1,x_2 所在区间互换），由 $|x_1-x_2|<\delta\leqslant 1$ 知

$$x_1\in[a,X+1],\quad x_2\in[a,X+1],$$

因此

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.$$

(3) $x_1\in[a,X]$，$x_2\in[a,X]$，由闭区间上连续知

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.$$

综上所述知，$\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,\delta>0$，只要 $|x_1-x_2|<\delta$，就有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$，所以 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

例 30 函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续的充要条件是：$\forall\,\{x_n\},\{y_n\}\in I$，当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n)-f(y_n)]=0.$$

证 **必要性** 用定义证明. 因为 $f(x)$ 一致连续，故 $\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,\delta>0$，当 $x_n,y_n\in I$ 时，有

$$|x_n-y_n|<\delta\Rightarrow|f(x_n)-f(y_n)|<\varepsilon.$$

在已知 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$ 时，对于 $\delta>0$，$\exists\,N\in\mathbf{N}$，$\forall\,n>N$，必有 $|x_n-y_n|<\delta$，因而 $|f(x_n)-f(y_n)|<\varepsilon$. 即

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n)-f(y_n)]=0.$$

充分性 用反证法. 设 $f(x)$ 在 I 上不一致连续，则有 $\varepsilon_0>0$，$\forall\,\delta>0$，$\exists\,x',x''\in I$，由

$$|x'-x''|<\delta\Rightarrow|f(x')-f(x'')|>\varepsilon_0.$$

取 $\delta=\dfrac{1}{n}\ (n\in\mathbf{N})$，$\exists\,x_n,y_n\in I$，由

$$|x_n-y_n|<\frac{1}{n}\Rightarrow|f(x_n)-f(y_n)|\geqslant\varepsilon_0.$$

这显然与 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$ 时、有 $\lim\limits_{n\to\infty}|f(x_n)-f(y_n)|=0$ 矛盾.

所以 $f(x)$ 在 I 上必然一致连续.

例 31 设 f 在 $\mathbf{R}$ 上一致连续，则存在正数 A,B，使 $\forall\, x\in\mathbf{R}$，有 $|f(x)|\leqslant A|x|+B$.

证 由 f 在 $\mathbf{R}$ 上一致连续知，对 $\varepsilon=1$，$\exists\,\delta>0$，$\forall\, x',x''\in\mathbf{R}$，若 $|x'-x''|\leqslant\delta$，则有 $|f(x')-f(x'')|<1$.

又 $\forall\, x\in\mathbf{R}$，有 $x=n\delta+x_0, n\in\mathbf{Z}, x_0\in(-\delta,\delta)$. 由 f 的连续性可知，f 在$[-\delta,\delta]$上有界. 即 $\forall\, x\in[-\delta,\delta]$，有 $|f(x)|\leqslant M$. 从而

$$
\begin{aligned}
|f(x)| &= \left|\sum_{k=1}^{n}[f(k\delta+x_0)-f((k-1)\delta+x_0)]+f(x_0)\right| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n}|f(k\delta+x_0)-f((k-1)\delta+x_0)|+|f(x_0)| \\
&\leqslant |n|+M=\frac{1}{\delta}|x-x_0|+M \\
&\leqslant \frac{1}{\delta}|x|+\frac{1}{\delta}|x_0|+M\leqslant\frac{1}{\delta}|x|+M+1.
\end{aligned}
$$

令 $\frac{1}{\delta}=A, M+1=B$，即得 $|f(x)|\leqslant A|x|+B$.

例 32 证明：在区间(a,b)内的有限个一致连续函数的和与乘积在(a,b)内仍然一致连续.

证 只证两个函数的和与乘积情形，可将其结论推广到有限个函数的和与乘积情形.

(1) 设 $f(x),g(x)$ 都在(a,b)内一致连续. $\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,\delta_1>0$，使对任何 $x',x''\in(a,b)$，当 $|x'-x''|<\delta_1$ 时，就有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

$\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,\delta_2>0$，使对任何 $x',x''\in(a,b)$，当 $|x'-x''|<\delta_2$ 时，就有 $|g(x_1')-g(x_2')|<\varepsilon$. 因此，若令 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当 $|x'-x''|<\delta$ 时，恒有

$$
\begin{aligned}
&|[f(x')+g(x')]-[f(x'')+g(x'')]| \\
&\leqslant |f(x')-f(x'')|+|g(x')-g(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.
\end{aligned}
$$

即 $f(x)+g(x)$ 在 (a,b) 内一致连续.

(2) 设 $f(x),g(x)$ 在 (a,b) 内一致连续，由例 26 结论(2)，$f(x),g(x)$ 在 (a,b) 上有界，即

$$|f(x)|\leqslant M,\quad |g(x)|\leqslant L\ (L>0,M>0).$$

$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0$，对于任何 $x',x''\in(a,b)$，当 $|x'-x''|<\delta$ 时，就有 $|f(x')-f(x'')|<\dfrac{\varepsilon}{2M},|g(x')-g(x'')|<\dfrac{\varepsilon}{2L}$，所以

$$\begin{aligned}&|f(x')g(x')-f(x'')g(x'')|\\&=|[f(x')-f(x'')g(x')]+f(x'')[g(x')-g(x'')]|\\&<\frac{\varepsilon}{2M}M+\frac{\varepsilon}{2L}L=\varepsilon.\end{aligned}$$

因而 $f(x)g(x)$ 在 (a,b) 内一致连续.

例 33 证明：$f(x)=x^{\alpha}$ 在 $[0,+\infty)$ 上当 $0<\alpha\leqslant1$ 时一致连续，当 $\alpha>1$ 时不一致连续.

证 当 $0<\alpha\leqslant1$ 时，因为 $\forall\ x\in[0,1]$，有不等式

$$(1-x)^{\alpha}+x^{\alpha}\geqslant(1-x)+x=1,$$

得 $1-x^{\alpha}\leqslant(1-x)^{\alpha}$，由此知：$\forall\ x_1,x_2\in[0,+\infty)$ 且 $x_1>x_2$，有

$$x_1^{\alpha}-x_2^{\alpha}=x_1^{\alpha}\left[1-\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\alpha}\right]\leqslant x_1^{\alpha}\left(1-\frac{x_2}{x_1}\right)^{\alpha}=(x_1-x_2)^{\alpha}.$$

从而知此时 $f(x)=x^{\alpha}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

当 $\alpha>1$ 时，由于

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}[(x+\eta)^{\alpha}-x^{\alpha}]=\lim_{x\to+\infty}x\left[\left(1+\frac{\eta}{x}\right)^{\alpha}-1\right]\\&=\eta\lim_{t\to0^+}\frac{(1+t)^{\alpha}-1}{t}=\eta\lim_{t\to0^+}\frac{(1+t)^{\alpha}-1}{\ln(1+t)}=\eta\alpha\ \left(t=\frac{\eta}{x}\right),\end{aligned}$$

所以，当 $\alpha>1$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}[(x+\eta)^{\alpha}-x^{\alpha}]=+\infty$.

故 $\forall\ \delta>0$，取充分大的 x_1 及 $x_2=x_1+\eta,0<\eta<\delta$，有

$$|x_1^{\alpha}-x_2^{\alpha}|>1=\varepsilon_0.$$

因而 $f(x)=x^{\alpha}$ 在 $[0,+\infty)$ 上不一致连续.

例 34 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续，$\varphi(x)$ 在 $[a,+\infty)$

上连续，$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\varphi(x)]=0$. 证明：$\varphi(x)$ 在$[a,+\infty)$ 上一致连续.

证 (1) 由题设极限存在知：$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ X>a$，当 $x>X$ 时，$|f(x)-\varphi(x)|<\dfrac{\varepsilon}{3}$. 又由 $f(x)$ 一致连续得：$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta_1>0$，当 $|x'-x''|<\delta_1$ 时，$|f(x')-f(x'')|<\dfrac{\varepsilon}{3}$. 因而 $\forall\ x',x''>X$，且 $|x'-x''|<\delta_1$，有

$$\begin{aligned}|\varphi(x')-\varphi(x'')| &\leqslant |\varphi(x')-f(x')|+|f(x')-f(x'')| \\ &\quad +|f(x'')-\varphi(x'')| \\ &<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\end{aligned}$$

(2) 由康托尔(Cantor)定理(一致连续性)知，$\varphi(x)$ 在$[a,X+1]$ 上一致连续，所以对此 $\varepsilon>0$，$\exists\ \delta_2>0$，当 $x',x''\in[a,X+1]$ 且 $|x'-x''|<\delta_2$ 时，有 $|\varphi(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

(3) 于是，取 $\delta=\min\{1,\delta_1,\delta_2\}$，则当 $x',x''\in[a,+\infty)$ 且 $|x'-x''|<\delta$ 时，有 $|\varphi(x')-\varphi(x'')|<\varepsilon$. 即 $\varphi(x)$ 在$[a,+\infty)$ 上一致收敛.

从例 1 至例 32，我们讨论了函数的连续性，闭区间上连续函数的性质和一致连续性问题. 在这里，我们领会到：(1) 要善于准确地使用概念，从定义、性质出发进行论证；(2) 要会构造合适的辅助函数，利用辅助函数进行论证；(3) 要恰当地使用反证法，利用已知条件推出矛盾，证明命题.

最后证一个关于连续概念的应用题.

例 35 证明：若函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续，$\forall\ x,y\in\mathbf{R}$，有

$$|f(x)-f(y)|\leqslant k|x-y|,\ 0<k<1,$$

则 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有惟一的不动点 a，即 $f(a)=a$.

证 符合题设条件的 f 称为压缩映射.

任取 $x_0\in\mathbf{R}$，令 $x_n=f(x_{n-1})$，$n=1,2,\cdots$，构造一个迭代数列$\{x_n\}$. 因为

$$
\begin{aligned}
|x_n - x_{n-1}| &= |f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})| \\
&\leqslant k|x_{n-1} - x_{n-2}| = k|f(x_{n-2}) - f(x_{n-3})| \\
&\leqslant k^2|x_{n-2} - x_{n-3}| \leqslant \cdots \leqslant k^n|x_1 - x_0|.
\end{aligned}
$$

所以,$\forall\ n,p \in \mathbf{N}$,有

$$
\begin{aligned}
|x_{n+p} - x_n| &\leqslant |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\
&\leqslant (k^{n+p-1} + k^{n+p-2} + \cdots + k^n)|x_1 - x_0| \\
&= \frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|,
\end{aligned}
$$

因为 $k < 1$,所以 $\forall\ \varepsilon > 0$,$\exists\ N \in \mathbf{N}$,当 $n > N$ 时,恒有

$$
|x_{n+p} - x_n| < \frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|.
$$

由柯西收敛原理,数列$\{x_n\}$收敛,设 $x_n \to a$.

对 $x_n = f(x_{n-1})$ 两边取极限,即得 $a = f(a)$,所以 a 是 f 的一个不动点,即 a 是 $x = f(x)$ 的一个根.

再证不动点的惟一性.设另有不动点为 b,即 $b = f(b)$,则

$$
|b - a| = |f(b) - f(a)| \leqslant k|b - a|,
$$

知 $k \geqslant 1$,这与已知条件矛盾.故不动点惟一.

第三章　导数与微分

第一节　导数概念与求导法则

主要内容

1．设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，若极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在，则称 $f(x)$ 在 x_0 可导，其极限值称为 $f(x)$ 在 x_0 的导数，记作 $f'(x_0)$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}$.

若 $f(x)$ 在 x_0 的右极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，则极限值称为 $f(x)$ 在 x_0 的右导数，记作 $f'_+(x_0)$.

若 $f(x)$ 在 x_0 的左极限 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，则极限值称为 $f(x)$ 在 x_0 的左导数，记作 $f'_-(x_0)$.

2. 若 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，则

$$f'(x_0)\text{ 存在 }\Longleftrightarrow f'_+(x_0),f'_-(x_0)\text{ 存在，}$$

且
$$f'_+(x_0)=f'_-(x_0).$$

3. 若 $f(x)$ 在 x_0 可导，则 f 在 x_0 连续，反之不一定成立. 如 $y=|x|$ 在 $x=0$ 连续，但不可导.

4. 若函数 $f(x)$ 在区间 I 上每一点都可导，则称 f 为 I 上的可导函数. $f'(x)$ 称为 f 在 I 上的导函数，简称导数，记作 f'，y'，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，

$\frac{df}{dx}$.

5. 基本求导法则有：

(1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

(2) $(uv)' = u'v + uv'$, $(cu)' = cu'$ (c 为常数);

(3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$;

(4) 反函数的导数：$\frac{dy}{dx} = 1\Big/\frac{dx}{dy}$;

(5) 复合函数的导数：若 $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$，则$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$.

疑 难 解 析

1. 怎样认识函数 $f(x)$ 在点 x_0 的导数 $f'(x_0)$ 的几何意义？

答　函数 f 在点 x_0 的导数 $f'(x_0)$ 的几何意义是曲线 $y = f(x)$ 在点 (x_0, y_0) 切线的斜率. 因此，曲线 $y = f(x)$ 在点 (x_0, y_0) 的切线方程与法线方程分别为

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

要正确认识切线与导数的关系. 即若 $y = f(x)$ 在 x_0 可导，则曲线 $y = f(x)$ 在点 (x_0, y_0) 存在切线；但 $f(x)$ 在 x_0 不可导时，曲线 $y = f(x)$ 在点 (x_0, y_0) 也可能存在切线，但这时切线必垂直于 x 轴. 反之，若曲线 $y = f(x)$ 在点 (x_0, y_0) 不存在切线，则 $f(x)$ 在 x_0 一定不可导.

2. 在哪些情形下函数 $f(x)$ 在 x_0 连续但不可导？

答　函数 $f(x)$ 在 x_0 连续是 $f(x)$ 在 x_0 可导的必要条件，但不是充分条件. $f(x)$ 在 x_0 连续但不可导有以下几种情形：

(1) 左、右导数存在但不相等，即 $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$.

(2) 左、右导数至少有一个不存在. 如

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0,\text{有 } f'_+(0) \text{ 不存在}, \\ 0, & x\leqslant 0,\text{有 } f'_-(0)=0. \end{cases}$$

所以在 $x=0$ 不可导.

(3) 左、右导数至少有一个为 ∞. 如 $y=\sqrt[3]{x}$ 在 $x_0=0$ 的左、右导数均为 $+\infty$,所以在 $x=0$ 不可导.

3. 怎样理解 $f'_+(x_0)$ 和 $f'(x_0+0)$ 的区别?

答 $f'_+(x_0)$ 表示 $f(x)$ 在点 x_0 的右导数,即

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

而 $f'(x_0+0)$ 表示导函数 $f'(x)$ 在点 x_0 的右极限,即

$$f'(x_0+0)=\lim_{x\to x_0^+}f'(x),$$

也表示 $f'(x)$ 在 x_0 右连续.

它们两个不一定同时存在. 如

$$f(x)=\begin{cases} \arctan\dfrac{1+x}{1-x}, & x\neq 1, \\ 0, & x=1. \end{cases}$$

因为 $x\neq 1$ 时,$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$,所以 $\lim\limits_{x\to 1^+}f'(x)=\dfrac{1}{2}$. 而

$$\begin{aligned} f'_+(x) &= \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\arctan(2+\Delta x)/(-\Delta x)}{\Delta x}=-\infty. \end{aligned}$$

当 $f(x)$ 在 $[x_0,x_0+\delta]$ 上连续,且在 $(x_0,x_0+\delta)$ 可导,$\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)=A$ 时,函数 $f(x)$ 在 x_0 的右导数存在,且

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}f'(x)=A=f'(x_0+0).$$

方法、技巧与典型例题分析

一、导数概念的命题

关于导数概念的命题，主要是证明题与讨论题. 解这些题目时，必须正确运用导数、连续以及极限的有关概念，从定义出发进行论证与分析，也可以利用有关法则和性质来简化过程，使证明更加简洁.

例 1 证明：偶函数的导数是奇函数，奇函数的导数是偶函数.

证 用定义证明. 设 $f(x)=f(-x)$，且 $f(x)$ 可导，则

$$f'(-x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x+\Delta x)-f(-x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f[-(x-\Delta x)]-f(-x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}-\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{-\Delta x}=-f'(x).$$

所以，偶函数的导数是奇函数.

用复合函数求导法则证明. 设 $f(x)=f(-x)$，且 $f(x)$ 可导，则对等式两边求导，得

$$[f(-x)]'=f'(-x)\cdot(-x)'=-f'(-x)=f'(x).$$

所以，偶函数的导数为奇函数.

类似可证奇函数的导数是偶函数.

例 2 证明：若 $f(x)=\sin x\cdot\sin 2x\cdot\sin 3x$，则 $f''(0)=0$.

证 因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f'(x)$ 是偶函数，$f''(x)$ 是奇函数. 由于 $f''(x)$ 曲线关于原点对称，则由 $f''(x)$ 的连续性知，$f''(0)=0$.

例 3 证明：周期函数的导数仍是周期函数，且周期不变.

证 设 $f(x+T)=f(x)$，且 $f(x)$ 可导，对等式两边求导得，$f'(x+T)=f'(x)$. 故 $f'(x)$ 仍为周期函数，且周期不变

例 4 设 $\varphi(x)$ 在点 $x=a$ 连续，问：下列函数在 $x=a$ 是否可导？(1) $f(x)=(x-a)\varphi(x)$；(2) $g(x)=|x-a|\varphi(x)$.

解 因为 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 连续，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varphi(a+\Delta x)=\varphi(a)$.

(1) 由
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(a+\Delta x-a)\varphi(a+\Delta x)-(a-a)\varphi(a)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\varphi(a+\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\varphi(a+\Delta x)=\varphi(a)$$
知，$f(x)$ 在 $x=a$ 可导，且 $f'(a)=\varphi(a)$.

(2) 由
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|a+\Delta x-a|\varphi(a+\Delta x)-|a-a|\varphi(a)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|\varphi(a+\Delta x)}{\Delta x}$$
知，$g'_-(a)=-\varphi(a)$，$g'_+(a)=\varphi(a)$. 则当 $\varphi(a)=0$ 时，$g(x)$ 在 $x=a$ 可导，且 $g'(a)=0$；当 $\varphi(a)\neq 0$ 时，$g'_+(a)\neq g'_-(a)$，$g(x)$ 在 $x=a$ 不可导.

例 5 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有定义，在 $x=0$ 连续，且 $\forall x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$.

(1) 证明 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续；

(2) 设 $f'(0)=a$（常数），证明 $f(x)=ax$.

证 (1) 由题给等式，令 $x_1=x_2=0$，得 $f(0)=f(0)+f(0)$. 于是 $f(0)=0$.

又 $\forall x_0\in(-\infty,+\infty)$，有
$$\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0)+f(\Delta x)-f(x_0)]$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}f(\Delta x)=f(0)=0.$$
所以由 x_0 的任意性知：$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

(2) 又 $\forall x_0\in(-\infty,+\infty)$，依导数定义有

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=f'(0)=a.$$
所以由 x_0 的任意性知：$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，且 $f'(x)=a$. 从而 $f(x)=ax+b$，而 $f(0)=0$，故 $b=0$，即 $f(x)=ax$.

例 6 证明：黎曼函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & 当\ x=\dfrac{p}{q}(q>0)\ 为既约分数,\\ 0, & 当\ x\ 为无理数\end{cases}$$

在 $[0,1]$ 上处处不可微.

证 由第三章第四节例 4 知，$R(x)$ 在有理点间断，所以 $R(x)$ 在有理点不可微.

设 $x_0\in(0,1)$ 为任一无理点列，当取无理点列 $\{x_n\}\to x_0$，则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{R(x_n)-R(x_0)}{x_n-x_0}=\lim\frac{0}{x_n-x_0}=0.$$

再取一有理点列 $\{x_n'\}\to x_0$（其中 $x_0=0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 为无理数，$x_n'=0.a_1\cdots a_n$ 为有理数），显然 $a_i(i=1,2,\cdots)$ 有无穷多项不为零. 记第一个不为零的下标为 N，于是当 $n>N$ 时，有

$$R(x_n')=R(0.a_1\cdots a_n)>1/10^n,$$

从而
$$\left|\frac{R(x_n')-R(x_0)}{x_n-x_0}\right|=\frac{R(0.a_1\cdots a_n)}{0.0\cdots 0\,a_{n+1}}\geqslant 1.$$

得
$$\lim_{n\to\infty}\frac{R(x_n'-R(x_0))}{x_n-x_0}\neq 0.$$

所以，可以确定 $R(x)$ 在无理点也不可微，即 $R(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处不可微.

例 7 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(a)=f(b)$，且在 (a,b) 内有连续的右导数

$$f'_+(x)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

证明：存在 $\xi \in (a,b)$，使 $f'_+(\xi) = 0$.

证 若 $f(x) \equiv$ 常数，则结论显然成立.

设 $f(x) \not\equiv$ 常数. 由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，必在 $[a,b]$ 上有最大值 M 和最小值 m，则 M 与 m 至少有一个在 (a,b) 内取得. 设 $\eta \in (a,b)$，$f(\eta) = M$（$f(\eta) = m$ 可类似讨论），于是

$$f'_+(\eta) = \lim_{x \to \eta^+} \frac{f(x) - f(\eta)}{x - \eta} \leqslant 0 \quad \text{（见单调性的判别）}.$$

在 $[a,\eta)$ 内任取一点 c，由 f 在 $[c,\eta]$ 上连续，故 f 在 $[c,\eta]$ 上也有一点 η_1 达到最小值，使

$$f'_+(\eta_1) = \lim_{x \to \eta_1^+} \frac{f(x) - f(\eta_1)}{x - \eta_1} \geqslant 0 \ (a < \eta_1 < \eta).$$

由 $f'_+(\eta) \leqslant 0$，$f'_+(\eta_1) \geqslant 0$，$\eta, \eta_1 \in (a,b)$ 知，$\exists\, \xi \in (a,b)$，使

$$f'_+(\xi) = 0.$$

例 8 设 f 在 $(0, +\infty)$ 上有定义，且 $\forall\, x, y \in (0, +\infty)$，都有 $f(xy) = f(x) + f(y)$. 已知 $f'(1)$ 存在，求 $f'(x)$.

解 在题给等式中令 $y = 1$，得 $f(1) = 0$.

再令 $y = 1 + \Delta x$，$0 < |\Delta x| < 1$，得 $xy = x + x\Delta x$，故

$$x \frac{f(x + x\Delta x) - f(x)}{x\Delta x} = \frac{f(1 + \Delta x)}{\Delta x} = \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x}.$$

上式两边取 $\Delta x \to 0$ 的极限，得 $xf'(x) = f'(1)$，即

$$f'(x) = -\frac{f'(1)}{x}.$$

例 9 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续，且 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}$ 存在，证明：$f(x)$ 在 $x = 0$ 可导.

证 因为 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}$ 存在，且 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$，所以

$$f(0) = 0 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

于是 $$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0),$$

即 $f'(0)$ 存在，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导.

例 10 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 可微，$\alpha_n < x_0 < \beta_n$，$n=1,2,\cdots$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty}\beta_n = x_0$，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}=f'(x_0).$$

证 因为

$$\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}=\frac{f(\beta_n)-f(x_0)+f(x_0)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}$$

$$=\frac{\beta_n-x_0}{\beta_n-\alpha_n}\cdot\frac{f(\beta_n)-f(x_0)}{\beta_n-x_0}-\frac{\alpha_n-x_0}{\beta_n-\alpha_n}\cdot\frac{f(\alpha_n)-f(x_0)}{\alpha_n-x_0},$$

记 $\frac{\beta_n-x_0}{\beta_n\alpha_n}=\lambda_n$，则 $\frac{x_0-\alpha_n}{\beta_n-\alpha_n}=1-\lambda_n$ 且 $0<\lambda_n, 1-\lambda_n<1$，则

$$\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}=\lambda_n\frac{f(\beta_n)-f(x_0)}{\beta_n-x_0}+(1-\lambda_n)\frac{f(\alpha_n)-f(x_0)}{\alpha_n-x_0}.$$

由 $f'(x_0)=\lambda_n f'(x_0)+(1-\lambda_n)f'(x_0)$ 得

$$\left|\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}-f'(x_0)\right|$$

$$\leqslant\lambda_n\left|\frac{f(\beta_n)-f(x_n)}{\beta_n-x_0}-f'(x_0)\right|+(1-\lambda_n)\left|\frac{f(\alpha_n)-f(x_0)}{\alpha_n-x_0}-f'(x_0)\right|$$

$\to 0$（当 $n\to+\infty$ 时），

所以
$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}=f'(x_0).$$

本例运用了组合的技巧，这在证明过程可以使问题简单化，往往可以直接得出结论.

例 11 设 $f:I\to\mathbf{R}$ 是任一函数，$x_0\in I$，证明：$f(x)$ 在 x_0 可导 $\Longleftrightarrow$ 存在一个函数 $\varphi:I\to\mathbf{R}$，使

(1) $\forall x\in I, f(x)-f(x_0)=\varphi(x)(x-x_0)$；

(2) φ 在 x_0 连续.

此时，
$$f'(x_0)=\varphi(x_0).$$

证 **必要性** 若 $f(x)$ 在 x_0 可导，则

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

存在. 令 $$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, & x\neq x_0,\\ f'(x_0), & x=x_0,\end{cases}$$

于是，当 $x\neq x_0$ 时，$f(x)-f(x_0)=\varphi(x_0)(x-x_0)$；显然，当 $x=x_0$ 时上式也成立，且 $f'(x_0)=\varphi(x_0)$.

充分性 若 $\forall\ x\in I$，有 $\varphi(x)$，使得

$$f(x)-f(x_0)=\varphi(x)(x-x_0),$$

且 $\varphi(x)$ 在 x_0 连续，则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_0).$$

故 $f(x)$ 在点 x_0 可导，且 $f'(x_0)=\varphi(x_0)$.

例 12 若函数 $f(x)$ 在 x_0 满足李卜希兹(Lipshitz)条件

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant M|x-x_0|^{\alpha}\quad(M\text{ 为常数}),$$

则 $f(x)$ 在 x_0 可导；若 $\alpha=1$，则 $f'(x_0)$ 可能不存在.

证 若 $\alpha>1$，则由 $\left|\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|\leqslant M|x-x_0|^{\alpha-1}$，得

$$\lim_{x\to x_0}\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|=0.$$

因而 $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)=0.$$

若 $\alpha=1$，设 $f(x)=|x|$，$x_0=0$，知 $f(x)$ 在 $x=0$ 不可导. 但此时仍有 $|f(x)-f(0)|=|x|\leqslant 2|x-0|^{\alpha}$ 成立.

二、求导法则的运用

例 13 设 $g(0)=g'(0)=0$，而

$$f(x)=\begin{cases}g(x)\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

求 $f'(0)$.

解 因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=g'(0)=0$,故

$$f(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)\sin\frac{1}{x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}\text{(零乘以有界量)}=0.$$

例 14 设 $g(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上连续,有

$$f(x)=\cos g(x),\quad f'(x)=\sin g(x),$$

证明:对满足 $g(x)\neq n\pi$ 的一切 x,$g(x)$ 可导,且 $g'(x)=1$.

证 设$g(x_0)\neq n\pi$,则由$g(x)$的连续性,∃ $\delta>0$,当$|x-x_0|<\delta$时,$g(x)\neq n\pi$. 于是有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{g(x)-g(x_0)}{\cos g(x)-\cos g(x_0)}\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right]$$

$$=-\frac{1}{\sin g(x_0)}\cdot\sin g(x_0)=-1.$$

即 $g(x)$ 在不等于 $n\pi$ 的一切 x 点可导,且 $g'(x)=-1$.

例 15 已知 $f'(a)$ 存在,$f(a)\neq 0$,求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right]^n,\quad n\text{ 为正整数}.$$

解 化为重要极限形式

$$\text{原式}=\left[1+\left(\frac{f(a+1/n)}{f(a)}-1\right)\right]^{1\Big/\left[\frac{f(a+1/n)}{f(a)}-1\right]\cdot\frac{f(a+1/n)-f(a)}{f(a)\cdot 1/n}}.$$

因为$\left[\dfrac{f(a+1/n)}{f(a)}-1\right]\xrightarrow{n\to\infty}0$,而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(a+1/n)-f(a)}{f(a)\cdot 1/n}=\frac{f'(a)}{f(a)},$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(a+1/n)}{f(a)}\right]^n=e^{f'(a)/f(a)}.$$

当函数是幂指函数、若干个因式的积、商或由根式组成时,求导运算常用对数求导法. 其具体步骤是:

(1) 对 $y = f(x)$ 两边取绝对值后，再取自然对数；

(2) 将得到的等式两边分别对自变量求导；

(3) 从求导后等式中解出 y'.

在对 $y = f(x)$ 取对数后，两边对自变量 x 求导时，把 y 看作复合函数中的中间变量. 其优点是，可以把积化为和，商化为差，幂指函数化为乘积，从而使求导运算变简单.

例 16 求下列函数的导数：

(1) $y = x^{x^x}$； (2) $y = \sqrt{\dfrac{(x+1)(x^2+2)}{x^3+3}}$；

(3) $y = \sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}$.

解 (1) 取对数，得 $\ln y = x^x \ln x$，所以

$$y'/y = (x^x)'\ln x + x^x \cdot 1/x \Rightarrow y' = (x^x)' y\ln x + y \cdot x^{x-1}.$$

对 $y_1 = x^x$ 取对数，得 $\ln y_1 = x\ln x$，所以

$$y_1'/y_1 = \ln x + 1 \Rightarrow y_1' = (x^x)' = x^x(1+\ln x).$$

故
$$y' = x^{x^x}[x^x(\ln x + \ln^2 x + 1/x)].$$

(2) 取对数，得

$$\ln y = \frac{1}{2}[\ln(1+x) + \ln(2+x^2) - \ln(3+x^3)]$$

所以
$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x+1} + \frac{2x}{x^2+2} - \frac{3x^2}{x^3+3}\right].$$

故
$$y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x+1)(x^2+2)}{x^3+3}} \cdot \left[\frac{1}{x+1} + \frac{2x}{x^2+2} - \frac{3x^2}{x^3+3}\right].$$

(3) 取对数，得

$$\ln y = \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{2}\ln\sin x + \frac{1}{4}\ln(1-e^x),$$

所以
$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2x} + \frac{\cos x}{2\sin x} + \frac{-e^x}{4(1-e^x)}.$$

故
$$y' = \sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}} \cdot \left[\frac{1}{2x} + \frac{1}{2}\cot x - \frac{e^x}{4(1-e^x)}\right].$$

例 17 设函数 $f(u)$ 一阶可导，求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[f\left(t+\frac{x}{a}\right)-f\left(t-\frac{x}{a}\right)\right],$$

$a\neq 0,a,t$ 与 x 无关.

解 将原式变形为导数定义形式即得.

$$\text{原式}=\frac{1}{a}\lim_{x\to 0}\left[\frac{f\left(t+\frac{x}{a}\right)-f(t)}{\frac{x}{a}}+\frac{f\left(t-\frac{x}{a}\right)-f(t)}{\left(-\frac{x}{a}\right)}\right]$$

$$=\frac{1}{a}[f'(t)+f'(t)]=\frac{2}{a}f'(t).$$

例 18 设 $f(x),g(x)$ 可导，求下列函数的导数：

(1) $y=f(x^2)$； (2) $y=\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}$；

(3) $y=f(\sin^2x)+f(\cos^2x)$； (4) $y=f(e^x)e^{g(x)}$.

解 本题的函数都是复合函数，因此要用复合函数求导法则. 函数又都是抽象函数，所以对中间变量的导数仍可用抽象函数表示.

(1) $y'=f'(x^2)\cdot 2x=2xf'(x^2)$.

(2) $$y'=\frac{2f(x)f'(x)+2g(x)g'(x)}{2\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}}=\frac{f(x)f'(x)+g(x)g'(x)}{\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}}.$$

(3) $$y'=f'(\sin^2x)\cdot 2\sin x\cos x+f'(\cos^2x)\cdot 2\cos x(-\sin x)$$
$$=\sin 2x[f'(\sin^2x)-f'(\cos^2x)].$$

(4) $$y'=f'(e^x)\cdot e^x\cdot e^{g(x)}+f(e^x)\cdot e^{g(x)}\cdot g'(x)$$
$$=e^{g(x)}[e^xf'(e^x)+f(e^x)g'(x)].$$

例 19 设 $f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx$，其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是常数，且 $\forall\, x\in\mathbf{R}$，有 $|f(x)|\leqslant|\sin x|$. 证明：

$$|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\leqslant 1.$$

证 用导数定义证明. 显然，$f(0)=0$，$f'(0)=(a_1\cos x+2a_2\cos x+\cdots+na_n\cos x)|_{x=0}=a_1+2a_2+\cdots+na_n$. 故只需证

$|f'(0)| \leqslant 1$. 由定义，有

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}.$$

由于 $|f(x)| \leqslant |\sin x|$，所以 $\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \left|\frac{\sin x}{x}\right|$. 于是

$$\begin{aligned}|f'(0)| &= \left|\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\right| = \lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \lim_{x\to 0}\left|\frac{\sin x}{x}\right| \\ &= \left|\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right| = 1.\end{aligned}$$

故 $|f'(0)| \leqslant 1$，从而 $|a_1+2a_2+\cdots+na_n| \leqslant 1$.

例 20 设 $f(x)$ 在 x_0 可导，求

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x^4)-f(x_0)}{1-\cos(\Delta x^2)}.$$

解 利用等价无穷小代换与导数定义，有

$$\text{原式}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x^4)-f(x_0)}{\Delta x^4/2}=\frac{1}{2}f'(x_0).$$

例 21 设 $f(x)$ 满足 $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{3}{x}$，求 $f'(x)$.

解 利用变量代换与解方程组法. 等式两边对 x 求导，得

$$f'(x)+2f'\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{-1}{x^2}\right)=-\frac{3}{x^2}. \tag{①}$$

将 x 代换成 $\frac{1}{x}$，得 $f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=3x$. 两边对 x 求导，得

$$-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)+2f'(x)=3, \tag{②}$$

② × 2 − ①，消去 $\frac{1}{x}$ 因式，即得

$$f'(x)=2+\frac{1}{x^2}.$$

例 22 求函数 $f(x)=\begin{cases}x^2e^{-x^2}, & |x|\leqslant 1,\\ \frac{1}{e}, & |x|>1\end{cases}$ 的导数.

解 显然，$f(x)$ 在各段上是连续的，可用求导法则直接求

出. 但在分段函数的分界点上，导数必须用定义求出. 因此，有

$$f'(x)=\begin{cases}2xe^{-x^2}(1-x^2), & |x|<1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{1/e-1/e}{x-1}=0,$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2e^{-x^2}-1/e}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2e^{1-x^2}-1}{e(x-1)}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2e^{1-x^2}-x^2+x^2-1}{e(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1^-}(1+x)\frac{-x^2(e^{1-x^2}-1)}{e(1-x^2)}+\lim_{x\to1}\frac{x+1}{e}.$$

由于 $x\to1^-$ 时，$e^{1-x^2}-1\sim x^2$，所以

$$f'_-(1)=-\frac{2}{e}+\frac{2}{e}=0 \quad\Rightarrow\quad f'(1)=0.$$

而 $f(x)$ 是偶函数，故 $f'(-1)=f'(1)=0$. 于是

$$f'(x)=\begin{cases}2xe^{-x^2}(1-x^2), & |x|<1,\\ 0, & |x|\geqslant1.\end{cases}$$

例 23 设 $f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3e^{p(x-1)}+ax+b}{1+e^{p(x-1)}}$（$p$ 为不等于零的常数），问 a,b 为何值时，$f(x)$ 连续且可导.

解 去掉极限符号，就有

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x>1,\\ \frac{1}{2}(1+a+b), & x=1,\\ ax+b, & x<1.\end{cases}$$

若 $f_-(1)=f_+(1)=f(1)$，则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，即

$$a+b=1=\frac{1}{2}(1+a+b).$$

可知，当 $a+b=1$ 时，$f(x)$ 在 $x=1$ 处连续.

又 $$f'(x)=\begin{cases}2x, & x>1,\\ a, & x<1.\end{cases}$$

若 $f'_+(1)=f'_-(1)$，则 $f(x)$ 在 $x=1$ 可导，即

$$2=a \quad\Rightarrow\quad b=-1.$$

所以，当 $a=2,b=-1$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续而且可导.

例 24 利用恒等式

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\sin(x/2^n)}$$

求出表示和式

$$S_n=\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\tan\frac{x}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}$$

的公式.

解 恒等式两边取对数，得

$$\ln\left[\left|\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\right|\right]=\ln|\sin x|-\ln\left|2^n\sin\frac{x}{2^n}\right|.$$

两边同时对 x 求导，得

$$\frac{1}{2}\frac{-\sin(x/2)}{\cos(x/2)}+\frac{1}{4}\frac{-\sin(x/4)}{\cos(x/4)}+\cdots+\frac{1}{2^n}\frac{-\sin(x/2^n)}{\cos(x/2^n)}$$
$$=\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\cos(x/2^n)}{2^n\sin(x/2^n)}.$$

即 $-\left(\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\tan\frac{x}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}\right)=\cot x-\frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n}$，

于是 $$S_n=\frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n}-\cot x.$$

由上述例题可以看出，运用求导法则不仅可以求导数和导函数，还可以求极限，证明等式与不等式. 并且还可以利用导数求连续曲线的切线方程、法线方程和验证几何命题.

例 25 确定 a,b,c,d 的值，使曲线 $y=ax^4+bx^3+cx^2+d$ 与 $y=11x-5$ 在点(1,6)相切，经过点(−1,8)，并在点(0,3)有水平的切线.

解 依题意,曲线在点(1,6)与(0,3)有切线,得

$$(ax^4+bx^3+cx^2+d)'\Big|_{x=1}=(11x-5)'\Big|_{x=1},$$

$$(ax^4+bx^3+cx^2+d')\Big|_{x=0}=0,$$

又曲线经过点(1,6),(−1,8),(0,3),有

$$a+b+c+d=6,\ a-b+c+d=8,\ d=3.$$

综上所述,得方程组

$$\begin{cases}d=3,\\ a+b+c+d=6,\\ a-b+c+d=8,\\ 4a+3b+2c=11,\end{cases}\quad 解得\quad \begin{cases}a=3,\\ b=-1,\\ c=1,\\ d=3.\end{cases}$$

例 26 函数 $f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$,求在定义域内的不可导点.

解 $f(x)=(x^2-x-2)|(x+1)(x-1)x|$

$$=(x-2)|x||x-1|[(x+1)|x+1|].$$

因为 $f_1(x)=(x+1)|x+1|$ 在 $x=-1$ 可导,$f_1'(-1)=2$;$|x|$ 在 $x=0$ 不可导,$|x-1|$ 在 $x=1$ 不可导,所以 $f(x)$ 在定义域上除 $x=0,x=1$ 两点外均可导.

例 27 设周期 $T=4$ 的函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导,且

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1.$$

求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(5,f(5))$ 处切线的斜率.

解 $y=f(x)$ 曲线在 $x=5$ 处切线斜率 $f'(5)=f'(1)$.

由 $$\lim_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f(1-x)-f(1)}{-x}=\frac{1}{2}f'(1)=1,$$

得 $$f'(1)=f'(5)=-2.$$

注意 这里用了例 3 的结论. 周期函数的导数仍为周期函

数，且周期不变.

例 28 验证函数 $f(x)=\arctan\dfrac{x+a}{1-ax}$ 与 $g(x)=\arctan x$ 在 $ax>1$ 和 $ax<1$ 内有相同的导函数，并求 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的关系式.

解 在 $ax>1$ 和 $ax<1$ 内，有

$$f'(x)=1\Big/\left[1+\left(\frac{x+a}{1-ax}\right)^2\right]\cdot\frac{1-ax+a(x+a)}{(1-ax)^2}=\frac{1}{1+x^2},$$

$$g'(x)=\frac{1}{1+x^2},$$

所以 $\qquad f'(x)=g'(x)\quad\Rightarrow\quad f(x)-g(x)=c.$

当 $ax<1$ 时，设 $f(x)-g(x)=c_1$；

当 $ax>1$ 时，设 $f(x)-g(x)=c_2$.

设 $a>0$ ($a<0$ 类似讨论)，在 $ax<1$ 时，令 $x\to-\infty$，得

$$-\arctan\frac{1}{a}+\frac{\pi}{2}=c_1\Rightarrow c_1=\arctan a.$$

在 $ax>1$ 时，令 $x\to+\infty$，得

$$-\arctan\frac{1}{a}-\frac{\pi}{2}=c_2\Rightarrow c_2=\arctan a-\pi.$$

因此，$f(x)$ 与 $g(x)$ 有关系式

$$\arctan\frac{x+a}{1-ax}-\arctan x=\begin{cases}\arctan a, & ax<1,\\ \arctan a-\pi, & ax>1.\end{cases}$$

例 29 设 $f(x)$ 是周期 $T=5$ 的连续函数，它在 $x=0$ 的某邻域内满足关系式

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+\alpha(x),$$

其中 $\alpha(x)$ 当 $x\to0$ 时是 x 的高阶无穷小，且 $f(x)$ 在 $x=1$ 可导. 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(6,f(6))$ 处的切线方程.

解 对关系式两边取 $x\to0$ 时的极限，得

$$f(1)-3f(1)=0\quad\Rightarrow\quad f(1)=0.$$

又 $\qquad\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{8x}{\sin x}+\frac{\alpha(x)}{x}\,\frac{x}{\sin x}\right)=8.$$

即 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x)-f(1)}{\sin x-\sin 0}+3\lim_{x\to 0}\frac{f(1-\sin x)-f(1)}{(-\sin x+\sin 0)}$

$$=f'(1)+3f'(1)=8\quad\Rightarrow f'(1)=2.$$

因为周期函数的导数仍为周期函数，且 T 不变，所以

$$f'(6)=f'(1)=2.$$

由 $f(6)=f(1)=0, f'(6)=2$，得切线方程

$$y=2(x-6)\quad 即\quad 2x-y-12=0.$$

例 30 求下列函数的导数：

(1) $f(x)=[x]\sin\pi x$； (2) $f(x)=x\left|\cos\dfrac{\pi}{x}\right|, f(0)=0$；

(3) $f(x)=\sqrt{\sin x^2}$.

解 (1) 当 x 不为整数时，$f'_-(x)=f'_+(x)=\pi[x]\cos\pi x$.

当 x 为整数时，由导数定义有

$$f'_+(k)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{[k+\Delta x]\sin\pi(k+\Delta x)-0}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{k\sin(\pi\Delta x)\cdot\cos k\pi}{\Delta x}=k\pi(-1)^k.$$

类似可得 $f'_-(k)=\pi(k-1)(-1)^k.$

(2) 当 $x\neq\dfrac{2}{2k+1}$ (k 为整数) 时，有

$$f'_-(x)=f'_+(x)=\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|+\frac{\pi}{x}\cdot\frac{|\cos(\pi/x)|}{\cos(\pi/x)}\cdot\sin\frac{\pi}{x}.$$

当 $x=\dfrac{2}{2k+1}$ 时，由导数定义有

$$f'_-\left(\frac{2}{2k+1}\right)=-\frac{2k+1}{2}\pi,\quad f'_+\left(\frac{2}{2k+1}\right)=\frac{2k+1}{2}\pi,$$

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{1}{\Delta x}\left[\Delta x\left|\cos\frac{\pi}{\Delta x}\right|\right]=\lim_{\Delta x\to 0^-}\left|\cos\frac{\pi}{\Delta x}\right|,$$

所以，$f'_-(0)$ 不存在. 类似地，$f'_+(0)$ 也不存在.

(3) 当 $x=\sqrt{2k\pi}, k=0$ 时，有

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\sqrt{\sin(\Delta x)^2}}{\Delta x}=1,$$

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-\sqrt{\sin(\Delta x)^2}}{\Delta x}=-1.$$

当 $x=\sqrt{2k\pi}$, $k=1,2,\cdots$ 时,有

$$f'_+(\sqrt{2k\pi})=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\sqrt{\sin(\sqrt{2k\pi}+\Delta x)^2}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}\sqrt{\frac{\sin[2\Delta x\sqrt{2k\pi}+(\Delta x)^2]}{2\Delta x\sqrt{2k\pi}+(\Delta x)^2}}\cdot\sqrt{\frac{2\sqrt{2k\pi}}{\Delta x}+1}$$

$$=+\infty.$$

类似可得 $f'_-(\sqrt{2k\pi})=-\infty$, $k=1,2,\cdots$(也可由奇偶性得),

$$f'_+(\sqrt{(2k+1)\pi})=+\infty,\ f'_-(\sqrt{(2k+1)\pi})=-\infty.$$

当 $\sqrt{2k\pi}<|x|<\sqrt{(2k+1)\pi}$, $k=0,1,2,\cdots$ 时,函数有意义,由求导法则,得

$$f'_-(x)=f'_+(x)=\frac{x\cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}}.$$

例 31 设 $f(x)$ 可导,$f'(0)=1$,$y=f(x^2+\sin^2 x)+f(\arctan x)$,求 $y'(0)$.

解
$$y'=f'(x^2+\sin^2 x)\cdot(2x+\sin 2x)$$
$$+f'(\arctan x)\frac{1}{1+x^2},$$

由 $f'(0)=1$,得 $y'(0)=f'(0)\cdot 0+f'(0)\cdot 1=1$.

例 32 求下列函数的导数:

(1) $y=\ln\arcsin(2x)$; (2) $y=e^x(x^2+2x-1)\arcsin x$.

解 (1) 用复合函数求导法则,得

$$y'=\frac{1}{\arcsin(2x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\cdot 2=\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}\cdot\arcsin(2x)}.$$

(2) 用积的求导法则,也可用取对数求导法取

$$\ln y = x + \ln(x^2 + 3x - 1) + \ln\arcsin x.$$

$$\frac{1}{y}y' = 1 + \frac{2x+3}{x^2+3x-1} + \frac{1}{\arcsin x}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$y' = [e^x(x^2+3x-1) + e^x(2x+3)]\arcsin x + e^x\frac{x^2+3x-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= e^x(x^2+5x+2)\arcsin x + e^x\frac{x^2+3x-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

例 33 讨论函数 $f(x) = \arcsin\sqrt{1-x^2}$ 的导数.

解 由复合函数求导法则,有

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{|x|}\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \begin{cases} 1/\sqrt{1-x^2}, & -1 < x < 0, \\ -1/\sqrt{1-x^2}, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

而 $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin\sqrt{1-x^2}-\pi/2}{x},$$

显然,当 $x \to 0$ 时,$y \to 0^-$. 这里

$$y = \arcsin\sqrt{1-x^2} - \frac{\pi}{2},\quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right],$$

则有 $$x = \begin{cases} \sin y, & -1 < x < 0 \\ -\sin y, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

所以 $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \begin{cases} \lim\limits_{y\to 0^-}\frac{y}{\sin y} = 1, & x < 0, \\ \lim\limits_{y\to 0^-}\frac{-y}{\sin y} = -1, & x > 0. \end{cases}$$

从而知上述极限不存在,所以 $f(x)$ 在 $x = 0$ 不可导.

例 34 证明:若函数 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ 在点 x 均可导,且 $f_i(0) \neq 0$ $(i = 1,2,\cdots,n)$. 设 $g(x) = f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)$,则函数 $g(x)$ 也在点 x 可导,且

$$g'(x) = g(x)\left[\frac{f_1'(x)}{f_1(x)} + \frac{f_2'(x)}{f_2(x)} + \cdots + \frac{f_n'(x)}{f_n(x)}\right].$$

证　由乘积的导数公式，得

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= \sum_{i=1}^{n} f_1(x)f_2(x)\cdots f_i'(x)\cdots f_n(x) \\
&= \sum_{i=1}^{n} g(x)\cdot\frac{f_1(x)f_2(x)\cdots f_i'(x)\cdots f_n(x)}{f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)} \\
&= g(x)\left[\frac{f_1'(x)}{f_1(x)}+\frac{f_2'(x)}{f_2(x)}+\cdots+\frac{f_n'(x)}{f_n(x)}\right].
\end{aligned}
$$

第二节　隐函数与参数方程确定函数的导数

主要内容

1. 方程 $F(x,y)=0$ 决定一个 y 关于 x 的函数 $y=y(x)$，称为隐函数. 隐函数常用两种方法求导.

(1) 对方程 $F(x,y)=0$ 两边关于 x 求导，因 y 是 x 的函数，用复合函数求导法则进行. 然后从等式中解出 y'.

(2) 对方程 $F(x,y)=0$ 两边求微分，利用一阶微分形式不变性，把 y 视作自变量，得含 $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}y$ 的等式，再解出 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

2. 设 $y=y(x)$ 的函数关系由参数形式

$$
\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \quad t_0\leqslant t\leqslant t_1
$$

确定. $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 在 (t_0,t_1) 上可微，$\varphi(t)$ 在 (t_0,t_1) 上严格单调，且 $\varphi'(t)\neq 0$，则由反函数求导法则和复合函数求导法则，有

$$
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},
$$

$$
\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}.
$$

疑难解析

1. 怎样求极坐标方程 $r=f(\theta)$ 给出曲线 C 在曲线上点 $M(\theta,f(\theta))$ 处切线的斜率和过 M 点的切线与向径 oM 的夹角?

答　求极坐标方程 $r=f(\theta)$ 给出的曲线 C 在曲线上点 $M(\theta,f(\theta))$ 处切线的斜率,就是求 $r=f(\theta)$ 转化的显式方程 $y=f(x)$ 在对应点 (x,y) 的导数.

由 $r=f(\theta)$ 得到以 θ 为参数的方程

$$\begin{cases} x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta, \\ y = r\sin\theta = f(\theta)\cos\theta, \end{cases} \quad \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2.$$

于是

$$\tan\alpha = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta} = \frac{f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta}{f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta} = \frac{f'(\theta)\tan\theta + f(\theta)}{f'(\theta) - f(\theta)\tan\theta}.$$

从图 3.1 可以看出,过点 M 的切线与 oM 的夹角 φ 满足

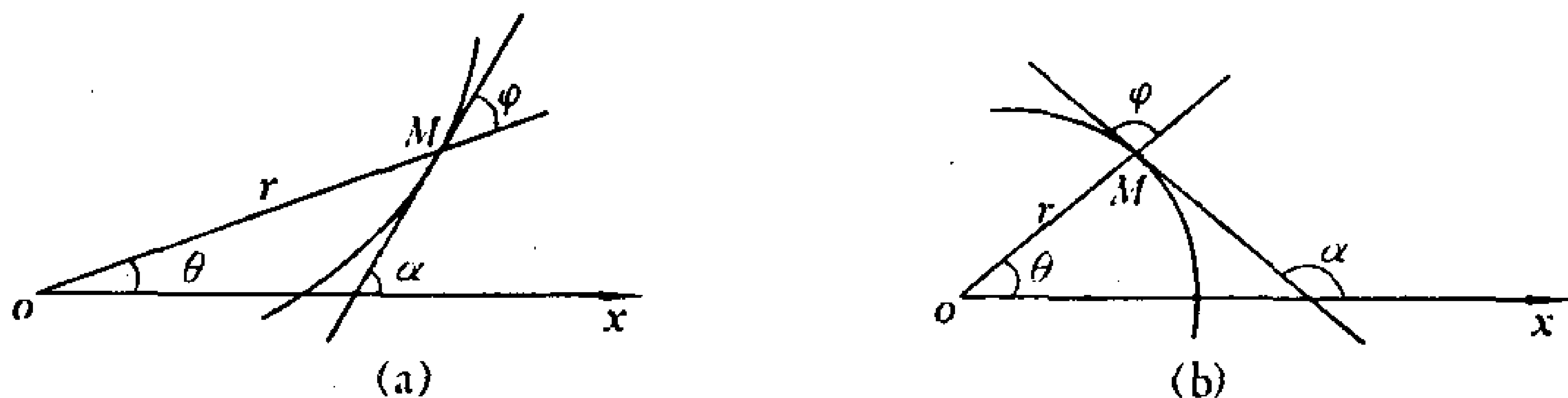


图 3.1

$$\tan\varphi = \tan(\alpha-\theta) = \frac{\tan\alpha - \tan\theta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\theta} = \frac{f(\theta)}{f'(\theta)}.$$

即

$$\varphi = \arctan\frac{f(\theta)}{f'(\theta)}.$$

2. 若曲线 C 的参数方程 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ 在 t_0 都可导,但 $\varphi'(t_0)=\psi'(t_0)=0$,问:曲线在点 $(\varphi(t_0),\psi'(t_0))$ 有什么几何性质?若只有一个导数等于零呢?

答　当 $\varphi'(t_0)=\psi'(t_0)=0$ 时,有 $[\varphi'(t_0)]^2+[\psi'(t_0)]^2=0$,

这时点$(x_0,y_0)=(\varphi(t_0),\psi(t_0))$是曲线$C$的奇异点.

如,星形线(见图3.2)的参数方程为

$$\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t,\end{cases}\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi, a>0.$$

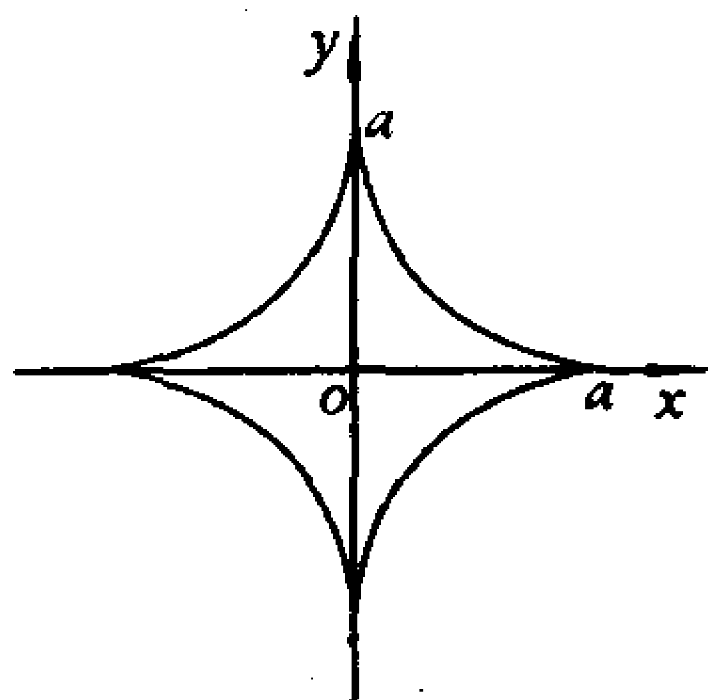


图 3.2

有
$$x'(t)=-3a\cos^2 t\sin t,$$
$$y'(t)=3a\sin^2 t\cos t.$$

显然,当$t_0=0,\pi/2,\pi,3/2\pi$时,$x'(t_0)=y'(t_0)=0$. 所以,点$(a,0),(0,a),(-a,0),(0,-a)$都是星形线的奇异点. 从星形线的图形知,这四个点又是星形线的尖点. 一般地,尖点是奇异点,但奇异点不全是尖点.

当$\varphi'(t_0)\neq 0$,而$\psi'(t_0)=0$时,由于在t_0的邻域内存在反函数$t=\varphi^{-1}(x)$,故$\tan\alpha=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}=0$,即曲线$C$在点$(\varphi(t_0),\psi(t_0))$有水平(平行于$x$轴)的切线.

当$\varphi'(t_0)=0$,而$\psi'(t_0)=0$时,$\tan\alpha=\dfrac{dy}{dx}=\infty$,即曲线$C$在点$(\varphi(t_0),\psi(t_0))$有竖直(平行于$y$轴)的切线.

以上两种情形都有$[\varphi'(t_0)]^2+[\psi'(t_0)^2]\neq 0$,所以曲线$C$在点$(\varphi(t_0),\psi(t_0))$存在切线.

方法、技巧与典型例题分析

一、隐函数的导数

在主要内容1中,我们已经指出了隐函数求导的两种方法. 当隐函数为幂指函数时,我们还可用取对数求导法来进行.

例1 求下列隐函数的导数$\dfrac{dy}{dx}$:

(1) $\arctan\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$;　(2) $e^{xy}+x^2y-1=0$;

(3) $x^y = y^x$；　　　　　　　　(4) $\cos(xy) = x^3y^3$.

解　(1) 用复合函数求导法则，有

$$\frac{1}{1+(y/x)^2}\left(\frac{y'}{x}-\frac{y}{x^2}\right)=\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+y^2}(2x+2yy'),$$

解得
$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x+y}{x-y}.$$

(2) 对等式两边求微分，因为

$$\mathrm{d}e^{xy}=e^{xy}\mathrm{d}(xy)=e^{xy}(x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x),$$

$$\mathrm{d}(x^2y)=2xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y,$$

所以
$$(e^{xy}+x)x\mathrm{d}y+(e^{xy}+2x)y\mathrm{d}x=0,$$

即
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{(e^{xy}+2x)y}{(e^{xy}+x)x}.$$

(3) 用取对数求导法，有

$$y\ln x=x\ln y,$$

$$y'\ln x+\frac{y}{x}=\ln y+\frac{x}{y}y',$$

解得
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}\cdot\frac{y-x\ln y}{x-y\ln x}=\frac{y^2-xy\ln y}{x^2-xy\ln x}.$$

(4) 对等式两边求微分，有

$$\mathrm{d}\cos(xy)=\mathrm{d}(x^3y^3)$$

$$\Rightarrow -\sin(xy)\mathrm{d}(xy)=y^3\mathrm{d}(x^3)+x^2\mathrm{d}(y^3)$$

$$\Rightarrow -\sin(xy)(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)=3x^2y^3\mathrm{d}x+3x^3y^2\mathrm{d}y,$$

得
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{y\sin(xy)+3x^2y^3}{x\sin(xy)+3x^3y^2}$$

$$=-\frac{y}{x}\cdot\frac{\sin(xy)+3x^2y^2}{\sin(xy)3x^2y^2}=-\frac{y}{x}.$$

例 2　设 $y=f(x+y)$，其中 f 二阶可导，且其一阶导数不等于 1，求$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解　等式两边对 x 求导，得

$$y'=f'(x+y)(1+y')\Rightarrow y'=\frac{f'(x+y)}{1-f'(x+y)}.$$

上式两边再次对 x 求导，得

$$y'' = f''(x+y)(1+y')^2 + f'(x+y)y''$$

$$\Rightarrow y'' = \frac{f''(x+y)(1+y')^2}{1-f'(x+y)}.$$

将 y' 代入上式，有

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{f''(x+y)}{[1-f'(x+y)]^3}.$$

例 3 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x^{y^2}+y^2\ln x=4$ 确定，求 $\frac{dy}{dx}$.

解 将方程改写为 $e^{y^2\ln x}+y^2\ln x=4$，进行变量代换，令 $u=y^2\ln x$，则有 $e^u+u=4$.

对 x 求导，得 $(e^u+1)\frac{du}{dx}=0\Rightarrow\frac{du}{dx}=0$，即

$$2y\cdot y'\ln x+\frac{y^2}{x}=0\Rightarrow y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{2x\ln x}.$$

此例说明，在解题过程中加强观察，可能会找到简便的解法.

例 4 设 $y=y(x)$ 是由方程组

$$\begin{cases} x=3t^2+2t+3, \\ e^y\sin t-y+1=0 \end{cases}$$

所确定的隐函数，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

解 两个方程分别对 t 求导，得

$$\begin{cases} x'_t=6t+2, \\ y'_t=\frac{e^y\cot t}{1-e^y\sin t}=\frac{e^y\cos t}{2-y}, \end{cases}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{e^y\cos t}{2(2-y)(3t+1)}.$$

故

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left[\frac{e^y\cos t}{2(2-y)(3t-1)}\right]\Big/\frac{dx}{dt}$$

$$=\frac{e^y(3t+1)[(3-y)y'_t\cos t-(2-y)\sin t]-3(2-y)e^y\cos t}{4(3t-1)^3(2-y)^2}.$$

例 5 设 $\arcsin x\cdot\ln y-e^{2x}+\tan y=0$，求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

解　方程两边对 x 求导，得

$$\frac{\ln y}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{\arcsin x}{y}y'-2e^{2x}+\frac{1}{\cos^2 y}y'=0,$$

解得　$$y'=\left[2e^{2x}-\frac{\ln y}{\sqrt{1-x^2}}\right]\Big/\left[\frac{\arcsin x}{y}+\frac{1}{\cos^2 y}\right].$$

由于 $x=0$ 时，$y=\frac{\pi}{4}$，故

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=1-\frac{1}{2}\ln\frac{\pi}{4}.$$

二、参数方程确定函数的导数

例 6　设摆线的参数方程为

$$\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t),\end{cases}$$

(1) 求摆线上任一点 P 处切线与法线的斜率；

(2) 求方程确定的函数 $y=y(x)$ 的二阶导数$\frac{d^2y}{dx^2}$.

解　(1) $$k_{切}=\frac{dy}{dx}=\frac{y_t'}{x_t'}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{\sin t}{1-\cos t},$$

$$k_{法}=-1\Big/k_{切}=-\frac{1-\cos t}{\sin t}.$$

(2) $$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\frac{\sin t}{1-\cos t}\Big/\frac{dx}{dt}$$

$$=\frac{a(1-\cos t)a\cos t-a\sin t a\sin t}{a^3(1-\cos)^3}=-\frac{1}{a(1-\cos t)^2}.$$

例 7　设函数 $f(t)$ 三次可微，且 $f''(t)\neq 0$，有

$$\begin{cases}x=f'(t),\\ y=tf'(t)-f(t),\end{cases}$$

求$\frac{d^3y}{dx^3}$.

解　$$\frac{dy}{dx}=\frac{d[tf'(t)-f(t)]}{df'(t)}=\frac{tf''(t)}{f''(t)}=t.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}t\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{1}{f''(t)}.$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{f''(t)}\right]\Big/\frac{dx}{dt}=-\frac{f'''(t)}{[f''(t)]^3}.$$

例 8 求曲线 $x=\dfrac{2t+t^2}{1+t^3}, y=\dfrac{2t-t^2}{1+t^3}$ 在 $t=0,1,\infty$ 各点处的切线方程与法线方程.

解 $x'_t=\dfrac{2+2t-4t^3-t^4}{(1+t^3)^2},\quad y'_t=\dfrac{2-2t-4t^3+t^4}{(1+t^3)^2}.$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2-2t-4t^3+t^4}{2+2t-4t^3-t^4},\quad k_{切}=\frac{dy}{dx},\quad k_{法}=-\frac{dx}{dy}.$$

(1) $t=0,(x,y)=(0,0),k_{切}=1,k_{法}=-1.$

切线方程 $y=x$,法线方程 $y=-x$.

(2) $t=1,(x,y)=\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2}\right),k_{切}=3,k_{法}=-\dfrac{1}{3}.$

切线方程 $3x-y=4$,法线方程 $x+3y=3$.

(3) $t=\infty,(x,y)=(0,0),k_{切}=-1,k_{法}=1.$

切线方程 $y=-x$,法线方程 $y=x$.

例 9 证明:星形线

$$x=a\cos^3t,\quad b=a\sin^3t,\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$$

上除 $t_0=0,\dfrac{\pi}{2},\pi,\dfrac{3}{2}\pi$ 外,切线被两坐标轴所截线段长为一定数.

证 因为 $x'_t=-3a\cos^2t\sin t,\quad y'_t=3a\sin^2t\cos t.$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{3a\sin^2t\cos t}{3a\cos^2t\sin t}=-\tan t.$$

过点 $(x(t_0),y(t_0))$ 的切线方程为

$$y-a\sin^3t_0=-\tan t_0(x-a\cos t_0),$$

所以,切线与 x 轴的交点是 $M(a\cos t_0,0)$,与 y 轴的交点是 $N(0,a\sin t_0)$,于是切线长为

$$|MN|=\sqrt{(a\cos t_0)^2+(a\sin t_0)^2}.$$

例 10 设 $x=\sqrt{1+t}, y=\sqrt{1-t}$ 确定函数 $y=y(x)$,证明:$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y},\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{2}{y^3}.$

证 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y_t'}{x_t'}=\frac{-1/(2\sqrt{1-t})}{1/(2\sqrt{1+t})}=-\frac{\sqrt{1+t}}{\sqrt{1-t}}=-\frac{x}{y}$,

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\left(-\frac{x}{y}\right)_x'=-\frac{y-xy_x'}{y^2}=-\frac{y-x(-x/y)}{y^2}$$

$$=-\frac{y^2+x^2}{y^3}=-\frac{(\sqrt{1-t})^2+(\sqrt{1+t})^2}{y^3}=-\frac{2}{y^3}.$$

例 11 证明：心脏线 $r=a(1-\cos\theta)$ $(a>0)$ 的向径与切线间的夹角等于向径极角的二分之一.

证 由疑难解析 1 知，$f(\theta)=a(1-\cos\theta)$，$f'(\theta)=a\sin\theta$，故

$$\tan\varphi=\frac{f(\theta)}{f'(\theta)}=\frac{a(1-\cos\theta)}{a\sin\theta}=\frac{2\sin^2(\theta/2)}{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)}$$
$$=\tan(\theta/2).$$

例 12 求对数螺线 $\rho=\mathrm{e}^{\varphi}$ 在点 $(\rho,\varphi)=\left(\mathrm{e}^{\pi/2},\frac{\pi}{2}\right)$ 处的切线的直角坐标方程.

解 将极坐标方程 $\rho=\mathrm{e}^{\varphi}$ 转换成直角坐标系下的参数方程：$x=\mathrm{e}^{\varphi}\cos\varphi$，$y=\mathrm{e}^{\varphi}\sin\varphi$. 所以，切线斜率为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\sin\varphi+\cos\varphi}{\cos\varphi-\sin\varphi}\Rightarrow\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\varphi=\pi/2}=-1.$$

当 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 时，$x=0$，$y=\mathrm{e}^{\pi/2}$. 故切线方程为

$$y-\mathrm{e}^{\pi/2}=-x,\quad 即\quad x+y=\mathrm{e}^{\pi/2}.$$

例 13 设 $\rho=\rho(x)$ 是抛物线 $y=\sqrt{x}$ 上任意一点 $M(x,y)$ $(x\geqslant 1)$ 处的曲率半径，$s=s(x)$ 是抛物线上介于点 $A(1,1)$ 与 M 之间的弧长，计算 $3\rho\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}s^2}-\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}\right)^2$ 的值(直角坐标系下曲率公式为 $\kappa=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$).

解 因为 $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$，$y''=-\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$，所以抛物线在点

$M(x,y)$ 处的曲率半径为

$$\rho=\rho(x)=\frac{1}{\kappa}=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}=\frac{1}{2}(4x+1)^{3/2}.$$

抛物线上$\overparen{AB}$ 的弧长

$$s=s(x)=\int_1^x\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x=\int_1^x\sqrt{1+1/(4x)}\mathrm{d}x.$$

显然,ρ 和 s 都是参变量 x 的函数. 由参数方程确定函数的导数公式,得

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s/\mathrm{d}x}=\frac{1/2\cdot 3/2(4x+1)^{1/2}\cdot 4}{\sqrt{1+1/(4x)}}=6\sqrt{x},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}\right)\Big/\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}=\frac{6}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+1/(4x)}}=\frac{6}{\sqrt{4x+1}}.$$

因此,有

$$3\rho\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}s^2}-\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}\right)^2=3\cdot\frac{1}{2}(4x+1)^{3/2}\cdot\frac{6}{\sqrt{4x+1}}-36x=9.$$

例 14 已知曲线的极坐标方程是 $r=1-\cos\theta$,求该曲线上对应于 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 处的切线与法线的直角坐标方程.

解 曲线的参数方程为:$x=(1-\cos\theta)\cos\theta, y=(1-\cos\theta)\sin\theta$,即 $x=\cos\theta-\cos^2\theta, y=\sin\theta-\sin\theta\cos\theta$.

切点坐标为$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4},\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\theta=\pi/6}=\left.\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=\pi/6}=\left.\frac{\cos\theta-\cos^2\theta+\sin^2\theta}{-\sin\theta+2\cos\theta\sin\theta}\right|_{\theta=\pi/6}=1.$$

所以,切线方程和法线方程为

$$\begin{cases}y-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}=x-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{4},\\ y-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}=-\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{4}\right),\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-y-\frac{3\sqrt{3}}{4}+\frac{5}{4}=0,\\ x+y-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}=0.\end{cases}$$

例 15 参数方程 $x=\mathrm{e}^t\sin t, y=\mathrm{e}^t\cos t$ 确定函数 $y=y(x)$，证明：$y''(x+y)^2=2(xy'-y)$.

证 由参数方程的求导法，有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\mathrm{e}^t(\cos t-\sin t)}{\mathrm{e}^t(\sin t+\cos t)}=1-\frac{2\sin t}{\cos t+\sin t},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(1-\frac{2\sin t}{\cos t+\sin t}\right)\bigg/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{-2}{\mathrm{e}^t(\cos t+\sin t)^3},$$

故 $$y''(x+y)^2=\frac{-2}{\mathrm{e}^t(\cos t+\sin t)^3}\cdot\mathrm{e}^{2t}(\sin t+\cos t)^2=\frac{-2\mathrm{e}^t}{\cos t+\sin t},$$

$$2(xy'-y)=2\left[x\left(1-\frac{2\sin t}{\cos t+\sin t}\right)-\mathrm{e}^t\cos t\right]=2\mathrm{e}^t\left(\sin t\frac{\cos t-\sin t}{\cos t+\sin t}-\cos t\right)=\frac{-2\mathrm{e}^t}{\cos t+\sin t}.$$

于是 $$y''(x+y)^2=2(xy'-y).$$

例 16 参数方程 $x=2t+|t|, y=5t^2+4t|t|$ 确定函数 $y=y(x)$，求 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

解 因为 $|t|$ 在 $t=0$ 不可导，故不能直接使用参数方程确定函数的求导法则，需先求出函数 $y=y(x)$ 的表达式

由 $$x=\begin{cases}3t, & t\geqslant 0,\\ t, & t<0,\end{cases}\qquad y=\begin{cases}9t^2, & t\geqslant 0,\\ t^2, & t<0\end{cases}$$

知，x 与 t 同正负，故

$$t=\begin{cases}\dfrac{x}{3}, & x\geqslant 0,\\ x, & x<0,\end{cases}\Rightarrow y=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ x^2, & x<0.\end{cases}$$

所以 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=0.$$

第三节　微分与高阶导数

主要内容

1. 若函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的增量 Δy 可以表示为 Δx 的线性函数 $A\Delta x$ 与较 Δx 较高阶的无穷小量之和：$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$，则称函数 f 在点 x_0 可微，$A\Delta x$ 为函数 f 在点 x_0 的微分，记作

$$\mathrm{d}y\Big|_{x=x_0} = A\Delta x \quad 或 \quad \mathrm{d}(f(x))\Big|_{x=x_0} = A\Delta x,$$

A 是与 Δx 无关的常数.

2. 函数 f 在 x_0 可微 $\Longleftrightarrow$ 函数 f 在 x_0 可导. 此时 $A = f'(x_0)$.

3. 若 f 在区间 I 上每点都可微，则称 f 为 I 上的可微函数. f 在 I 上的微分记作 $\mathrm{d}y = f'(x)\Delta x$，它不仅依赖于 Δx，也依赖于 x.

4. 有如下微分运算法则：

(1) $\mathrm{d}[u(x) \pm v(x)] = \mathrm{d}u(x) \pm \mathrm{d}v(x)$；

(2) $\mathrm{d}[u(x)v(x)] = v(x)\mathrm{d}u(x) + u(x)\mathrm{d}v(x)$；

(3) $\mathrm{d}\left(\dfrac{v(x)}{u(x)}\right) = \dfrac{u(x)\mathrm{d}v(x) - v(x)\mathrm{d}u(x)}{u^2(x)}$；

(4) $\mathrm{d}[(f\circ g)(x)] = f'(u)g'(x)\mathrm{d}x = f'(g(x))g'(x)\mathrm{d}u$.

当式(4)中以 $\mathrm{d}u = g'(x)\mathrm{d}x$ 代入时，也可写作 $\mathrm{d}y = f'(u)\mathrm{d}u$，与 $\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$ 形式上完全一样. 即不论 x 是自变量还是 u 是中间变量，它都有相同的微分形式. 此性质称为一阶微分的形式不变性.

5. 若函数 $y=f(x)$ 的 $n-1$ 阶导数 $f^{(n-1)}(x)$ 在点 x 可导，则称其导数为 f 在 x 的 n 阶导数，记作 $f^{(n)}(x)$，$y^{(n)}$，$n=2,3,\cdots$. n 阶导数称为高阶导数.

6. $y = uv$ 的 n 阶导数公式称莱布尼茨公式.

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v^{(0)} + C_n^1 u^{(n-1)}v' + C_n^2 u^{(n-2)}v'' + \cdots + C_n^k u^{(n-k)}v^k + \cdots + u^{(0)}v^{(n)}.$$

7. 若 $y = f[g(x)]$,则 $y' = f'[g(x)] \cdot g'(x)$,

$$y'' = f''[g(x)] \cdot [g'(x)]^2 + f'[g(x)] \cdot g''(x).$$

8. 若 $y = f(x)$ 为严格单调的连续函数,其反函数 $x = \varphi(y)$ 有高阶导数,且 $\varphi'(y) \neq 0$,则

$$y'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}, \quad y''(x) = -\frac{\varphi''(y)}{[\varphi'(y)]^3},$$

$$y'''(x) = \frac{3[\varphi''(y)]^2 - \varphi'(y) \cdot \varphi'''(y)}{[\varphi'(y)]^5}.$$

9. 若函数 $f = f(x)$ 的 $n-1$ 阶微分 $\mathrm{d}^{n-1}f(x)$ 在点 x 可微,则称其微分为 f 在 x 的 n 阶微分,记作 $\mathrm{d}^n f(x)$,$\mathrm{d}^n y$,$n = 1,2,\cdots$. 一般有 $\mathrm{d}^n y = y^{(n)}\mathrm{d}x^n$.

疑 难 解 析

1. 函数 $f(x)$ 在一点 x_0 的导数与微分有什么区别?

答　从理论上讲,导数与微分是等价的,它们互为充要条件.但从实际意义与几何上看,它们有着很大的区别,表现为:

(1) 导数 $f'(x_0)$ 是一个数值,是函数增量 Δy 与自变量增量 Δx 之比 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 当 $\Delta x \to 0$ 时的极限,它反映函数 $f(x)$ 在点 x_0 的变化率.而微分 $\mathrm{d}y = f'(x_0)(x - x_0)$ 是自变量增量 $\Delta x = (x - x_0)$ 的线性函数,是一个无穷小量,它反映函数 $f(x)$ 在点 x_0 增量的线性主部.两者的实际意义相去甚远.

(2) 在几何意义上,导数 $f'(x_0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 在点 (x_0, y_0) 的切线斜率,而微分 $\mathrm{d}y = f'(x_0)(x - x_0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 在点 (x_0, y_0) 的切线在区间 $(x_0, x_0 + \Delta x)$ 上的纵坐标的增量(见图 3.3).

(3) 在使用上,导数主要用于函数性质的理论研究与应用问

题变化率的讨论，而微分主要用于微分运算与近似计算，误差估计.

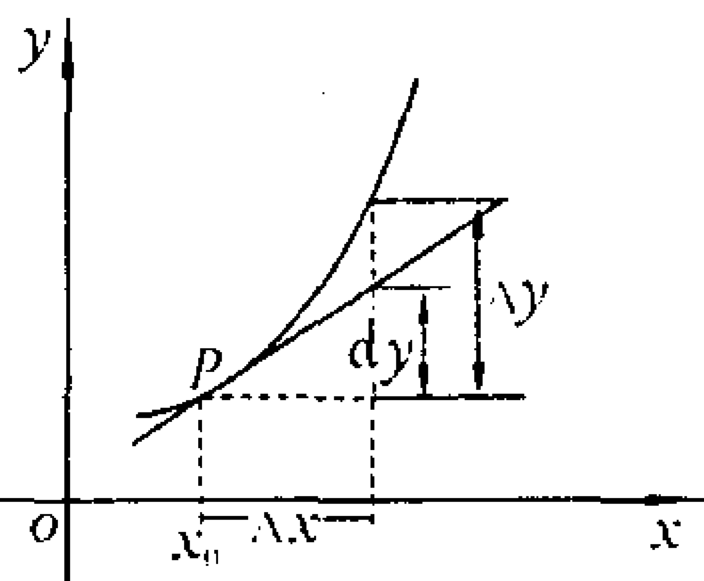


图 3.3

2. 为什么二阶微分不再具有形式不变性?

答 对于复合函数 $y = f(u), u = g(x)$，具有一阶微分的形式不变性，即

$$dy = f'(u)du.$$

但是，二阶微分时，$d^2y \neq f''(u)du^2$. 这是因为，当对 $dy = f'(u)du$ 两边求微分时，有

$$d^2y = d[f'(u)] \cdot dy + f'(u)d(du) = f''(u)du^2 + f'(u)d^2u.$$

因为 u 是中间变量而不是自变量，一般地，$d^2u \neq 0$，所以多了一项，不再有微分形式不变性.

方法、技巧与典型例题分析

对于微分运算，常用两种方法：一是用一阶微分的形式不变性直接求出，二是先求出导数，再配以自变量微分得到函数的微分. 求高阶微分时，要注意微分形式不变性已不再成立. 求高阶导数时，一般采用逐阶求导法. 对复合函数求导. 一定要注意链式法则的运用. 求高阶导数最关键的是从前几阶导数中总结和发现规律，写出高阶导数公式.

一、微分问题

例 1 求下列微分:

(1) $y = e^{-ax}\cos bx$; (2) $y = x^2\ln x^2 + \cos x^2$;

(3) $\cos(xy) = x^2y^2$; (4) $y = \ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right]$.

解 (1) 由一阶微分形式不变性，有

$$dy = d(e^{-ax}\cos bx) = \cos bx d(e^{-ax}) + e^{-ax}d(\cos bx)$$
$$= [\cos bx e^{-ax}(-a) + e^{-ax}(-\sin bx) \cdot b]dx$$

$$= -e^{-ax}[a\cos bx + b\sin bx]dx.$$

（2）因为 $y' = 2x\ln x^2 + 2x - \sin x^2 \cdot 2x$，所以

$$dy = 2x[\ln x^2 + 1 - \sin x^2]dx.$$

（3）所给方程是一个隐函数，两边求微分，得

$$d\cos(xy) = d(x^2y^2),$$

$$-\sin(xy)d(xy) = y^2dx^2 + x^2dy^2,$$

$$-\sin(xy)(xdy + ydx) = 2xy^2dx + 2x^2ydy,$$

经整理，解出

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y\sin(xy) + 2xy^2}{x\sin(xy) + 2x^2y} = -\frac{y}{x}.$$

故

$$dy = -\frac{y}{x}dx.$$

（4）由一阶微分形式不变性，有

$$dy = d\ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right] = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)} \cdot d\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$$

$$= 1\Big/\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right]d\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$$

$$= 1\Big/\sin\left[2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right]dx = \frac{1}{\sin(\pi/2 + x)} = \frac{dx}{\cos x} = \sec x dx.$$

例 2 讨论由参数方程

$$\begin{cases} x = 2t + |t|, \\ y = 3t^2 + t|t| \end{cases}$$

确定的函数 $y = f(x)$ 的微分 dy.

解 因为

$$x = \begin{cases} t, & t \leqslant 0, \\ 3t, & t > 0, \end{cases} \quad y = \begin{cases} 2t^2, & t \leqslant 0, \\ 4t^2, & t > 0, \end{cases}$$

显然，x 与 t 同正负，有

$$t = \begin{cases} x, & x \leqslant 0, \\ x/3, & x > 0. \end{cases}$$

代入 y 的表达式，得

$$y=\begin{cases}2x^2, & x\leqslant 0,\\ 4x^2/9, & x>0.\end{cases}$$

由于 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，所以

$$\mathrm{d}y=\begin{cases}4x\mathrm{d}x, & x\leqslant 0,\\ 8x/9\cdot\mathrm{d}x, & x>0.\end{cases}$$

例 3　设 $y=\sin[u^2(x)+v^2(x)]$，$u(x)$，$v(x)$ 可微，求 $\mathrm{d}y$.

解　y 是抽象函数，用一阶微分的形式不变性来求.

$$\begin{aligned}\mathrm{d}y&=\cos[u^2(x)+v^2(x)]\mathrm{d}[u^2(x)+v^2(x)]\\&=\cos[u^2(x)+v^2(x)][2u(x)\mathrm{d}u(x)+2v(x)\mathrm{d}v(x)]\\&=2\cos[u^2(x)+v^2(x)]\cdot[u(x)u'(x)+v(x)v'(x)]\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

例 4　设函数 $y=y(x)$ 由方程 $2^{xy}=x+y$ 确定，求 $\mathrm{d}y\Big|_{x=0}$.

解　$y(x)$ 是一个隐函数，要对方程两边求微分，利用一阶微分形式不变性，得

$$\mathrm{d}2^{xy}=\mathrm{d}(x+y),$$

$$2^{xy}\ln 2(x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x)=\mathrm{d}x+\mathrm{d}y.$$

解得
$$\mathrm{d}y=\frac{\ln 2\cdot 2^{xy}\cdot y-1}{1-\ln 2\cdot 2^{xy}\cdot x}\mathrm{d}x.$$

因 $x=0$ 时，由方程可得 $y=1$，故

$$\mathrm{d}y\Big|_{x=0}=(\ln 2-1)\mathrm{d}x.$$

例 5　设 $f(x)>0$ 且处处可微，求 $\mathrm{d}f\left[\dfrac{\ln f(x)}{f(x)}\right]$.

解　由一阶微分形式不变性，得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f\left[\frac{\ln f(x)}{f(x)}\right]&=f'\left[\frac{\ln f(x)}{f(x)}\right]\mathrm{d}\,\frac{\ln f(x)}{f(x)}\\&=f'\left[\frac{\ln f(x)}{f(x)}\right]\cdot\frac{f(x)\dfrac{f'(x)}{f(x)}-f'(x)\ln f(x)}{[f(x)]^2}\mathrm{d}x\\&=f'\left[\frac{\ln f(x)}{f(x)}\right]\cdot\frac{f'(x)}{f^2(x)}(1-\ln f(x))\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

例 6　设函数曲线可由参数式 $x=x(t)$，$y=y(t)$ 表示，又可

用极坐标式 $r=r(\theta)$ 表示. 证明:

$$(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2=(r\mathrm{d}\theta)^2+(\mathrm{d}r)^2.$$

证 因为 $x=r(\theta)\cos\theta, y=r(\theta)\sin\theta$,所以

$$\mathrm{d}x=\cos\theta\mathrm{d}r-r\sin\theta\mathrm{d}\theta,\quad \mathrm{d}y=\sin\theta\mathrm{d}r+r\cos\theta\mathrm{d}\theta,$$

于是

$$(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2=(\cos\theta\mathrm{d}r-r\sin\theta\mathrm{d}\theta)^2+(\sin\theta\mathrm{d}r+r\cos\theta\mathrm{d}\theta)^2$$
$$=(r\mathrm{d}\theta)^2+(\mathrm{d}r^2).$$

例 7 设 $y=[f(x^2)]^{1/x}, f(x)>0$ 且可微,求 $\mathrm{d}y$.

解 y 是幂指函数,用取对数微分法,得

$$\ln y=\frac{1}{x}\ln f(x^2).$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{x\mathrm{d}\ln f(x^2)-\ln f(x^2)\cdot\mathrm{d}x}{x^2}$$
$$=\frac{1}{x}\cdot\frac{f'(x^2)}{f(x^2)}2x\mathrm{d}x-\frac{1}{x^2}\ln f(x^2)\mathrm{d}x$$
$$=\left[2\frac{f'(x^2)}{f(x^2)}-\frac{1}{x^2}\ln f(x^2)\right]\mathrm{d}x,$$

故 $$\mathrm{d}y=[f(x^2)]^{1/x}\left[2\frac{f'(x^2)}{f(x^2)}-\frac{1}{x^2}\ln f(x^2)\right]\mathrm{d}x.$$

例 8 设 $f_{ij}(x)\ (i,j=1,2,3)$ 可微,求以如下行列式定义的函数 $F(x)$ 的微分:

$$F(x)=\begin{vmatrix}f_{11}(x) & f_{12}(x) & f_{13}(x)\\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & f_{23}(x)\\ f_{31}(x) & f_{32}(x) & f_{33}(x)\end{vmatrix}.$$

解 因为 $\quad f_{ij}(x+\Delta x)=f_{ij}(x)+f'_{ij}(x)+o(\Delta x),$

$$F(x+\Delta x)=F(x)+G(x)\Delta x+o(\Delta x),$$

其中

$$G(x)\triangleq\begin{vmatrix}f'_{11}(x) & f_{12}(x) & f_{13}(x)\\ f'_{21}(x) & f_{22}(x) & f_{23}(x)\\ f'_{31}(x) & f_{32}(x) & f_{33}(x)\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}f_{11}(x) & f'_{12}(x) & f_{13}(x)\\ f_{21}(x) & f'_{22}(x) & f_{23}(x)\\ f_{31}(x) & f'_{32}(x) & f_{33}(x)\end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & f'_{13}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & f'_{23}(x) \\ f_{31}(x) & f_{32}(x) & f'_{33}(x) \end{vmatrix}.$$

则
$$dF(x) = G(x)dx.$$

例 9 设 $y = \log_{\varphi(x)}\psi(x)$，$\varphi(x)$，$\psi(x)$ 可微，$\varphi(x) > 0$，$\psi(x) > 0$，求 dy.

解 因为 $y = \log_{\varphi(x)}\psi(x) = \dfrac{\ln\psi(x)}{\ln\varphi(x)}$，所以对等式两边分别微分，得

$$dy = d\frac{\ln\psi(x)}{\ln\varphi(x)} = \frac{1}{\ln^2\varphi(x)}\left[\ln\varphi(x)\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} - \ln\psi(x)\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right]dx$$
$$= \frac{1}{\ln\varphi(x)}\left[\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} - \log_{\varphi(x)}\psi(x)\cdot\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right]dx.$$

例 10 设 $y = \dfrac{x-a}{1-ax}$ $(|a| < 1)$，证明：当 $|x| < 1$ 时，

$$\frac{dy}{1-y^2} = \frac{dx}{1-x^2}.$$

证 对方程 $y = \dfrac{x-a}{1-ax}$ 两边微分，得

$$dy = \frac{1-a^2}{(1-ax)^2}dx.$$

而
$$1-y^2 = 1-\left(\frac{x-a}{1-ax}\right)^2 = \frac{1-a^2}{(1-ax)^2}(1-x^2),$$

故
$$dy = \frac{1-y^2}{1-x^2}dx \Rightarrow \frac{dy}{1-y^2} = \frac{dx}{1-x^2}.$$

二、高阶导数与高阶微分问题

求高阶导数有下列基本公式：

(1) $(e^x)^{(n)} = e^x$，$(a^x)^{(n)} = a^x(\ln a)^n \quad (a > 0)$；

(2) $(x^m)^{(n)} = m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n}$；

(3) $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \dfrac{n}{2}\pi\right)$，$(\cos x)^n = \cos\left(x + \dfrac{n}{2}\pi\right)$；

(4) $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}\cdot\dfrac{(n-1)!}{x^n}$，

$$(\log_a x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{x^n \ln a};$$

(5) $$\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

在求高阶导数时，要先将函数变形，尽可能利用基本公式. 要善于用数学归纳法、递推公式和莱布尼茨公式.

例 11 设函数

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c, & x < 0, \\ \ln(1+x), & x \geqslant 0. \end{cases}$$

问 a,b 为何值时，$f'(x)$ 处处连续，但在 $x=0$ 无二阶导数.

解 $f'(x)$ 在 $x \neq 0$ 连续是显然的. 要在 $x=0$ 可导，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，由 $f_+(0) = f_-(0) = f(0) \Rightarrow c = 0$. 又

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{ax^2 + bx}{x} = b,$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

所以，由 $f'_+(0) = f'_-(0) = f'(0)$ 得 $b = 1$.

讨论 $f'(x)$ 的连续性. 当 $x < 0$ 时，$f'(x) = 2ax + 1$，$f'(0^-) = 1$；当 $x > 0$ 时，$f'(x) = \frac{1}{1+x}$，$f'(0^+) = 1$. 由 $f'(0^-) = f'(0^+) = f'(0)$ 知，$f'(x)$ 在 $x=0$ 连续，从而 $f(x)$ 处处有一阶连续导数.

$$f''_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{2ax + 1 - 1}{x} = 2a,$$

$$f''_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1/(1+x) - 1}{x} = -1,$$

所以，当 $2a \neq -1$，即 $a \neq -\frac{1}{2}$ 时，$f''(0)$ 不存在.

即本例选 $a \neq -\frac{1}{2}$，$b = 1$.

例 12 证明：

$$(a^2+b^2)^{n/2}e^{ax}\sin(bx+n\varphi)=\sum_{i=0}^{n}C_n^i a^{n-i}b^i e^{ax}\sin\left(bx+\frac{\pi}{2}i\right),$$

其中 $\varphi=\arctan\dfrac{b}{a}$.

证　设 $f(x)=e^{ax}\sin bx$,则

$f'(x)=e^{ax}(a\sin bx+b\cos bx)$

$$=(a^2+b^2)^{1/2}e^{ax}\sin(bx+\varphi)\ \left(\varphi=\arctan\frac{b}{a}\right).$$

逐次求导,可得

$$f^{(n)}(x)=(a^2+b^2)^{n/2}e^{ax}\sin(bx+n\varphi).$$

又,用莱布尼茨公式直接求导,得

$$f^{(n)}(x)=\sum_{i=0}^{n}C_n^i a^{n-i}b^i e^{ax}\sin\left(bx+\frac{\pi}{2}i\right)$$

比较两式,即得所证命题.

例 13　设 $f(x)=\arcsin x$,证明:

(1) $(1-x^2)f^{(n+2)}(x)-(2n+1)xf^{(n+1)}(x)-n^2f^{(n)}(x)=0$;

(2) $f^{(n+2)}(0)=n^2f^{(n)}(0)$;

(3) $f^{(2k)}(0)=0, f^{(2k+1)}(0)=1^2\cdot3^2\cdot5^2\cdots(2k-1)^2, \forall\ k\in$ **N**.

证　(1) $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,即 $\sqrt{1-x^2}f'(x)=1$,所以

$$f''(x)\sqrt{1-x^2}-f'(x)\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=0,$$

即
$$f''(x)(1-x^2)-f'(x)\cdot x=0.$$

对上式两项分别使用莱布尼茨公式,得

$$f^{(n+2)}(x)(1-x^2)+nf^{(n+1)}(x)(-2x)$$
$$+\frac{n(n-1)}{2}f^{(n)}(x)(-1)-[f^{(n+1)}(x)x+nf^{(n)}(x)]=0.$$

经整理,即得

$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x)-(2n+1)xf^{(n+1)}(x)-n^2f^{(n)}(x)=0.$$

(2) 在上式中,令 $x=0$,即得所证命题.

(3) 因为 $f'(0)=0, f''(0)=0$，利用题(2)的结果，得

$$f'''(0)=1^2 f'(0)=1^2,\ f^{(4)}(0)=0,\cdots.$$

所以，$f^{(2k)}(0)=0, f^{(2k+1)}(0)=1^2\cdot 3^2\cdots(2k-1)^2, \forall\ k\in \mathbf{N}$.

例 14 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-\cos x}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0.\end{cases}$

其中 $g(x)$ 为二阶可导且导数连续，$g(0)=1$.

(1) 求使 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续的 a 值；

(2) 求 $f'(x)$ 并讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 的连续性.

解 (1) 因为 $[g(x)-\cos x]\Big|_{x=0}=1-1=0$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{[g(x)-\cos x]-0}{x-0}$$
$$=\lim_{x\to 0}g'(x)+\sin x=g'(0).$$

当 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=g'(0)$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 连续，则 $f(x)$ 处处连续. 即 $a=g'(0)$，$f(x)$ 在 $x=0$ 连续.

(2) 当 $x\neq 0$ 时，有

$$f'(x)=\frac{[g'(x)+\sin x]x-[g(x)-\cos x]}{x^2},$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{[g(x)-\cos x]/x-g'(0)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-\cos x-xg'(0)}{x^2}$$
$$\xlongequal{L'}\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)+\sin x-g'(0)}{2x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{g'(x)-g'(0)}{2x-0}+\frac{\sin x-\sin 0}{2x}\right)$$
$$=\frac{1}{2}g''(0)+\frac{1}{2}\ (L'\text{ 用法见下章第二节}).$$

故 $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{[g'(x)+\sin x]x-[g(x)-\cos x]}{x^2}, & x\neq 0,\\ \dfrac{1}{2}g''(0)+\dfrac{1}{2}, & x=0.\end{cases}$

由于

$$\lim_{x\to0}f'(x)=\lim_{x\to0}\frac{[g'(x)+\sin x]x-[g(x)-\cos x]}{x^2}$$

$$\xlongequal{L'}\lim_{x\to0}\frac{[g''(x)+\cos x]+[g'(x)+\sin x]-[g'(x)+\sin x]}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{g''(x)+\cos x}{2}=\frac{g''(0)}{2}+\frac{1}{2},$$

所以，$f'(x)$ 在 $x=0$ 连续.

例 15 设 $f(x)=\begin{cases}e^{-1/x^2}, & x\neq0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

证明：$f(x)$ 在 $x=0$ 存在任意阶导数，且 $f^{(n)}(0)=0,n=1,2,\cdots$.

证 利用导数定义和数学归纳法证.

当 $x\neq0$ 时，$f'(x)=\dfrac{2}{x^3}e^{-1/x^2}$,

$$f''(x)=\left(\frac{4}{x^6}-\frac{6}{x^4}\right)e^{-1/x^2},\cdots,$$

$$f^{(n)}(x)=P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2},\cdots,$$

其中 $P_n\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 是 $\dfrac{1}{x}$ 的 $3n$ 次多项式.

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{e^{-1/x^2}-0}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1/x}{e^{1/x^2}}=0.$$

设 $f^{(n-1)}(0)=0$，则

$$f^{(n)}(0)=\lim_{x\to0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{P_{n-1}(1/x)e^{-1/x^2}}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{P_{n-1}(1/x)/x}{e^{-1/x^2}}=0.$$

故，$f(x)$ 在 $x=0$ 存在任意阶导数，且 $f^{(n)}(0)=0$.

注 由 $f'(x)$，$f''(x)$ 可知：$P_1\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 和 $P_2\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 是3次、6次多项式，设 $f^{(n-1)}(x)=P_{n-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)e^{-1/x^2}$，其中 $P_{n-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 是 $3(n-1)$ 次多项式，则可推出

$$f^{(n)}(x)=\left[2\left(\frac{1}{x}\right)^3P_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)-\left(\frac{1}{x}\right)^2P'_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)\right]e^{-1/x^2},$$

故
$$P_n\left(\frac{1}{x}\right)=2\left(\frac{1}{x}\right)^3P_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)-\left(\frac{1}{x}\right)^2P'_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

是$\frac{1}{x}$的 $3n$ 次多项式.

例 16 设 f 二阶可导,$y=f\{f[f(x)]\}$,求 $y''(x)$.

解 由复合函数导数的链式法则,有

$$y'=f'\{f[f(x)]\}\cdot f'[f(x)]\cdot f'(x),$$

$$y''=f''\{f[f(x)]\}\cdot f'[f(x)]\cdot f'(x)$$
$$+f'\{f[f(x)]\}\cdot f''[f(x)]\cdot f'(x)$$
$$+f'\{f[f(x)]\}\cdot f'[f(x)]\cdot f''(x).$$

例 17 设函数 $f(x)$ 当 $x\leqslant x_0$ 时有定义且可微分两次,问 a, b,c 为何值时,函数

$$F(x)=\begin{cases}f(x), & x\leqslant x_0,\\ a(x-x_0)^2+b(x-x_0)+c, & x>x_0\end{cases}$$

可微分两次.

解 由题设 $F'(x)$ 存在,故 $F(x)$ 在 $x=x_0$ 连续. 即有

$$\lim_{x\to x_0^-}F(x)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0),$$

$$\lim_{x\to x_0^+}F(x)=\lim_{x\to x_0^+}[a(x-x_0)^2+b(x-x_0)+c]=c,$$

得 $c=f(x_0)$. 又由 $F'(x_0^-)=F'(x_0^+)$ 得

$$f'(x_0)=[2a(x-x_0)+b]\Big|_{x=x_0}=b,$$

得 $b=f'(x_0)$. 再由 $F''(x_0^-)=F''(x_0^+)$ 得

$$f''(x_0)=2a\Rightarrow a=\frac{1}{2}f''(x_0).$$

例 18 求下列导数的高阶导数:

(1) $y=\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$,求 $y^{(100)}$;　　(2) $y=x^2e^{2x}$.

解 (1)$y=(1+x)(1-x)^{-1/2}$,用莱布尼茨公式. 注意到

$(1+x)$ 项只能求导一次，故

$$y^{(100)}=\sum_{i=0}^{100}C_{100}^{i}(1+x)^{(i)}[(1-x)^{-1/2}]^{(100-i)}$$
$$=(1+x)[(1-x)^{-1/2}]^{(100)}+C_{100}^{1}[(1-x)^{-1/2}]^{(99)}$$
$$=(1+x)\frac{199!!}{2^{100}}(1-x)^{-201/2}+100\cdot\frac{197!!}{2^{99}}(1-x)^{-199/2}$$
$$=\frac{197!!(399-x)}{2^{100}(1-x)^{100}\sqrt{1-x}}\quad(x<1).$$

(2) 用莱布尼茨公式，注意到 x^2 项只能求导两次，故

$$y^{(20)}=x^2(e^{2x})^{(20)}+2x\,C_{20}^{1}(e^{2x})^{(19)}+2C_{20}^{2}(e^{2x})^{(18)}$$
$$=2^{20}e^{2x}(x^2+20x+95).$$

例 19 求下列函数的 n 阶导数 $y^{(n)}$：

(1) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$； (2) $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$；

(3) $y=\sin ax\sin bx$； (4) $y=\sin ax\cos bx$；

(5) $y=\sin^4x+\cos^4x$； (6) $y=\ln\dfrac{a+bx}{a-bx}$.

解 (1) $y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$, $y''=-\dfrac{2c(ad-bc)}{(cx+d)^3}$.

设对 n 有 $y^{(n)}=(-1)^{n-1}\dfrac{c^{n-1}(ad-bc)n!}{(cx+d)^{n+1}}\left(x\neq-\dfrac{d}{c}\right)$，则对于 $n+1$，有

$$y^{(n+1)}=-(-1)^{n-1}\frac{c^{n-1}(ad-bc)n!(n+1)(cx+d)^n\cdot c}{(cx+d)^{2(n+1)}}$$
$$=(-1)^n\frac{c^n(ad-bc)(n+1)!}{(cx+d)^{n+2}}.$$

(2) $y=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-1}$，由基本公式(5)，得

$$y^{(n)}=\left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)}-\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}$$
$$=n!(-1)^n\left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]\ (x\neq1,x\neq2).$$

(3) $y=\dfrac{1}{2}\cos(a-b)x-\dfrac{1}{2}\cos(a+b)x$,

$$y^{(n)} = \frac{1}{2}\left\{(a-b)^n\cos\left[(a-b)x+\frac{n}{2}\pi\right]\right.$$
$$\left.-(a+b)^n\cos\left[(a+b)x+\frac{n}{2}\pi\right]\right\}.$$

(4) $y = \frac{1}{2}\sin(a+b)x + \frac{1}{2}\sin(a-b)x$,

$$y^{(n)} = \frac{1}{2}\left\{(a+b)^n\sin\left[(a+b)x+\frac{n}{2}\pi\right]\right.$$
$$\left.-(a-b)^n\sin\left[(a-b)x+\frac{n}{2}\pi\right]\right\}.$$

(5) $y = (\sin^2x+\cos^2x)^2 - 2\sin^2x\cos^2x = 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x$

$$= 1-\frac{1}{4}(1-\cos4x) = \frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos4x,$$

$$y^{(n)} = 4^{n-1}\cos\left(4x+\frac{n}{2}\pi\right).$$

(6) $y = \ln(a+bx)-\ln(a-bx)$,

$$y' = \frac{b}{a+bx}+\frac{b}{a-bx}.$$

$$y^{(n)} = (-1)^n\frac{b^n(n-1)!}{(a+bx)^n}+\frac{b^n(n-1)!}{(a-bx)^n}$$
$$= b^n(n-1)!\left[\frac{(-1)^n}{(a+bx)^n}+\frac{1}{(a-bx)^n}\right]\quad\left(|x|<\left|\frac{a}{b}\right|\right).$$

例 20 求下列函数的 n 阶微分 d^ny：

(1) $y = x^n\mathrm{e}^x$；　　(2) $y = \frac{\ln x}{x}$.

解

(1) $\mathrm{d}^ny = y^{(n)}\mathrm{d}x^n$

$$= \mathrm{e}^x\left[x^n+n^2x^{n-1}+\frac{n^2(n-1)^2}{2!}x^{n-2}+\cdots+n!\right]\mathrm{d}x^n.$$

(2) $\mathrm{d}^ny = y^{(n)}\mathrm{d}x^n = \left[\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}\ln x + n\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)}\right.$

$$\left.+C_n^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{1}{x}\right)^{(n-2)}+\cdots+\frac{1}{x}(\ln x)^{(n)}\right]\mathrm{d}x^n$$

$$= \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\left[\ln x - \sum_{k=1}^{x}\frac{1}{k}\right]dx^n \quad (x > 0).$$

例 21 设函数 $f(y)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 及 $f'[f^{-1}(x)]$，$f''[f^{-1}(x)]$ 都存在，且 $f'[f^{-1}(x)] \neq 0$，证明：

$$\frac{d^2 f^{-1}(x)}{dx^2} = -\frac{f''[f^{-1}(x)]}{\{f'[f^{-1}(x)]\}^3}.$$

证 由题设 $x = f(y)$，$y = f^{-1}(x)$. 依反函数与复合函数求导法则，有

$$\frac{df^{-1}(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]},$$

$$\frac{d^2 f^{-1}(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}\right] = \frac{d}{dy}\left[\frac{1}{f'(y)}\right]\frac{dy}{dx}$$

$$= -\frac{f''(y)}{[f'(y)]^2}\cdot\frac{1}{f'[f^{-1}(x)]} = -\frac{f''[f^{-1}(x)]}{\{f'[f^{-1}(x)]\}^3}.$$

例 22 设 $y = \dfrac{1}{(x-a)(x-b)(x-c)}$，$a,b,c$ 互不相等，求 $y^{(n)}$.

解 先分解因式，得

$$y = \frac{1}{(c-b)(c-a)}\frac{1}{(x-c)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)}\frac{1}{(x-b)}$$

$$+ \frac{1}{(a-b)(a-c)}\frac{1}{(x-a)}$$

故

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(c-b)(c-a)(x-c)^{n+1}}$$

$$+ \frac{(-1)^n n!}{(b-a)(b-c)}\frac{1}{(x-b)^{n+1}}$$

$$+ \frac{(-1)^n n!}{(a-b)(a-c)}\frac{1}{(x-a)^{n+1}}.$$

例 23 若 $y = f(x)$ 存在单值反函数 $x = \varphi(y)$，且 $y' \neq 0$，$y'' \neq 0$. 求反函数的导数 $\dfrac{d^2x}{dy^2}$，$\dfrac{d^3x}{dy^3}$.

解 由反函数导数公式，得 $\dfrac{dx}{dy} = 1\Big/\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{y'}$.

(1) $$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d}{dy}\left(\frac{dx}{dy}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{dy}\right)\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dx}\frac{1}{(y')}\frac{dx}{dy}$$

$$= \frac{-1}{(y')^2} \cdot y'' \cdot \frac{1}{y'} = -\frac{y''}{(y')^3}.$$

(2) $$\frac{d^3x}{dy^3} = \frac{d}{dy}\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)\frac{dx}{dy} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{y''}{(y')^3}\right)\frac{dx}{dy}$$

$$= -\frac{y'''(y')^3 - 3(y')^2 y'' \cdot y''}{(y')^6} \cdot \frac{1}{y'} = \frac{3(y'')^2 - y' y'''}{(y')^5}.$$

例 24 $$f(x) = \begin{cases} x^m \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

设 m 为自然数. 问在什么条件下,有

(1) 在 $x = 0$ $f(x)$ 连续; (2) 在 $x = 0$ $f(x)$ 可导;

(3) 在 $x = 0$ $f'(x)$ 连续; (4) 在 $x = 0$ $f(x)$ 处二阶可导;

(5) 在 $x = 0$ $f''(x)$ 连续.

解 (1) 当 $m > 0$ 时, $\lim\limits_{x \to 0} x^n \cdot \sin(1/x) = 0$, 有 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$. 所以 $m > 0$ 时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续.

(2) 当 $m > 1$ 时, 有

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta)^{m-1} \cdot \sin \frac{1}{\Delta x} = 0,$$

即 $f'(0) = 0$. 所以当 $m > 1$ 时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 可导.

(3) 当 $m > 2$ 时, 由 $x \neq 0$ 有

$$f'(x) = mx^{m-1}\sin(1/x) - x^{m-2}\cos(1/x) \Rightarrow \lim_{x \to 0} f'(x) = 0,$$

即 $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = f'(0)$. 所以 $m > 2$ 时, $f'(x)$ 在 $x = 0$ 连续.

(4) 当 $m > 3$ 时, 由 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 连续, 有

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x^{m-3}\left(mx\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right) = 0,$$

即 $f''(0) = 0$. 所以 $m > 3$ 时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 二阶可导.

(5) 当 $m > 4$ 时, 由 $x \neq 0$ 有

$$f''(x) = x^{m-4}[m(m-1)x^2\sin(1/x) - 2(m-1)x\cos(1/x) - \sin(1/x)],$$

$$\lim_{x \to 0} f''(x) = 0,$$

所以 $m > 4$ 时, $f''(x)$ 在 $x = 0$ 连续.

第四章　微分中值定理与利用导数研究函数

第一节　微分中值定理

主 要 内 容

1. 若函数 f 在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内对一切 $x \in U(x_0)$ 有 $f(x_0) \geqslant f(x)$（或 $f(x_0) \leqslant f(x)$），则称函数 f 在点 x_0 取得极大值（或极小值），点 x_0 为极大值点（或极小值点）. 极大值、极小值统称极值.

2. 费尔马(Fermat)引理　设函数 f 在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义，且在 x_0 可导. 若 x_0 为 f 的一个极值点，则 $f'(x_0) = 0$.

3. 罗尔(Rolle)定理　设函数 f 满足如下条件：f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，f 在开区间 (a,b) 内可导，$f(a) = f(b)$，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi) = 0$.

4. 拉格朗日(Lagrange)中值定理　若函数 f 满足以下条件：f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，f 在开区间 (a,b) 内可导，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

推论 1　若函数 f 在区间 I 上可导，且 $f'(x) \equiv 0$，则在 I 上 $f(x) \equiv c$（常数）.

推论 2　若函数 f 和 g 在区间 I 上均可导，且 $f'(x) \equiv g'(x)$，则在 I 上 $f(x) = g(x) + c$（常数）.

5. 柯西(Cauchy)中值定理　若函数 f 和 g 满足以下条件：f

与 g 在闭区间$[a,b]$上均连续，f 与 g 在开区间(a,b)内均可导，且在(a,b)内 f' 与 g' 不同时为零，$g(a)\neq g(b)$，则在(a,b)内至少存在一点 ξ，使得

$$\frac{g'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

疑难解析

1. 罗尔定理的条件是充分的还是必要的？

答 罗尔定理的条件是充分的，但不是必要的. 例如，对

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in(-1,1)\cup(1,2),\\ 0, & x=1,\end{cases}$$

$f(x)$在$[1,2]$上有间断点 $x=1$，$f(x)$在 $x=1$ 不可导，$f(-1)\neq f(2)$. 罗尔定理的三个条件都不满足，但 $f'(0)=0, 0\in(-1,2)$. 所以罗尔定理条件是充分的. 但是，三个条件中少了任何一个，结论可能不成立，如

$$f_1(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1,\\ 0, & x=1;\end{cases}\qquad f_2(x)=\begin{cases}1-2x, & x<1/2,\\ 2x-1, & x\geqslant 1/2;\end{cases}$$

$$f_3(x)=x, x\in[0,1].$$

其中 $f_1(x)$ 在$[0,1]$上不连续，$f_2(x)$ 在$(0,1)$内不可导，$f_3(x)$ 不满足 $f(a)=f(b)$，但它们分别满足罗尔定理的其它两个条件，却不存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)=0$. 尽管如此，不能说这三个条件是必要的. 由前一例子，我们只能说，这三个条件都是充分的.

2. 三个中值定理有何联系？它们几何意义的共同点是什么？

答 可以认为：罗尔定理是拉格朗日中值定理的特例，拉格朗日中值定理又是柯西中值定理的特例. 因为，在柯西中值定理中令 $g(x)=x$，即得到拉格朗日中值定理；在拉格朗日中值定理中增加条件 $f(a)=f(b)$，即得到罗尔定理.

罗尔定理的几何意义是：满足定理条件的函数 $y=f(x)$ 在

(a,b) 内的曲线上至少存在一条水平切线. 拉格朗日中值定理的几何意义是:满足定理条件的函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内的曲线上至少存在一点 $(\xi,f(\xi))$,曲线在该点的切线平行曲线两端点的连线. 柯西中值定理的几何意义是:满足定理条件的由 $u=g(x)$,$v=f(x)$ 所确定的曲线上至少有一点,曲线的切线平行两端点连线. 罗尔定理满足 $f(a)=f(b)$,即两端点连线是水平的. 所以,三个中值定理几何意义有一个共同点:满足定理条件的函数曲线上至少有一点的切线平行曲线在区间上两端点的连线.

方法、技巧与典型例题分析

中值定理有很多应用,最重要的应用是证明定理、证明等式与不等式、证明极限、证明零点等等. 做证明题首先要分析题给条件与待证结论,认真的分析:利用什么定理能使我们迅速得到结果?使用什么方法来实施证明?常用的方法有:一是直接证明,这种情况不多见,一般在验证符合某定理条件后,即可引用定理得出结论. 二是引入辅助函数,这种情况比较常见,一般是将待证结论变形(如拼凑重组、移项等),构成一个或两个新的辅助函数,验证它们符合某个中值定理,然后利用定理结论导出待证结论. 这种方法需要一定技巧,而技巧往往又要根据具体问题确定,希望读者很好地体会例题. 三是用反证法,假设待证命题的逆命题成立,然后从推导过程中找出与已知结论(包括极限、连续、可微等概念与法则、性质)的矛盾,从而证明原命题成立.

一、罗尔定理的应用

例 1 如下的函数

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n,\quad n=0,1,2,\cdots$$

称为 n 次勒襄德(Legendre) 多项式,证明:$P_n(x)$ 在 $(-1,1)$ 内恰有 n 个不同的实根.

证　由高阶导数的莱布尼茨公式知，函数

$$Q_{2n-m}(x)=\frac{d}{dx^m}(x^2-1)^m,\quad m=0,1,2,\cdots,n-1$$

中都含有(x^2-1)因式，故当$m<n$时，$Q_{2n-m}(x)$都有实根-1和1.

考虑$Q_{2n}(x)=(x^2-1)^n$，它仅有相异的两个实根-1和1.由罗尔定理，$Q_{2n-1}(x)=Q'_{2n}(x)$在$(-1,1)$内有一个根x_{11}，所以，$Q_{2n-1}(x)$在$[-1,1]$上有三个相异的根$-1,x_{11},1$.再由罗尔定理，$Q_{2n-2}(x)=Q'_{2n-1}(x)$在$(-1,x_{11})$和$(x_{11},1)$内至少各有一个根，所以，$Q_{2n-2}(x)$在$[-1,1]$上有四个相异的根$-1,x_{21},x_{22},1$.

反复应用罗尔定理，由数学归纳法可证：$Q_{2n-m}(x)$在$[-1,1]$上至少有$m+2$个相异的根$-1,x_{m1},x_{m2},\cdots,x_{mn}$和1 $(m=0,1,\cdots,n-1)$.

令$m=n-1$，则知$Q_{n+1}(x)$在$[-1,1]$上至少有$n+1$个相异的根.再应用一次罗尔定理，知$Q_n(x)$在$(-1,1)$内至少有n个根(不含$1,-1$).

由于$Q_n(x)$是n次多项式，至多有n个根.所以$Q_n(x)$在$(-1,1)$内恰有n个相异的根.

因为$P_n(x)$与$Q_n(x)$只相差一个系数，所以可以得出：$P_n(x)$在$[-1,1]$上恰有n个相异的实根.

例2　验证罗尔定理对函数$y=\ln\sin x$在区间$[\pi/6,5\pi/6]$上的正确性.

解　由$y=\ln\sin x$在定义域$2n\pi<x<(2n+1)\pi$ $(n=0,\pm1,\cdots)$上的连续性知，函数在$[\pi/6,5\pi/6]$上连续.

又$y'=\cot x$在$(\pi/6,5\pi/6)$内处处存在.

$$f(\pi/6)=f(5\pi/6)=-\ln2.$$

所以函数$y=\ln\sin x$在$[\pi/6,5\pi/6]$上满足罗尔定理条件.

因为$y'=\cot x=0$在$(\pi/6,5\pi/6)$内有解$x=\dfrac{\pi}{2}$，所以取$\xi=0$，即得$f'(\xi)=0$.

例 3 设 $f(x)=\begin{vmatrix}1 & x-1 & 2x-1\\1 & x-2 & 3x-2\\1 & x-3 & 4x-3\end{vmatrix}$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=0$.

证 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内可导.

$$f(0)=\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\1 & -2 & -2\\1 & -3 & -3\end{vmatrix}=0,\quad f(1)=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\1 & -1 & 1\\1 & -2 & 1\end{vmatrix}=0$$

符合罗尔定理条件. 故存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)=0$.

例 4 设 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有二阶导数，且 $f(1)=0$，又 $F(x)=x^2f(x)$，证明：在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使 $F''(\xi)=0$.

证 显然，$F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导. 又 $F(0)=F(1)=0$. 所以 $F(x)$ 符合罗尔定理条件，故存在 $x_0\in(0,1)$，使 $F'(x_0)=0$.

又 $F'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)\Rightarrow F'(0)=0$，所以 $F'(x)$ 在 $[0,x_0]$ 上符合罗尔定理条件，故存在 $\xi\in(0,x_0)$，使 $F''(\xi)=0$. 而 $\xi\in(0,x_0)\subset(0,1)$.

例 5 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内非负，存在三阶导数，且方程 $f(x)=0$ 有两个相异实根，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f'''(\xi)=0$.

证 因为 $f(x)$ 在 (a,b) 内非负，且有 $f(x_1)=f(x_2)=0$（设 $x_1<x_2$），则 x_1 和 x_2 必为 $f(x)$ 的极小值点. 由费尔马定理，有 $f'(x_1)=f'(x_2)=0$.

由上知，$f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上符合罗尔定理条件，故存在 $\xi_1\in(x_1,x_2)$，使 $f'(\xi_1)=0$.

又由上知，$f'(x)$ 在 $[x_1,\xi_1]$ 上符合罗尔定理条件，故存在 $\xi_{21}\in(x_1,\xi_1)$ 与 $\xi_{22}\in(\xi_1,x_2)$，使 $f'(\xi_{21})=f'(\xi_{22})=0$.

又由上知，$f''(x)$ 在 $[\xi_{21},\xi_{22}]$ 上符合罗尔定理条件，故存在 $\xi\in(\xi_{21},\xi_{22})$，使 $f'''(\xi)=0$.

例 6 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上存在 $n+1$ 阶导数，$f(0)=f'(0)=$

$f''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=0$，且 $f(1)=0$. 证明：在 $(0,1)$ 内至少有一点 ξ，使 $f^{(n+1)}(\xi)=0$.

证 用数学归纳法.

当 $n=0$ 时，由 $f(0)=f(1)=0$ 与题设知，$f(x)$ 满足罗尔定理条件，故存在 $\xi_1\in(0,1)$，使 $f'(\xi_1)=0$.

设 $n=k$ 时结论成立. 存在 $\xi_{k+1}\in(0,1)$，使 $f^{(k+1)}(\xi_{k+1})=0$.

当 $n=k+1$ 时，由 $f^{(k+1)}(0)=f^{(k+1)}(\xi_{k+1})=0$ 与题设知，$f^{(k+1)}(x)$ 满足罗尔定理条件. 故存在点 $\xi\in(0,\xi_{k+1})$，使得 $f^{(k+2)}(\xi)=0$.

例 7 设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)\cdot f(b)>0$，$f(a)\cdot f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)<0$. 证明：在 (a,b) 内至少有一点 ξ，使 $f'(\xi)=f(\xi)$.

证 设 $f(a)>0$，则 $f(b)>0$，$f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)<0$.

引入辅助函数 $F(x)=\mathrm{e}^{-x}f(x)$，则 $F(a)=\mathrm{e}^{-a}f(a)>0$，$F\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=\mathrm{e}^{-(a+b)/2}f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)<0$，$f(b)=\mathrm{e}^{-b}f(b)>0$. 依闭区间上连续函数的介值定理，至少有一点 $\xi_1\in\left(a,\dfrac{a+b}{2}\right)$，使 $F(\xi_1)=0$；至少有一点 $\xi_2\in\left(\dfrac{a+b}{2},b\right)$，使 $F(\xi_2)=0$.

综上所述知，$F(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上满足罗尔定理条件，故存在点 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，使 $F'(\xi)=0$，即

$$\mathrm{e}^{-\xi}f'(\xi)-\mathrm{e}^{-\xi}f(\xi)=0\Rightarrow f'(\xi)=f(\xi).$$

读者可以从证明中看出，之所以选择 $F(x)=\mathrm{e}^{-x}f(x)$，是因为 $\mathrm{e}^{-x}>0$，且由 $F(x)$ 的导数可以得出 $f'(\xi)=f(\xi)$.

例 8 函数 $f(x)=\begin{cases}x, & -2\leqslant x<0,\\ -x^2+2x+1, & 0\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$ 是否满足罗尔定理条件？定理中的 ξ 是否存在？

解 因为 $f_-(0)=0, f_+(0)=1$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 不连续，即 $f(x)$ 在 $[-2,3]$ 上不满足罗尔定理的条件. 又由

$$f'(x)=\begin{cases}1, & -2\leqslant x<0,\\ \text{不存在}, & x=0,\\ -2x+2, & 0<x\end{cases}$$

知，当 $x=1$ 时，$f'(1)=0$. 故 $\xi=1$.

例 9 设 $a_i\in\mathbf{R}\ (i=1,2,\cdots,n)$，且满足 $a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0$，证明：方程 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

证 作辅助函数

$$F(x)=a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+\cdots+\frac{a_n}{n+1}x^n,$$

显然，$F(0)=0, F(1)=a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0$. 又 $F(x)$ 是多项式函数，在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$F(0)=F(1)$，满足罗尔定理条件. 故存在 $\xi\in(0,1)$，使 $F'(\xi)=0$. 而

$$F'(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n,$$

故方程 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根 ξ.

本例构造 $F(x)$ 的依据是，使 $F(x)$ 的导数恰好是所证方程的左边.

例 10 设 $f,g:[a,b]\to\mathbf{R}$，是可导函数，且 $g'\neq0$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使

$$\frac{f(a)-f(\xi)}{g(\xi)-g(b)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

证 引入辅助函数 $F(x)=f(a)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(b)$，由题设可知，$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导. 又 $F(a)=f(a)g(b), F(b)=f(a)g(b)$，符合罗尔定理条件. 故存在

$\xi \in (a,b)$，使 $F'(\xi) = 0$，即

$F'(\xi) = f(a)g'(\xi) - f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi) + f'(\xi)g(b) = 0.$

经移项整理，即得

$$\frac{f(a) - f(\xi)}{g(\xi) - g(b)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

例 11 证明：方程 $x^5 + x - 1 = 0$ 有惟一正根.

证 令 $f(x) = x^5 + x - 1 = 0$，显然 $f(x)$ 是连续函数，取区间 $[0,N]$，则 $f(x)$ 在 $[0,N]$ 上连续，在 $(0,N)$ 内可导，且 $f'(x) = 5x^4 + 1 > 0$. 由连续函数的零点定理，知存在 $x_0 \in (0,N)$，使 $f(x_0) = 0$，即方程有正根 $(N > 0)$.

下面用反证法证明正根的惟一性. 设除 x_0 外还有一个 $x_1 > 0$，使 $f(x_1) = 0$. 则 $f(x)$ 在 $[x_0, x_1]$ 上满足罗尔定理条件，于是存在 $\xi \in (x_0, x_1)$，使 $f'(\xi) = 0$，这与上面的 $f'(x) > 0$ 矛盾. 所以，方程 $x^5 + x - 1 = 0$ 有惟一正根（区间也可以是 $[x_1, x_0]$）.

例 12 设 f 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a) = f(b) = 0$. 证明：$\forall \lambda \in \mathbf{R}, \exists \xi \in (a,b)$，使 $f'(\xi) = \lambda f(\xi)$.

证 引入辅助函数 $F(x) = e^{-\lambda x} f(x)$，由题设知 $F(a) = F(b) = 0$，$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，满足罗尔定理条件. 故存在 $\xi \in (a,b)$，使 $F'(\xi) = 0$，即 $e^{-\lambda\xi} f'(\xi) - \lambda e^{-\lambda\xi} f(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) = \lambda f(\xi)$.

例 13 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有 n 阶连续导数，且 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上至少有 $n+1$ 个相异实根.

$$P_n(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \cdots + c_1 x_1 + c_0$$

是仅有实根的实系数多项式. 引入记号 $D^n = \frac{d^n}{dx^n}$，证明：

$$P_n(D)f(x) \equiv (D^n + C_{n-1}D^{n-1} + C_{n-2}D^{n-2} + \cdots + C_1 D + C_0)f(x)$$

在 $[a,b]$ 上至少有一个零点.

分析 设 $P_n(x)$ 的 n 个相异实根 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，故

$$P_n(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n).$$

将$(D-\alpha_1)(D-\alpha_2)\cdots(D-\alpha_n)$展开，得

$$P_n(x)f(x) = (D-\alpha_1)(D-\alpha_2)\cdots(D-\alpha_n)f(x).$$

由上例结果知，在$f(x)$的两相异实根之间必有

$$(D-\alpha_n)f(x) = f'(x) - \alpha_n f(x)$$

的一个实根. 由于$f(x)$有$n+1$个相异实根，所以$(D-\alpha_n)f(x)$至少有n个相异实根. 依次知，$(D-\alpha_{n-1})(D-\alpha_n)f(x)$至少有$n-1$个相异实根，…，$P_n(D)f(x) = (D-\alpha_1)(D-\alpha_2)\cdots(D-\alpha_n)f(x)$至少有一个实根.

读者可尝试用数学归纳法写出简洁的证明.

例 14（推广的罗尔定理） 设(a,b)为有限或无穷区间，$f(x)$在(a,b)内可导，且$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to b^-} f(x) = A$（有限或$\pm\infty$），证明：$\exists\ \xi \in (a,b)$，使$f'(\xi) = 0$.

证 若$f(x) \equiv A$，则结论是明显的.

若$f(x) \not\equiv A$，则$\exists\ x_0 \in (a,b)$，使$f(x_0) \neq A$. 设$f(x_0) > A$（$f(x_0) < A$情形类似可证）. 由题设知，$f(x)$在(a,b)内连续，

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to b^-} f(x) = A,$$

故$\forall\ \mu(A < \mu < f(x_0))$，$\exists\ x_1 \in (a,x_0)$，$x_2 \in (x_0,b)$，使$f(x_1) = f(x_2) = \mu$. 依罗尔定理，$\exists\ \xi \in (x_1,x_2) \subset (a,b)$，使

$$f'(\xi) = 0.$$

若$A = \pm\infty$，则在(a,b)内任取一点作x_0，故类似得出$\exists\ \xi \in (a,b)$，使$f'(\xi) = 0$.

例 15 设$f(x)$在$[0,+\infty)$上可导，且$0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{x}{1+x^2}$. 证明：$\exists\ \xi > 0$，使$f'(\xi) = \dfrac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$.

证 引入辅助函数$F(x) = f(x) - \dfrac{x}{1+x^2}$. 因为$F(x)$在$[0,+\infty)$上连续，在$(0,+\infty)$内可导，$F(0) = F(+\infty) = 0$. 依

推广的罗尔定理知，$\exists\ \xi > 0$，使 $F'(\xi) = 0$. 即 $\exists\ \xi > 0$，使 $f'(\xi) = \dfrac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$.

例 16 设 $f(x),g(x),h(x)$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，证明：存在 $\xi \in (a,b)$，使

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \end{vmatrix} = 0.$$

证 设 $F(x) = \begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f(x) & g(x) & h(x) \end{vmatrix}$，

则 $F(x)$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导. 由行列式的性质，$F(a) = F(b) = 0$. 故依罗尔定理，$\exists\ \xi \in (a,b)$，使 $F'(\xi) = 0$. 即

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \end{vmatrix} = 0.$$

(1) 令 $h(x) \equiv x$，即可推出柯西中值定理.

(2) 令 $g(x) \equiv x, h(x) \equiv 1$，即可推出拉格朗日中值定理.

例 17 设抛物线 $y = -x^2 + Bx + C$ 与 x 轴有两个交点 $x = a, x = b\ (a < b)$. 函数 f 在$[a,b]$上二阶可导，$f(a) = f(b) = 0$，且曲线 $y = f(x)$ 与 $y = -x^2 + Bx + C$ 在(a,b)内有一个交点. 证明：存在 $\xi \in (a,b)$，使 $f''(\xi) = -2$.

证 设 $y = f(x)$ 与 $y = -x^2 + Bx + C$ 在(a,b)内的交点为 x_0，令 $F(x) = f(x) + x^2 - Bx - C$，则 $F(a) = F(b) = F(x_0) = 0$. 于是，对 $F(x)$ 在$[a,x_0]$和$[x_0,b]$上分别使用罗尔定理，知 $\exists\ \xi_1 \in (a,x_0), \xi_2 \in (x_0,b)$，使 $f'(\xi_1) = F''(\xi_2) = 0$.

又，$F'(x) = f'(x) + 2x - B$ 在$[\xi_1,\xi_2]$上满足罗尔定理的条件，故存在 $\xi \in (\xi_1,\xi_2) \subset (a,b)$，使 $F''(\xi) = 0$. 即

$$f''(\xi) = -2.$$

例 18 设 f 在 $[a,b]$ 上二阶可微，$f(a)=f(b)=0$，$f'_+(a)\cdot f'_-(b)>0$，证明：方程 $f''(x)=0$ 在 (a,b) 内至少有一个根.

证 不妨设 $f'_+(a)>0, f'_-(b)>0$. 则

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0\Rightarrow\exists\ x_1>a,\text{使 } f(x_1)>f(a)=0,$$

$$\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}>0\Rightarrow\exists\ x_2<b,\text{使 } f(x_2)<f(b)=0.$$

因为 f 在 $[a,b]$ 上可微，所以 f 在 $[x_1,x_2]$ 上连续，依闭区间上连续函数的零点定理，知 $\exists\ x_0\in(x_1,x_2)$，使 $f(x_0)=0$. 于是在 $[a,x_0]$ 及 $[x_0,b]$ 上分别使用罗尔定理，知 $\exists\ \xi_1\in[a,x_0)$，$\xi_2\in(x_0,b)$，使 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$.

在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上再次使用罗尔定理，知 $\exists\ \xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，使 $f''(\xi)=0$，即方程 $f''(x)=0$ 在 (a,b) 内至少有一个根.

例 19 设 $f(x)$ 在包含 x_0 的区间 I 上二次可微，$x_0+h\in I$，$\lambda\in(0,1)$，证明：$\exists\ \xi\in(0,1)$，使

$$f(x_0+\lambda h)=\lambda f(x_0+h)+(1-\lambda)f(x_0)+\frac{\lambda}{2}(\lambda-1)h^2f''(x_0+\xi h).$$

证 由 $0<\lambda<1$，故可取数 M，使等式

$$f(x_0+\lambda h)-\lambda f(x_0+h)-(1-\lambda)f(x_0)-\frac{\lambda}{2}(\lambda-1)h^2M=0$$

成立. 再证明：$\exists\ \xi\in(0,1)$，使 $M=f''(x_0+\xi h)$.

引入辅助函数

$$F(t)=f(x_0+th)-tf(x_0+h)-(1-t)f(x_0)-\frac{t}{2}(t-1)h^2M,$$

则 $F(t)$ 在 $[0,1]$ 上二次可微，且有三个零点，即 $F(0)=F(1)=F(\lambda)=0$. 在 $[0,1]$ 上应用罗尔定理，知 $\exists\ \xi\in(0,1)$，使 $F''(\xi)=0$，即 $f''(x_0+\xi h)=M$. 将 M 代回第一个等式，移项即得

$$f(x_0+\lambda h)=\lambda f(x_0+h)+(1-\lambda)f(x_0)+\frac{\lambda}{2}(\lambda-1)h^2f''(x_0+\xi h).$$

例 20 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，证明：$\exists\ \xi \in (a,b)$，使

$$\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f(\xi)+\xi f'(\xi).$$

证 引入辅助函数 $F(x)=xf(x)-\dfrac{bf(b)-af(a)}{b-a}x$，由题设知 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $F(a)=F(b)$，满足罗尔定理条件. 故 $\exists\ \xi \in (a,b)$，使 $F'(\xi)=0$，即

$$\xi f'(\xi)+f(\xi)=\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}.$$

二、拉格朗日中值定理的应用

拉格朗日中值定理的应用比罗尔定理更广泛，因为它对函数的要求更低. 应用拉格朗日中值定理证明命题的方法与技巧与罗尔定理基本相同，只是变化更加丰富.

例 21 (1) 设函数 f 在 $U_+(x_0)$ 内连续，在 $U^\circ_+(x_0)$ 内可导. 若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)=f'(x_0+0)$ 存在，则右导数 $f'_+(x_0)$ 也存在，且

$$f'_+(x_0)=f'(x_0+0).$$

(2) 设函数 f 在 $U_-(x_0)$ 内连续，在 $U^\circ_-(x_0)$ 内可导. 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f'(x)=f'(x_0-0)$ 存在，则左导数 $f'_-(x_0)$ 也存在. 且

$$f'_-(x_0)=f'(x_0-0).$$

证 (1) 设 $x\in U_+(x_0)$，由拉格朗日中值定理，函数 f 在 (x_0,x) 内存在一点 ξ，使

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(\xi).$$

由于 $x_0<\xi<x$，且当 $x\to x_0^+$ 时，$\xi\to x_0^+$，故

$$\lim_{x\to x_0^+}f'(\xi)=\lim_{x\to x_0^+}f'(x)=f'(x_0+0).$$

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}f'(\xi)=f'(x_0+0).$$

(2) 类似可证 $f'_-(x_0)=f'(x_0-0)$.

由本例可得导数极限定理:

设函数 f 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内连续,在 $U^\circ(x_0)$ 内可导.若极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$ 存在,则 $f'(x_0)$ 也存在,且 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f'(x_0)$.

由例 21 和导数极限定理我们得知:区间 I 上的导函数 f',在区间 I 上要么是连续点,要么是第二类间断点,不可能有第一类间断点.

例 22 若函数 f 在 $[a,b]$ 上可导,且 $f'_+(a)\cdot f'_-(b)<0$,则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使 $f'(\xi)=0$.

证 设 $f'_+(a)>0,f'_-(b)<0$,由于

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0,$$

$$f'_-(a)=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}<0,$$

依函数极限的保号性定理,存在 $x_1\in U^\circ_+(a),x_2\in U^\circ_-(b)$,且 $x_1<x_2$,使 $f(x_1)<f(a),f(x_2)>f(b)$.

对于闭区间 $[x_1,x_2]$ 上的连续函数 f,由最大值与最小值定理,$\exists\ \xi\in[x_1,x_2]\subset(a,b)$,使 f 在点 ξ 取得最大值,也是极大值.故由费尔马定理,$f'(\xi)=0$.

由本例可推出重要的达布(Darboux)定理:

若函数 f 在 $[a,b]$ 上可导,且 $f'(a)\neq f'(b)$,k 为介于 $f'(a)$,$f'(b)$ 之间的任一实数,则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使 $f'(\xi)=k$.

定理的证明需引入辅助函数 $F(x)=f(x)-kx$,则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导,且 $F'_+(a)F'_-(b)<0$,依例 22 结论,$\exists\ \xi\in(a,b)$,使 $F'(\xi)=f'(\xi)-k=0$,即 $f'(\xi)=k$.

例 23 证明:对函数 $f(x)=px^2+qx+1$ 在某区间上应用拉格朗日中值定理时符合条件的 ξ 恰为区间中点.其中 p,q,r 为常数.

证 不妨设区间为 $[a,b]$,则有

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

因为 $$f(b)-f(a)=p(b^2-a^2)+q(b-a),$$

$$f'(\xi)=2p\xi+q,$$

所以 $$f'(\xi)(b-a)=p(b^2-a^2)+q(b-a)$$

$$\Rightarrow 2p\xi=p(b+a)\Rightarrow \xi=\frac{b+a}{2}.$$

即 ξ 恰为区间中点.

例 24 证明下列不等式：

(1) $|\arctan x-\arctan y|\leqslant|x-y|$；

(2) $\dfrac{a-b}{a}<\ln\dfrac{a}{b}<\dfrac{a-b}{b}\ (a>b>0)$；

(3) $e^x>xe\ (x>1)$.

证 (1) 当 $x=y$ 时，显然有

$$|\arctan x-\arctan y|=|x-y|.$$

当 $x\neq y$ 时，不妨设 $x<y$，令 $f(t)=\arctan t$，在 $[x,y]$ 上应用拉格朗日中值定理，得

$$\arctan y-\arctan x=\frac{1}{1+\xi^2}(y-x)$$

$$\Rightarrow|\arctan y-\arctan x|=\frac{1}{1+\xi^2}|y-x|\leqslant|y-x|,$$

故 $$|\arctan y-\arctan x|\leqslant|y-x|.$$

(2) 令 $f(x)=\ln x\ (x>0)$，在 $[b,a]$ 上应用拉格朗日中值定理，得

$$\frac{\ln a-\ln b}{a-b}=\frac{1}{\xi}\Rightarrow\ln\frac{a}{b}=\frac{1}{\xi}(a-b).$$

因为 $b<\xi<a$，由不等式性质，得

$$\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}\quad(a>b>0).$$

(3) 令 $f(x)=e^x$，在 $[1,x]$ 上应用拉格朗日中值定理，得

$$e^x-e=e^{\xi}(x-1),\ 1<\xi<x,$$

$$\Rightarrow e^x - e > e(x-1) \Rightarrow e^x > ex.$$

取 $x=\pi$，即为常见的数值不等式 $e^{\pi} > e\pi$.

例 25 证明数值不等式 $1/9 < \sqrt{66} - 8 < 1/8$.

证 因为 $\delta = \sqrt{64}$，故令 $f(x) = \sqrt{x}$，在区间$[64,66]$上应用拉格朗日中值定理，得

$$\frac{f(66) - f(64)}{66 - 64} = \frac{1}{2\sqrt{\xi}},\quad 64 < \xi < 66,$$

即由 $$\sqrt{66} - 8 = \frac{1}{\sqrt{\xi}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{66}} < \sqrt{66} - 8 < \frac{1}{\sqrt{64}},$$

得 $$1/9 < \sqrt{66} - 8 < 1/8.$$

例 26 若 $f'(x) = \lambda f(x)$ (λ 为常数)，$x \in (-\infty, +\infty)$，则 $f(x)$ 为指数函数.

证 $\forall x \neq 0 \in (-\infty, +\infty)$，$f(x)e^{-\lambda x}$ 在以 x 和 0 为端点的区间上满足拉格朗日中值定理条件，有

$$f(x)e^{-\lambda x} - f(0)e^{-\lambda 0} = [f'(\xi)e^{-\lambda\xi} - \lambda f(\xi)e^{-\lambda\xi}](x-0).$$

由题设知 $f'(\xi) = \lambda f(\xi)$，所以上式右边等于零，即 $f(x) - f(0)e^{\lambda x} = 0 \Rightarrow f(x) = f(0)e^{\lambda x}$. 由于 $f(0)$ 是常数，故 $f(x)$ 为指数函数.

因式子在 $x=0$ 时亦成立，从而知对一切 $x \in (-\infty, +\infty)$，$f(x)$ 为指数函数.

例 27 设函数 f 在$[0,1]$上二阶可微，$f(0) = f(1)$，$f'(1) = 1$，证明：存在 $\xi \in (0,1)$，使 $f''(\xi) = 2$.

证 引入辅助函数 $F(x) = f(x) - x^2$，则 $F(x)$ 在$[0,1]$上满足拉格朗日中值定理条件，所以 $\exists\, x_0 \in (0,1)$，使 $F'(x_0) = F(1) - F(0) = -1$.

又 $F'(1) = [f'(x) - 2x]\Big|_{x=1} = f'(1) - 2 = -1$. 所以 $F'(x) = f'(x) - 2x$ 在$[x_0, 1]$上满足罗尔定理条件，故 $\exists\, \xi \in (x_0, 1) \subset (0,1)$，使 $F''(\xi) = 0$. 即存在 $\xi \in (0,1)$，使 $f''(\xi) = 2$.

例 28 设函数 f 和 g 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，证明：存在 $\xi \in (a,b)$，使

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix} = (b-a)\begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}.$$

证 引入辅助函数 $F(x)=\begin{vmatrix} f(a) & f(x) \\ g(a) & g(x) \end{vmatrix}$，显然 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足拉格朗日中值定理条件，故 $\exists\ \xi \in (a,b)$，使

$$F'(\xi)(b-a) = F(b) - F(a).$$

由行列式性质

$$F'(\xi) = \begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix},\ F(a) = \begin{vmatrix} f(a) & f(a) \\ g(a) & g(a) \end{vmatrix} = 0,$$

所以
$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix} = (b-a)\begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}.$$

例 29 设函数 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二次可微，且 $|f(x)| \leqslant M$，证明：$\exists\ \xi \in (-\infty,+\infty)$，使 $f''(\xi)=0$.

证 若 $f''(x)$ 变号，则由导数的介值性，则 $\exists\ \xi \in (-\infty,+\infty)$，使 $f''(\xi)=0$.

下面用反证法证明 $f''(x)$ 一定变号.

若 $f''(x)$ 不变号，不妨设 $f''(x)>0$ ($f''(x)<0$ 类似可证). 必 $f'(x)>0$(见下节). 取 ξ，使 $f'(\xi)\neq 0$. 若 $f'(\xi)>0$，则当 $x>\xi$ 且 $x\to+\infty$ 时，由拉格朗日中值定理有

$$f(x)=f(\xi)+f'(\xi_1)(x-\xi)>f(\xi)+f'(\xi)(x-\xi)\to+\infty,$$

若 $f'(\xi)<0$，则当 $x<\xi$ 且 $x\to-\infty$ 时，同样有

$$f(x)=f(\xi)+f'(\xi_1)(x-\xi)>f(\xi)+f'(\xi)(x-\xi)\to+\infty.$$

这与 $f(x)$ 的有界性矛盾. 故 $f''(x)$ 必变号.

例 30 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可微，$f(0)=0$，并设有实数 A，使 $|f'(x)|\leqslant A|f(x)|$ 在 $[0,+\infty)$ 上成立，证明：在 $[0,+\infty)$ 上，$f(x)\equiv 0$.

证法 1 由题设条件，在 $[0,x]$ 上应用拉格朗日中值定理，得

$$|f(x)| = |f(0) + f'(\xi_1)(x-0)| = |f'(\xi_1)x| \leqslant A|f(\xi_1)|x.$$

限制 $x \in \left(0, \frac{1}{2A}\right)$ 时，有

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{2}|f(\xi_1)|, \ 0 < \xi_1 < x.$$

重复使用此式 n 次，得

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{2}|f(\xi_1)| \leqslant \frac{1}{4}|f(\xi_2)| \leqslant \cdots \leqslant \frac{1}{2^n}|f(\xi_n)|.$$

式中 $0 < \xi_n < \xi_{n-1} < \cdots < \xi_1 < x \leqslant \frac{1}{2A}$.

由 f 的连续性知，$|f(x)| \leqslant M$，所以在$\left[0, \frac{1}{2A}\right]$上

$$|f(x)| \leqslant \frac{M}{2^n} \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

从而知 $f(x)$ 在$\left[0, \frac{1}{2A}\right]$上时恒等于零. 用数学归纳法可证：在一切 $\left[\frac{i-1}{2A}, \frac{i}{2A}\right]$ $(i = 1, 2, \cdots)$ 上恒有 $f(x) \equiv 0$. 于是得，在$[0, +\infty)$ 上 $f(x) \equiv 0$.

证法 2 用反证法证.

若 $f(x) \neq 0$，则 $\exists\, x_0 \in (0, +\infty)$，使 $f(x_0) \neq 0$. 不妨设 $f(x_0) > 0$ ($f(x_0) < 0$ 类似可证). 记 $x_1 = \inf\{x \mid (x, x_0)$ 内 $f(x) > 0\}$，由连续函数的局部保号性知 $f(x_1) = 0$，在 (x_1, x_0) 内 $f(x) > 0$.

令 $g(x) = \ln f(x)$ ($x \in (x_1, x_0)$)，则 $|g'(x)| = \left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right| < A$，故在 (x_1, x_0) 内，$|g(x)| \leqslant M$. 但 $\lim\limits_{x \to x_1^+} f(x) = f(x_1) = 0$，从而 $\lim\limits_{x \to x_1^+} g(x) = -\infty$，与 $f(x) > 0$ 矛盾.

例 31 设函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 在$[a, b]$上连续，证明：存在常数 $L > 0$，使 $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant L|x_1 - x_2|$，$x_1, x_2 \in [a, b]$.

证 由 $f'(x)$ 在$[a, b]$上连续知，$f'(x)$ 在$[a, b]$上有最大值. 设 $L = \max|f'(x)|$ ($x \in [a, b]$). 依拉格朗日中值定理，有

$$f(x_1)-f(x_2)=f'(\xi)(x_1-x_2),\ \xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b).$$

即 $$|f(x_1)-f(x_2)|=|f'(\xi)||x_1-x_2|\leqslant L|x_1-x_2|.$$

例 32 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，且存在常数 a_1,b_1 和 $a_2,b_2(a_1<a_2)$，使得

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(a_1x+b_1)]=0,\quad \lim_{x\to+\infty}[f(x)-(a_2x+b_2)]=0.$$

证明：$\forall\ c\in(a_1,a_2)$，$\exists\ \xi$，使 $f'(\xi)=c$.

证 由 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a_1$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a_2$ 知 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=a_1$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=a_2$（由 $f(x)$ 的连续性知，$f(0)$ 为有限数）. 于是，$\forall\ c\in(a_1,a_2)$，$\exists\ X_1<0,X_2>0$，使

$$\frac{f(X_1)-f(0)}{X_1}<c,\quad \frac{f(X_2)-f(0)}{X_2}>c.$$

依拉格朗日中值定理，$\exists\ \xi_1\in(X_1,0)$，$\xi_2\in(0,X_2)$，使

$$\frac{f(X_1)-f(0)}{X_1-0}=f'(\xi_1)<c,\quad \frac{f(X_2)-f(0)}{X_2-0}=f'(\xi_2)>c.$$

由闭区间上连续函数的介值定理，$\exists\ \xi\in(\xi_1,\xi_2)$，使 $f'(\xi)=c$.

例 33 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内有二阶导数，证明：$\exists\ \xi\in(a,b)$，使

$$f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi).$$

证 将上式左边变形，得

$$\begin{aligned}&f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)\\&=\left[f(b)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]-\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a)\right]\\&=\left[f\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\right)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\\&\quad-\left[f\left(a+\frac{b-a}{2}\right)-f(a)\right],\end{aligned}$$

故引入辅助函数 $\varphi(x)=f\left(x+\dfrac{b-a}{2}\right)-f(x)$，对

$$f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)=\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right)-\varphi(a),$$

在$\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$上应用拉格朗日中值定理，得

$$f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)=\varphi'(\xi_1)\left(\frac{a+b}{2}-a\right)=\varphi'(\xi_1)\frac{b-a}{2}$$

$$=\left[f'\left(\xi_1+\frac{b-a}{2}\right)-f'(\xi_1)\right]\frac{b-a}{2}\text{（再用拉格朗日中值定理）}$$

$$=f''\left(\xi_1+\theta\frac{b-a}{2}\right)\cdot\frac{b-a}{2}\cdot\frac{b-a}{2}$$

$$=f''(\xi)\frac{(b-a)^2}{4},\ \xi=\xi_1+\theta\frac{b-a}{2}\in(a,b).$$

例 34　设 $a,b>0$，证明：$\exists\ \xi\in(a,b)$，使

$$ae^b-be^a=(1-\xi)e^{\xi}(a-b).$$

证　将等式变形，得

$$\frac{1}{b}e^{1/\frac{1}{b}}-\frac{1}{a}e^{1/\frac{1}{a}}=(1-\xi)e^{1/\frac{1}{\xi}}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right),$$

在$\left[\frac{1}{b},\frac{1}{a}\right]$上引入辅助函数 $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$，应用拉格朗日中值定理，即得上式. 再变形（两边同乘以 ab）即得

$$ae^b-be^a=(1-\xi)e^{\xi}(a-b),\quad \xi\in(a,b).$$

例 35　设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且 $f(a)=f(b)=1$，证明：$\exists\ \xi,\eta\in(a,b)$，使

$$e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1.$$

证　上式可化为 $e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]=e^{\xi}$，为此，引入辅助函数 $F(x)=e^xf(x)$. 由题设知 $F(x)$ 满足拉格朗日中值定理条件，且 $F(a)=e^af(a)=e^a$，$F(b)=e^bf(b)=e^b$. 因此，$\exists\ \eta\in(a,b)$，使

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=\frac{e^b-e^a}{b-a}=F'(\eta)=e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)].$$

又 $g(x)=e^x$ 在$[a,b]$上满足拉格朗日中值定理条件，故 $\exists\ \xi\in(a,b)$，使

$$\frac{e^b - e^a}{b-a} = e^\xi.$$

综上所述知，$\exists\ \xi,\eta \in (a,b)$，使

$$e^\eta[f(\eta)+f'(\eta)] = e^\xi \Rightarrow e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)] = 0.$$

例 36 设 $f(x)$ 为非线性函数，在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，证明：$\exists\ \eta \in (a,b)$，使

$$|f'\eta| > \left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|.$$

证 引入辅助函数

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

由于 $f(x)$ 非线性，$F(x) \not\equiv 0$，故 $\exists\ c \in (a,b)$，使 $F(c) \neq 0$. 而 $F(a) = F(b) = 0$.

设 $F(c) > 0$ ($F(c) < 0$ 类似可证). 在 $[a,c]$ 与 $[c,b]$ 上分别应用拉格朗日中值定理，得

$$F'(\xi_1) = \frac{F(c)-F(a)}{c-a} > 0,\quad \xi_1 \in (a,c),$$

$$F'(\xi_2) = \frac{F(b)-F(c)}{b-c} < 0,\quad \xi_2 \in (c,b),$$

而 $$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

即 $$f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} + F'(x).$$

所以 $$f'(\xi_2) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a} < f'(\xi_2),$$

从而 $$\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right| < \max\{|f'(\xi_1)|,|f'(\xi_2)|\} = |f'(\eta)|.$$

例 37 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，已知 $f(0) = 0, f(1) = 1$，证明：$\forall\ a,b > 0$，$\exists\ \xi,\eta \in (0,1)$，且 $\xi \neq \eta$，使

$$\frac{a}{f'(\xi)} + \frac{b}{f'(\eta)} = a+b.$$

证 因为 $a,b > 0$，所以 $0 < \dfrac{a}{a+b} < 1$. 又 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上

连续，由介值定理知，$\exists\, t\in(0,1)$，使 $f(t)=\dfrac{a}{a+b}$.

在区间$[0,t]$和$[t,1]$上对 $f(x)$ 分别应用拉格朗日中值定理，得

$$f(t)-f(0)=f'(\xi)(t-0),\quad \xi\in(0,t),$$
$$f(1)-f(t)=f'(\eta)(1-t),\quad \eta\in(t,1).$$

由于 $f(0)=0, f(1)=1$，所以由以上两式可得

$$t=\frac{f(t)}{f'(\xi)}=\frac{a}{a+b}\Big/f'(\xi),\ 1-t=\frac{1-f(t)}{f'(\eta)}=\frac{b}{a+b}\Big/f'(\eta).$$

于是，将前后两式两边分别相加，得

$$1=\frac{a}{(a+b)f'(\xi)}+\frac{b}{(a+b)f'(\eta)},$$

即
$$\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=a+b.$$

例 38 设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点的某一邻域内可导，且其导数 $f'(x)$ 在 x_0 连续，而 $\alpha_n<x_0<\beta_n(n=1,2,\cdots)$，当 $n\to\infty$ 时，$\alpha_n\to x_0,\beta_n\to x_0$. 证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}=f'(x_0).$$

证 设$\{\alpha_n\},\{\beta_n\}\in U^{\circ}(x_0)$，则依拉格朗日中值定理，有

$$\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}=f'(\xi_n),\quad \alpha_n<\xi_n<\beta_n.$$

已知 $\xi_n\to x_0$，又 $f'(x)$ 在 x_0 连续，即 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}=\lim_{n\to\infty}f'(\xi_n)=\lim_{x\to x_0}f'(x)=f'(x_0).$$

例 39 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内可微，$f'(x)$ 在 (a,b) 内有界，证明：$f(x)$ 在 (a,b) 内也有界.

证 因为 $f'(x)$ 在 (a,b) 内有界，所以 $\forall\, x\in(a,b)$，$\exists\, M_0>0$，使 $|f'(x)|\leqslant M_0$.

又由 $f(x)$ 在 (a,b) 内可微，必在 (a,b) 内连续，则当取定 x_0

时，$f(x_0)$ 为一定值. 不妨设 $x_0=\frac{a+b}{2}$，则 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ 是定值.

任取 $x\in(a,b)$，且 $x\neq x_0$，则在 $[x,x_0]$（或 $[x_0,x]$ 上，$f(x)$ 满足拉格朗日中值定理条件，恒有

$$f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0),\ \xi\in(x,x_0)\ (\text{或}(x_0,x)).$$

所以
$$\begin{aligned}|f(x)|-|f(x_0)|&\leqslant|f(x)-f(x_0)|\\&=|f'(\xi)||x-x_0|\leqslant M_0|b-a|.\end{aligned}$$

即
$$|f(x)|\leqslant\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|+M_0|b-a|=M.$$

例 40 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty]$ 上二阶可微，且 $f(a)>0$，$f'(a)<0$. 当 $x>a$ 时，有 $f''(x)<0$. 证明：方程 $f(x)=0$ 在 $[a,+\infty)$ 内有惟一实根.

证 由 $f''(x)<0$ 知，$f'(x)$ 单调递减，即当 $x>a$ 时，$f'(x)<f'(a)<0$，故 $f(x)$ 单调递减. 从而知 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 内至多有一个实根.

因为 $f(a)$，$f'(a)$ 均为定数，所以 $a-\frac{f(a)}{f'(a)}>a$ 且为定数，在 $\left[a,a-\frac{f(a)}{f'(a)}\right]$ 上应用拉格朗日中值定理，得

$$\begin{aligned}f\left(a-\frac{f(a)}{f'(a)}\right)-f(a)&=f'\left(a-\theta\frac{f(a)}{f'(a)}\right)\cdot\left(-\frac{f(a)}{f'(a)}\right)\\&<f'(a)\left(-\frac{f(a)}{f'(a)}\right)=-f(a),\end{aligned}$$

于是 $f\left(a-\frac{f(a)}{f'(a)}\right)<0$. 因为 $f(a)>0$，故在 $\left(a,a-\frac{f(a)}{f'(a)}\right)$ 内，$f(x)$ 至少有一实根.

综上所述，命题得证.

三、柯西中值定理的应用

由于涉及两个函数的问题，柯西中值定理的应用要比罗尔定理与拉格朗日中值定理的应用来得复杂. 特别要注意的是，在一个命题中如何分离出两个恰当的函数来，使函数既满足柯西定理条件，又使命题的证明（或计算）变得简单易行. 柯西中值定理经常

要与其它定理一起使用，所以分析问题时要注意层次性.

例 41 设函数 $\varphi(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上可导，且 $x_1x_2>0$，证明：$\exists\ \xi\in(x_1,x_2)$，使

$$\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \varphi(x_1) & \varphi(x_2) \end{vmatrix}=\varphi(\xi)-\xi\varphi'(\xi).$$

解 引入辅助函数 $f(x)=\dfrac{\varphi(x)}{x}$，$g(x)=\dfrac{1}{x}$. 因为 $x_1x_2>0$，所以在 $[x_1,x_2]$ 上不含 $x=0$ 的点. 显然，$f(x)$，$g(x)$ 满足柯西中值定理条件，故 $\exists\ \xi\in(x_1,x_2)$，使

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

即
$$\frac{\dfrac{\varphi(x_2)}{x_2}-\dfrac{\varphi(x_1)}{x_1}}{1/x_2-1/x_1}=\frac{\dfrac{\xi\varphi'(\xi)-\varphi(\xi)}{\xi^2}}{-1/\xi^2}.$$

于是
$$\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \varphi(x_1) & \varphi(x_2) \end{vmatrix}=\varphi(\xi)-\xi\varphi'(\xi).$$

引入辅助函数的方法通常是：将所证结论（等式或不等式）变形，分析变形后的等式或不等式找出恰当的函数. 较简单的情形，可直接选等式或不等式的一部分作为辅助函数，或将式子的一边移到另一边作为辅助函数. 本例就是将欲证等式左边变形为

$$\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \varphi(x_1) & \varphi(x_2) \end{vmatrix}=\left[\frac{\varphi(x_1)}{x_1}-\frac{\varphi(x_2)}{x_2}\right]\Big/\left[\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right],$$

从而找出辅助函数 $f(x)=\dfrac{\varphi(x)}{x}$，$g(x)=\dfrac{1}{x}$.

例 42 设函数 f 在 $x=0$ 的某邻域内 n 阶可导，且 $f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$. 证明：

$$f(x)=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n,\ \theta\in(0,1).$$

证 令 $g(x)=x^n$，则 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[0,x]$ 上满足柯西中值定理条件，故

$$\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f'(\xi_1)-f'(0)}{g'(\xi_1)-g'(0)}=\frac{f''(\xi_2)}{g''(\xi_2)}=\cdots$$

$$=\frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1})-f^{(n-1)}(0)}{g^{(n-1)}(\xi_{n-1})-g^{(n-1)}(0)}=\frac{f^{(n)}(\xi_n)}{g^{(n)}(\xi_n)}=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!},$$

式中 $\xi_n=\theta x\in(0,x)$， $\theta\in(0,1)$.

即
$$f(x)=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n,\quad \theta\in(0,1).$$

例 43 设函数 f 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，证明：$\exists\ x_1,x_2,x_3\in(a,b)$，使

$$f'(x_1)=(b+a)\frac{f'(x_2)}{2x_2}=(b^2+ab+a^2)\frac{f'(x_3)}{3x_3^2}.$$

证 因为 $f(x)$ 在$[a,b]$上满足拉格朗日中值定理条件，故 $\exists\ x_1\in(a,b)$，使

$$f'(x_1)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \qquad ①$$

又令 $g(x)=x^2,h(x)=x^3$. 对 $f(x)$ 与 $g(x)$ 及 $f(x)$ 与 $h(x)$ 分别在$[a,b]$上应用柯西中值定理，得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_2)}{g'(x_2)}\Rightarrow\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(x_2)}{2x_2},\quad x_2\in(a,b),$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{h(b)-h(a)}=\frac{f'(x_3)}{h'(x_3)}\Rightarrow\frac{f(b)-f(a)}{b^3-a^3}=\frac{f'(x_3)}{3x_3^2},\quad x_3\in(a,b),$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=(b+a)\dfrac{f'(x_2)}{2x_2}, & ②\\[2ex] \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=(b^2+ab+a^2)\dfrac{f'(x_3)}{3x_3^2}. & ③\end{cases}$$

比较式①，式②，式③知，$\exists\ x_1,x_2,x_3\in(a,b)$，使

$$f'(x_1)=(b+a)\frac{f'(x_2)}{2x_2}=(b^2+ab+a^2)\frac{f'(x_3)}{3x_3^2}.$$

请读者尝试证明类似命题：若函数 f 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且 $0<a<b$，则 $\exists\ x_1,x_2,x_3\in(a,b)$，使

$$\frac{f'(x_1)}{2x_1}=(b^2+a^2)\frac{f'(x_2)}{4x_2^3}=\frac{\ln(b/a)}{b^2-a^2}x^3f'(x_3).$$

例 44 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，且 a 与 b 同号，证明：$\exists\ \xi \in (a,b)$，使

(1) $2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi)$；

(2) $f(b)-f(a)=\xi\left(\ln\dfrac{b}{a}\right)f'(\xi)$.

证 (1) 将欲证等式变形为 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\dfrac{f'(\xi)}{2\xi}$ 知，需引入辅助函数 $g(x)=x^2$. 由于 $f(x)$，$g(x)$ 在 (a,b) 上满足柯西中值定理条件，所以 $\exists\ \xi\in(a,b)$，使

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\xi)}{2\xi},$$

即
$$2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi).$$

(2) 将欲证等式变形为 $\dfrac{f(b)-f(a)}{\ln|b|-\ln|a|}=\dfrac{f'(\xi)}{1/\xi}$，知需引入辅助函数 $g(x)=\ln|x|$. 由于 $f(x)$，$g(x)$ 在 (a,b) 上满足柯西中值定理条件，所以 $\exists\ \xi\in(a,b)$，使

$$\frac{f(b)-f(a)}{\ln|b|-\ln|a|}=\frac{f'(\xi)}{1/\xi}=\xi f'(\xi),$$

即
$$f(b)-f(a)=\xi\ln\left|\frac{b}{a}\right|f'(\xi)=\xi\ln\left(\frac{b}{a}\right)f'(\xi).$$

例 45 若 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)]=0$，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

证 由式 $[f(x)+f'(x)]e^x=[f(x)e^x]'$ 出发，考虑引入辅助函数 $F(x)=f(x)e^x$，$g(x)=e^x$. 显然，$g'(x)\neq 0$.

由 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)]=0$，知 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ X>0$，当 $x>X$ 时，有 $|f(x)+f'(x)|<\varepsilon$.

对 $x>X$，在 $[X,x]$ 上应用柯西中值定理，得

$$\frac{F(x)-F(X)}{g(x)-g(X)}=\frac{F'(\xi)}{g'(\xi)},\quad \xi\in(X,x),$$

即
$$\frac{f(x)-f(x)e^{X-x}}{1-e^{X-x}}=\frac{f(x)e^x-f(X)e^X}{e^x-e^X}=f(\xi)+f'(\xi)$$

或　$|f(x)| \leqslant |f(X)|e^{X-x} + |f(\xi) + f'(\xi)|(1 + e^{X-x})$.

由于 $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{X-x} = 0$，所以 $\exists X_1 > X$，当 $x > X_1$ 时，有 $e^{X-x} < \varepsilon$ 和 $e^{X-x} < 1$. 于是，$\forall x > X_1$，使

$$|f(x)| \leqslant |f(X)|\varepsilon + 2\varepsilon = (|f(X)| + 2)\varepsilon,$$

即
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

例 46　设 $h > 0$，函数 f 在 $[a-h, a+h]$ 上可导. 证明：存在 $\xi \in (0,1)$，使得

$$\frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h} = f'(a + \theta h) - f'(a - \theta h).$$

(2) 设函数 g 在点 a 二阶可微，证明

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(a+h) - 2g(a) + g(a-h)}{h^2} = g''(a).$$

证　(1) 引入辅助函数 $F(x) = f(a+x) - f(a-x)$，$x \in [a,h]$. 显然，$F(x)$ 在 $[0,h]$ 上满足拉格朗日中值定理条件，故 $\exists \xi \in (0,1)$，使

$$\frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a+h)}{h} = \frac{F(h) - F(0)}{h - 0}$$
$$= F'(\theta h) = f'(a + \theta h) - f'(a - \theta h).$$

(2) 由题设函数 g 在点 a 二阶可导知，在 $U(x_0)$ 内 $g(x)$ 连续并有一阶导数，任取 $h \in (0,\delta)$ 并令

$$\begin{cases} F(x) = g(a+x) - 2g(a) + g(a-x), \\ G(x) = x^2, \end{cases} \quad x \in [0,h],$$

则 $F(x)$ 和 $G(x)$ 满足柯西中值定理条件，故 $\exists \xi \in (0,h)$，使

$$\frac{F(h) - F(0)}{G(h) - G(0)} = \frac{g(a+h) - 2g(a) + g(a-h)}{h^2}$$
$$= \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{g'(a+\xi) - g'(a-\xi)}{2\xi}.$$

而 $h \to 0$ 时，$\xi \to 0$，且 g 在 a 二阶可导，故

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(h) - F(0)}{G(h) - G(0)} = \lim_{h \to 0} \frac{g(a+h) - 2g(a) + g(a-h)}{h^2}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{g'(a+\xi)-g'(a-\xi)}{2\xi}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left[\frac{g'(a+\xi)-g'(a)}{\xi}+\frac{g'(a-\xi)-g'(a)}{-\xi}\right]$$

$$= \frac{1}{2}[g''(a)+g''(a)] = g''(a).$$

例 47 设函数 f 在 $(0,1)$ 内连续且可导，有 $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}f'(x)=0$，证明：$f$ 在 $(0,1]$ 内一致连续.

证 由函数极限的局部有界性知，$\exists\, M>0$，和 $0<c<1$. 使

$$|\sqrt{x}f'(x)|\leqslant M,\ x\in(0,c].$$

于是 $\forall\ x_1,x_2\in(0,c]$，且 $x_1\neq x_2$，依柯西中值定理，$\exists\ \xi\in(x_1,x_2)$（或 (x_2,x_1)），有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}}=\frac{f'(\xi)}{1/(2/\sqrt{\xi})}=2\sqrt{\xi}f'(\xi),$$

即 $\quad |\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}|^2=x_1+x_2-2\sqrt{x_1x_2}\leqslant|x_1-x_2|.$

故 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta=\min\left\{\left(\frac{\varepsilon}{2M}\right)^2,c\right\}$，当 $x_1,x_2\in(0,c]$，且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，由上面两式得到

$$|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant 2M|\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}|\leqslant 2M\sqrt{|x_2-x_1|}<\varepsilon.$$

于是知 f 在 $(0,c]$ 上一致连续. 由于 f 在 $(0,1]$ 上连续，所以 f 在 $[c,1]$ 上连续，从而在 $[c,1]$ 上一致连续. 于是 f 在 $(0,1]$ 上一致连续.

例 48 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$0<a<b$，$f(a)\neq f(b)$，证明：$\exists\ \xi\in(a,b)$，使

$$f'(\xi)=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta).$$

证 将欲证等式变形为 $\frac{f'(\xi)}{1}(b-a)=\frac{f'(\eta)}{2\eta}(b^2-a^2)$ 知，要引入辅助函数 $g_1(x)=x$ 和 $g_2(x)=x^2$. 在 $[a,b]$ 上分别对

$f(x),g_1(x)$ 和 $f(x),g_2(x)$ 应用柯西中值定理,得

$$\begin{cases} f(b)-f(a)=\dfrac{f'(\xi)}{1}(b-a), & \xi\in(a,b), \\ f(b)-f(a)=\dfrac{f'(\eta)}{2\eta}(b^2-a^2), & \eta\in(a,b). \end{cases}$$

即
$$f'(\xi)=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta).$$

例 49 证明不等式

$$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}\ (x>0).$$

证 令 $f(x)=x\ln(x+\sqrt{1+x^2}),g(x)=\sqrt{1+x^2}-1$,则上式转化为 $f(x)>g(x)\ (x>0)$. 由于 $f(0)=0,g(0)=0$,对 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[0,x]$ 上应用柯西中值定理,得

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

于是 $f(x)>g(x)$ 又转化为 $f'(\xi)>g'(\xi)$. 因为

$$\begin{aligned}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}&=\frac{\ln(\xi+\sqrt{\xi^2+1})+\xi/\sqrt{1+\xi^2}}{\xi/\sqrt{1+\xi^2}}\\&=1+\frac{\sqrt{1+\xi^2}\ln(\xi+\sqrt{1+\xi^2})}{\xi},\end{aligned}$$

而当 $x>\xi>0$ 时,$\frac{1}{\xi}\sqrt{1+\xi^2}\ln(\xi+\sqrt{1+\xi^2})>0$,所以

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}>1\Rightarrow f'(\xi)>g'(\xi)\Rightarrow f(x)>g(x),$$

即
$$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}.$$

请读者尝试证明类似命题:证明不等式

$$\arctan x-\ln(1+x^2)>\pi/4-\ln 2,\ x\in[1/2,1],$$

只需设 $f(x)=\ln(1+x^2),g(x)=\arctan x$,在 $[x,1]$ 上应用柯西中值定理,注意到 $x\in[1/2,1]$ 即可.

例 50 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,且 $ab>0$,证明:$\exists\ \xi\in(a,b)$,使

$$\frac{ab}{b-a}\begin{vmatrix} b & a \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} = \xi^2[f(\xi)+\xi f'(\xi)].$$

证 将欲证等式变形为

$$\frac{bf(b)-af(a)}{-1/b+1/a} = \frac{f(\xi)+\xi f'(\xi)}{1/\xi^2},$$

知需引入辅助函数 $F(x)=xf(x), G(x)=-\frac{1}{x}$，在 $[a,b]$ 上对 $F(x), G(x)$ 应用柯西中值定理，得

$$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-F(a)} = \frac{bf(b)-af(a)}{-1/b+1/a} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{f(\xi)+\xi f'(\xi)}{1/\xi^2},$$

即
$$\frac{ab}{a-b}\begin{vmatrix} b & a \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} = \xi^2[f(\xi)+\xi f'(\xi)].$$

例 51 设函数 f 在 $(-1,1)$ 内可微，$f(0)=0, |f'(x)|=1$，证明：在 $(-1,1)$ 内，$|f(x)|<1$.

证 引入辅助函数 $g(x)=x$，在 $[0,x]$（或 $[x,0]$）上（$x\in(-1,1)$）应用柯西中值定理，得

$$\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)} = \frac{f'(\xi)}{1} = f'(\xi).$$

因为 $f(0)=0, g(0)=0$，且 $|f'(x)|\leqslant 1$，所以

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = |f'(\xi)| \leqslant 1 \Rightarrow |f(x)| \leqslant |x| \leqslant 1.$$

第二节　洛必达法则

主要内容

洛必达(L'Hospital) 法则用于求未定式的极限. 以下七种类型的未定式可以利用洛必达法则来求：

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0.$$

1. $\frac{0}{0}$ 型未定式　若

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$;

(2) f,g 在 $U^\circ(x_0)$ 内可导，且 $g'(x)\neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$ (A 为实数或 $\pm\infty,\infty$)；则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A.$$

定理对极限过程 $x\to x_0^+, x\to x_0^-, x\to\infty, x\to+\infty, x\to-\infty$ 的情形，只要稍加修改条件(2)，也有同样的结论成立.

2. $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式　若

(1) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty, \lim\limits_{x\to x_0^-} g(x)=\infty$;

(2) f,g 在 $U^\circ{}_+(x_0)$ 内可导，且 $g'(x)\neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$ (A 为实数或 $\pm\infty,\infty$)；则

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A.$$

定理对极限过程 $x\to x_0^-, x\to x_0, x\to\infty, x\to+\infty, x\to-\infty$ 的情形，只要稍加修改条件(2)，也有同样的结论成立.

3. $0\cdot\infty$ 型未定式　若

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=0,\quad \lim_{x\to x_0} g(x)=\infty;$$

化为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{1/g(x)};$$

则为 $\frac{0}{0}$ 型未定式，化为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{1/f(x)};$$

则为$\frac{\infty}{\infty}$型未定式.

可用以上方法分别确定极限.

4. $\infty-\infty$ 型未定式　若

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}g(x)=\infty,$$

化为
$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to x_0}\frac{1/g(x)-1/f(x)}{1/(f(x)g(x))},$$

则为$\frac{0}{0}$型. 实际运算时，一般均可通过通分实现.

5. $1^{\infty},0^0,\infty^0$ 型未定式　一般为幂指函数形式，即 $f(x)^{g(x)}$ 形式，通过取对数化为 $g(x)\ln f(x)$ 形式，即为 $0\cdot\infty$ 型. 再依 $0\cdot\infty$ 型未定式情形化为$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型，即可使用洛必达法则确定极限值.

疑难解析

1. 用洛必达法则确定未定式极限要注意哪些问题？

答　(1) 用洛必达法则计算极限之前要先确定是否$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型的未定式，或是否可转化 $\infty-\infty,0\cdot\infty,1^{\infty},0^0,\infty^0$ 型. 若不能转化，则不能使用洛比达法则；若能转化，待转化后再使用洛必达法则.

一般定理的第(3)条不进行验证，通过计算可以确定 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 是否存在.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在，但仍是未定式时，可以继续使用洛必达法则. 允许在满足条件时多次使用洛必达法则.

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在，且不是未定式时，并不说明极限不存在，还有可能可用其它方法求出极限. 例如

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sec x}{\tan x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\xlongequal{L'}\lim_{x\to\pi/2}\frac{\tan x}{\sec x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\cdots,$$

用洛必达法则结果反复循环，得不到极限，但

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sec x}{\tan x}\xlongequal{\text{化简}}\lim_{x\to\pi/2}\frac{1}{\sin x}=1.$$

(3) 在使用洛必达法则之前和之中，要不断对函数进行化简，并配合其它求极限方法，使计算过程更为简捷. 例如

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\tan7x}{\ln\tan2x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\xlongequal{L'}\lim_{x\to0^+}\frac{7\sec^2 7x}{\tan7x}\Big/\frac{2\sec^2 2x}{\tan2x}\ (\text{化简})$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{7\sin2x\cos2x}{2\sin7x\cos7x}=\lim_{x\to0^+}\frac{7}{2}\cdot\frac{\sin4x}{\sin14x}\ (\text{等价无穷小})$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{7}{2}\cdot\frac{4x}{14x}=1.$$

(4) 洛必达法则只是计算未定式极限一种较普遍的方法，它不是惟一的，也不一定是最简捷的，所以在使用中要认真考察. 例如

$$\lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{1-\cos x}\left(\frac{0}{0}\right)\xlongequal{L'}\lim_{x\to0}\frac{\sin x+x\cos x}{\sin x}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\xlongequal{L'}\lim_{x\to0}\frac{\cos x+\cos x+x(-\sin x)}{\cos x}=2,$$

但$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$(等价无穷小代换) $=\lim\dfrac{x^2}{x^2/2}=2$，则不用洛必达法而更为简单易行.

方法、技巧与典型例题分析

在疑难解析中，我们讲述了使用洛必达法则所应注意的问题. 而更重要的是灵活运用洛必达法则，不要墨守成规.

例 1 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+1/x)}{\operatorname{arccot}x}$； (2) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{(x^2-\pi^2)\sin5x}{e^{\sin^2 x}-1}$； (4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^x-x}{\ln x-x+1}$.

解 (1) 是$\dfrac{0}{0}$型未定式,故

$$原式\xlongequal{L'}\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{x}{1+x}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)}{-\dfrac{1}{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^2}{x+x^2}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$\xlongequal{L'}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{1+2x}=1.$$

(2) 是$\dfrac{0}{0}$型未定式,故

$$原式\xlongequal{L'}\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{\sin x[-4(\pi-2x)]}$$

$$\xlongequal{L'}\lim_{x\to\pi/2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{-\sin x}{-2\sin x+(\pi-2x)\cos x}$$

$$=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{8}.$$

(3) 是$\dfrac{0}{0}$型未定式,故

$$原式=\lim_{x\to\pi}\frac{(x+\pi)(x-\pi)\sin 5x}{e^{\sin^2 x}-1}$$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{2\pi(x-\pi)\sin 5x}{e^{\sin^2 x}-1}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\xlongequal{L'}2\pi\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 5x+5(x-\pi)\cos 5x}{2\sin x\cos x e^{\sin^2 x}}$$

$$\xlongequal{L'}2\pi\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 5x+5(x-\pi)\cos 5x}{2\sin x\cos x e^{\sin^2 x}}$$

$$=2\pi\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 5x+5(x-\pi)\cos 5x}{-2\sin x}=-5\pi.$$

(4) 是$\dfrac{0}{0}$型未定式,故

$$原式\xlongequal{L'}\lim_{x\to1}\frac{x^x(\ln x+1)-1}{1/x-1}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\xlongequal{L'}\lim_{x\to1}\frac{x^x(\ln x+1)^2+x^{x-1}}{-1/x^2}=-2.$$

例 2 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^a-a^x}{x^x-a^a}$ $(a>0,x>0)$； (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-(1+2x)^{1/2}}{\ln(1+x^2)}$； (4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x-\sin x}{\arctan x-\tan x}$.

解 (1) 原式$\left(\dfrac{0}{0}\right)\overset{L'}{=\!=}\lim\limits_{x\to a}\dfrac{ax^{a-1}-a^x\ln a}{x^x(\ln x+1)}$ (代入)

$$=\frac{aa^{a-1}-a^a\ln a}{a^a(\ln a+1)}=\frac{1-\ln a}{1+\ln a}.$$

(2) 原式$\left(\dfrac{0}{0}\right)\overset{L'}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\cos xe^{\sin x}}{1-\cos x}\left(\dfrac{0}{0}\right)$

$\overset{L'}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\cos^2xe^{\sin x}+\sin xe^{\sin x}}{\sin x}$ (化简)

$=1+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\cos^2xe^{\sin x}}{\sin x}\left(\dfrac{0}{0}\right)$

$\overset{L'}{=\!=}1+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+(\sin 2x-\cos^2x)e^{\sin x}}{\cos x}$

$=1+0=1.$

(3) 原式$\left(\dfrac{0}{0}\right)\overset{L'}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-(1+2x)^{-1/2}}{2x/(1+x^2)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x^2}{2}\cdot\dfrac{e^x-(1+2x)^{-1/2}}{x}$

$\overset{L'}{=\!=}\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}e^x+(1+2x)^{-3/2}=\dfrac{1}{2}\cdot 2=1.$

(4) 原式$\left(\dfrac{0}{0}\right)\overset{L'}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1/\sqrt{1-x^2}-\cos x}{1/(1+x^2)-\sec^2x}$(化简)

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x^2)\cos^2x}{\sqrt{1-x^2}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}\cos x}{\cos^2x-1-x^2}\left(\dfrac{0}{0}\right)$

$\overset{L'}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x/\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x^2}\cdot\sin x}{-\sin 2x-2x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x+(1-x^2)\sin x}{\sin 2x+2x}\left(\dfrac{0}{0}\right)$

$\overset{L'}{=\!=}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{cois}x-x\sin x+(1-x^2)\cos x-2x\sin x}{2\cos 2x+2}$

$=-\dfrac{1+1}{2+2}=-\dfrac{1}{2}.$

例 3 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$；

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-x^4}-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[4]{x^3}}$.

解 (1) 是$\dfrac{0}{0}$型未定式. 先分解因式再求极限，有

$$\text{原式}=\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x}\cdots\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt[n]{x}}{1-x}$$

$$\overset{L'}{=\!=}\lim_{x\to 1}\frac{1}{2\sqrt{x}}\lim_{x\to 1}\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\cdots\lim_{x\to 1}\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdots\frac{1}{n}=\frac{1}{n!}.$$

(2) $\text{原式}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(2-4x^3)/(2\sqrt{2x-x^4})-1/(3\sqrt[3]{x^2})}{-3/(4\sqrt[4]{x})}$

$$=\frac{-2/2-1/3}{-3/4}=\frac{16}{9}.$$

例 4 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(a+be^x)}{\sqrt{a+bx^2}}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-2x\arctan x/\pi}{e^x+x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\tan 7x}{\ln\tan 2x}$.

解 (1) $\text{原式}\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)\overset{L'}{=\!=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{be^x}{a+be^x}\Big/\dfrac{2bx}{2\sqrt{a+bx^2}}$

$$=1\Big/\frac{b}{\sqrt{b}}=\frac{1}{\sqrt{b}}.$$

(2) $\text{原式}\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)\overset{L'}{=\!=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-2\arctan x/\pi-2x[\pi(1+x^2)]}{e^x-1}$

$$=1.$$

(3) $\text{原式}\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)\overset{L'}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1/(\tan 7x)\cdot\sec^2 7x\cdot 7}{1/(\tan 2x)\cdot\sec^2 2x\cdot 2}$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{7}{2}\frac{\tan 2x}{\tan 7x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{7}{2}\cdot\frac{2x}{7x}=1.$$

例 5　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^{100}}e^{-1/x^2}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\mu}}{e^{\lambda x}}$ $(\mu>0,\lambda>0)$.

解　(1) 作变量代换 $u=\dfrac{1}{x^2}$，则当 $x\to 0$ 时，$u\to+\infty$，于是

$$\text{原式}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{u\to+\infty}\frac{u^{50}}{e^u}\overset{L'}{=\!=}\lim_{u\to+\infty}\frac{50u^{49}}{e^u}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$\overset{L'}{=\!=}\lim_{u\to+\infty}\frac{50\cdot 49u^{48}}{e^u}\overset{L'}{=\!=}\cdots\overset{L'}{=\!=}\lim_{u\to+\infty}\frac{50!}{e^u}=0.$$

(2) $\text{原式}\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)\overset{L'}{=\!=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{xnx^{n-1}}=0.$

此题说明：当 $x\to+\infty$ 时，幂函数 x^n 是对数函数 $\ln x$ 的高阶无穷大.

(3) 当 μ 为正整数时，有

$$\text{原式}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{L'}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\mu x^{\mu-1}}{\lambda e^{\lambda x}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{L'}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\mu(\mu-1)x^{\mu-2}}{\lambda^2e^{\lambda x}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$\overset{L'}{=\!=}\cdots\overset{L'}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\mu}{\lambda^{\mu}e^{\lambda x}}=0.$$

当 μ 不是正整数，但$[\mu]<\mu<[\mu]+1$. 易见

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{[\mu]}}{e^{\lambda x}}=0,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{[\mu]+1}}{e^{\lambda x}}=0.$$

由迫敛性，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\mu}}{e^{\lambda x}}=0$. 所以，当 $\lambda>0,\mu>0$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\mu}}{e^{\lambda x}}=0$.

此极限说明，当 $x\to+\infty$ 时，指数函数 $e^{\lambda x}(\lambda>0)$ 是幂函数 x^{μ} $(\mu>0)$ 的高阶无穷大.

例 6　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cot^2x-\dfrac{1}{x^2}\right)$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$.

解　(1) $\text{原式}(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cot^2x-1}{x^2}\left(\dfrac{0}{0}\right)$

$$\overset{L'}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{2x\cot^2x-x^22\cot x-\csc x}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\sin x - x}{x^3}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\xlongequal{L'}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x+\cos^2 x-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2 x}{3x^2}$$

$$=-2/3.$$

(2) 原式$(\infty-\infty)=\lim_{x\to 1}\dfrac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}\left(\dfrac{0}{0}\right)$

$$\xlongequal{L'}\lim_{x\to 1}\frac{1-1/x}{\ln x+(x-1)/x}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}\left(\frac{0}{0}\right)\xlongequal{L'}\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+2}=\frac{1}{2}.$$

例 7 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\left(1+\dfrac{2}{x}\right)e^{1/x}-1\right]$；

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan 3x^2\right)\cdot x^2$.

解 (1) 原式$(0\cdot\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1+2/x)e^{1/x}-1}{1/x}\left(\dfrac{0}{0}\right)$

$$\xlongequal{L'}\lim_{x\to+\infty}\frac{-e^{1/x}(3/x^2+2/x^3)}{-1/x^2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}e^{1/x}\cdot\left(3+\frac{2}{x}\right)=3e^0=3.$$

(2) 原式$(0\cdot\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi/2-\arctan 3x^2}{1/x^2}\left(\dfrac{0}{0}\right)$

$$\xlongequal{L'}\lim_{x\to+\infty}\frac{-6x/(1+3x^2)^2}{-2/x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^4}{1+ax^4}=\frac{1}{3}.$$

例 8 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{(x^x-1)}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{1/x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+3x^x)^{1/x}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0^+}\tan x^{\ln(1-x)}$.

解 幂指函数$f(x)^{\varphi(x)}$为$0^0,1^\infty,\infty^0$型未定式时，求极限时要用取对数方法，化为$0\cdot\infty$型再化为$\dfrac{0}{0}$型或$\dfrac{\infty}{\infty}$型，用洛比达法则求出极限. 但是，在书写上有两种形式.

一种是写成$\lim f(x)^{\varphi(x)}=\lim \mathrm{e}^{\varphi(x)\ln f(x)}=\mathrm{e}^{\lim\varphi(x)\ln f(x)}$的形式，再将其化为$\mathrm{e}^{\lim \ln f(x)/\frac{1}{\varphi(x)}}$，求出极限.

一种是写成$\lim\varphi(x)\ln f(x)=\lim\dfrac{\ln f(x)}{1/\varphi(x)}$后，再写成$\lim f(x)^{\varphi(x)}=\mathrm{e}^{\lim\varphi(x)\ln f(x)}$的形式.

相比之下，后一种写法看起来简单明了.

(1) 因为

$$\lim_{x\to0^+}(x^x-1)\ln x=\lim_{x\to0^+}(\mathrm{e}^{x\ln x}-1)\ln x$$
$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\mathrm{e}^{x\ln x}-1}{x\ln x}x\ln^2x=\lim_{x\to0^+}x\ln^2x$$
$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln^2x}{1/x}\left(\frac{0}{0}\right)\overset{L'}{=\!=}\lim_{x\to0^+}\frac{2\ln x\cdot1/x}{-1/x^2}$$
$$=-2\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{1/x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{L'}{=\!=}-2\lim_{x\to0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}=0,$$

所以

$$\lim_{x\to0^+}x^{(x^x-1)}=\mathrm{e}^0=1.$$

(2) 因为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$
$$\overset{L'}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\pi/2-\arctan x}\left(\frac{-1}{1+x^2}\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1/(1+x^2)}{\pi/2-\arctan x}\left(\frac{0}{0}\right)$$
$$\overset{L'}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x/(1+x^2)^2}{-1/(1+x^2)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{1+x^2}=0,$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{1/x}=\mathrm{e}^0=1.$$

(3) 因为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln(x+3^3)\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$
$$\overset{L'}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+3^x}(1+3^x\ln3)\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$
$$\overset{L'}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x\ln^23}{1+3^x\ln3}=\ln3,$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty}(x+3^x)^{1/x}=\mathrm{e}^{\ln3}=3.$$

(4) 因为

$$\lim_{x\to0^+}\ln(1-x)\ln\tan x\ (0\cdot\infty)$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln\tan x}{1/\ln(1-x)} \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$\xlongequal{L'} \lim_{x \to 0^+} \frac{1/\tan x - 1/\cos^2 x}{1/[(1-x)\ln^2(1-x)]}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln^2(1-x)}{\sin x} \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{(-1)2\ln(1-x)}{(1-x)\cos x} = 0,$$

所以 $$\lim_{x \to 0^+} \tan x^{\ln(1-x)} = e^0 = 1.$$

例 9 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3}\right)^{1/x}$, $a > 0, b > 0, c > 0$.

(2) $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots a_n^x}{n}\right)^{n/x}$, $a_1 > 0, a_2 > 0, \cdots, a_n > 0$.

解 (1) 因为 $$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\ln(a^x + b^x + c^x) - \ln 3}{x} \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\xlongequal{L'} \lim_{x \to 0} \frac{a^x\ln a + b^x\ln b + c^x\ln c}{a^x + b^x + c^x}$$

$$= \frac{\ln a + \ln b + \ln c}{3} = \ln \sqrt[3]{abc},$$

所以 $$\lim_{x \to 0}\left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3}\right)^{1/x} = e^{\ln \sqrt[3]{abc}} = \sqrt[3]{abc}.$$

(2) 因为

$$\lim_{x \to 0} \frac{n}{x}\ln\left(\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n}\right) \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\xlongequal{L'} \lim_{x \to 0} \frac{n}{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x} \cdot \frac{a_1^x\ln a_1 + \cdots + a_n^x\ln a_n}{n}$$

$$= \ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n = \ln(a_1 a_2 \cdots a_n),$$

所以 $$\lim_{x \to 0}\left(\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n}\right)^{n/x} = e^{\ln(a_1 a_2 \cdots a_n)} = a_1 a_2 \cdots a_n.$$

例 10 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\arctan\dfrac{n+1}{n}-\dfrac{\pi}{4}\right)\sqrt{n^2+1}$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(1+1/n)}{\operatorname{arccot} n}$.

解　对数列$\{x_n\}$的情形，若把x_n看作整标函数$f(n)$，则$f(n)$是$f(x)$的特殊取法. 因此，可先求$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$，再令$x=n$，得$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$.

(1)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}f(x)&=\lim_{x\to+\infty}\left(\arctan\frac{x+1}{x}-\frac{\pi}{4}\right)\Big/\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\left(\frac{0}{0}\right)\\&\overset{L'}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1\Big/\left[1+\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2\right]\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)}{-x/\sqrt{(x^2+1)^3}}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{(x^2+1)^3}}{x(2x^2+2x+1)}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\\&\overset{L'}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{3x\sqrt{x^2+1}}{6x^2+4x+1}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},\end{aligned}$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\left(\arctan\frac{n+1}{n}-\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{n^2+1}=\frac{1}{2}.$$

(2) 因为

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+1/x)}{\operatorname{arccot}x}\left(\frac{0}{0}\right)\\&\overset{L'}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{x/(1+x)(-1/x^2)}{-1/(1+x^2)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^2}{x+x^2}=1,\end{aligned}$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+1/n)}{\operatorname{arccot}n}=1.$$

在以上的例题中，我们在使用洛必达法则的同时，还使用了两个重要极限、等价无穷小代换、变量代换、有理分式函数时∞的次数比等方法，从而迅速得出结果. 这就要求读者熟练掌握求极限的各种方法和综合运用能力.

例 11　设$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+ce^x)}{\sqrt{1+cx^2}}=4$，确定$c$.

解 是$\frac{\infty}{\infty}$型未定式，依洛必达法则，有

$$原式\overset{L'}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{ce^x}{1+ce^x}\bigg/\frac{cx}{\sqrt{1+cx^2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{ce^x}{1+ce^x}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+cx^2}}{cx}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{c}{e^{-c}+c}\cdot\frac{\sqrt{c}}{c}=\frac{1}{\sqrt{c}},$$

所以
$$\frac{1}{\sqrt{c}}=4\Rightarrow c=\frac{1}{16}.$$

例 12 设$f(x)=x^3+\ln(1-x^3)$，$g(x)=Ax^n$. 若当$x\to0$时，$f(x)$与$g(x)$是等价无穷小.

解 由题设，得

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}\left(\frac{0}{0}\right)\overset{L'}{=\!=}\lim_{x\to0}\frac{x^3+\ln(1-x^3)}{Ax^n}=\lim_{x\to0}\frac{3x^2-3x^2/(1-x^3)}{nAx^{n-1}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-3x^5}{Anx^{n-1}(1-x)}=\lim_{x\to0}\frac{-3}{Anx^{n-6}}=1.$$

故知
$$n=6,\quad An=-3\Rightarrow A=-\frac{1}{2}.$$

例 13 设函数$f(x)$在点$x=a$的邻域内有连续的二阶导数，且$f'(a)\neq0$，证明：

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{1}{f(x)-f(a)}-\frac{1}{(x-a)f'(a)}\right]=-\frac{f''(a)}{2[f'(a)]^2}.$$

证 是$\infty-\infty$型的未定式，故

$$原式=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)f'(a)-[f(x)-f(a)]}{[f(x)-f(a)](x-a)f'(a)}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{L'}{=\!=}\lim_{x\to a}\frac{f'(a)-f'(x)}{f'(x)(x-a)f'(a)+[f(x)-f(a)]f'(a)}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{L'}{=\!=}\lim_{x\to a}\frac{-f''(x)}{f''(x)(x-a)f'(a)+2f'(x)+f'(a)}$$

$$=\frac{f''(a)}{2[f'(a)]^2}.$$

例 14 证明:若函数 $f(x)$ 在点 x 有二阶导数,则

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}=f''(x).$$

证 先应用洛必达法则,再依导数定义,有

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}\left(\frac{0}{0}\right)\\&\overset{L'}{=\!=}\lim_{h\to0}\frac{f'(x+h)-f'(x-h)}{2h}\\&=\frac{1}{2}\lim_{h\to0}\left[\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}+\frac{f'(x-h)-f'(x)}{-h}\right]\\&=\frac{1}{2}[f''(x)+f''(x)]=f''(x).\end{aligned}$$

例 15 设函数 $y=f(x)$ 的二阶导数连续,且 $f''(x)>0,f(0)=0,f'(0)=0$. 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xf(u)}{uf(x)}$,其中 u 是曲线 $y=f(x)$ 上点 $P(x,f(x))$ 处的切线在 x 轴上的截距.

解 (1) 先求 u 的表达式. 由题设 $f''(x)>0$ 知,$f'(x)$ 是严格单调增加函数. 又由 $f'(0)=0$ 知,$x\neq0$ 时,$f'(x)\neq0$. 曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x,f(x))$ 的切线方程为 $Y-f(x)=f'(x)(X-x)$,当 $Y=0$ 时,即得切线在 x 轴上的截距:$u=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

(2) 计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{u}$. 因为利用洛必达法则,得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}u&=\lim_{x\to0}\left(x-\frac{f(x)}{f'(x)}\right)=\lim_{x\to0}x-\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{f'(x)}\left(\frac{0}{0}\right)\\&=-\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{f''(x)}=-\frac{f'(0)}{f''(0)}=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{u}{x}&=\lim_{x\to0}\left(1-\frac{f(x)}{xf'(x)}\right)=1-\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{xf'(x)}\left(\frac{0}{0}\right)\\&\overset{L'}{=\!=}1-\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{f'(x)+xf''(x)}\\&=1-\lim_{x\to0}\frac{f'(x)/x}{f'(x)/x+f''(x)}\end{aligned}$$

$$= 1 - \frac{f''(0)}{f''(0) + f''(0)} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

(3) 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(u)}{f(x)}$. 应用洛必达法则，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(u)}{f(x)}\left(\frac{0}{0}\right) \xlongequal{L'} \lim_{x\to 0}\frac{f'(u)(x - f(x)/f'(x))'}{f'(x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{f'(u)\left\{1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}\right\}}{f'(x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{f'(u)f(x)f''(x)}{[f'(x)]^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left\{f''(x)\cdot\frac{f(x)}{xf'(x)}\cdot\frac{f'(u)/u}{[f'(x)/x]^2}\cdot\frac{u}{x}\right\}$$

$$= f''(0)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{f''(0)}{[f''(0)]^2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

综上所述，最后得

$$\lim_{x\to 0}\frac{xf(u)}{uf(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{u}\lim_{x\to 0}\frac{f(u)}{f(x)} = 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

第三节　泰勒公式

主要内容

1. 泰勒定理　若函数 f 满足下列条件：

(1) 在闭区间$[a,b]$上函数 f 有直到 n 阶的连续导数，

(2) 在开区间(a,b)内函数 f 有 $n+1$ 阶导数，

则对任何 $x,x_0\in(a,b)$，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

泰勒定理又称为泰勒中值定理.等式称为函数 f 在 x_0 的泰勒公式.

$$P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

称为 f 在 x_0 的泰勒多项式.

$R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 称为 f 在 x_0 处泰勒公式的余项. $\xi=x_0+\theta(x-x_0)$, $0<\theta<1$.

2. 当 $n=0$ 时,泰勒定理即拉格朗日中值定理.

3. 泰勒公式在 $x_0=0$ 时称麦克劳林(Maclaurin) 公式.

4. 带皮亚诺(Peano) 型余项的泰勒公式　若函数 f 满足

(1) 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 有直到 $n-1$ 阶的连续导数,

(2) $f^{(n)}(x_0)$ 存在,

则 $$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n),\ x\in U(x_0).$$

5. 常用的初等函数的麦克劳林公式

(1) $\mathrm{e}^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\dfrac{\mathrm{e}^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$;

(2) $$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}};$$

(3) $$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+(-1)^m\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}\sin\left(\theta x+\frac{\pi}{2}\right);$$

(4) $$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}+(-1)^{m+1}\frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}\cos(\theta x);$$

(5) $(1+x)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2$

$$+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\theta x)^{\theta-n-1},$$

其中 $0<\theta<1$.

疑难解析

1. 怎样理解泰勒公式的意义?

答 泰勒公式的意义是,用一个 n 次多项式来逼近函数 f. 而多项式具有形式简单,易于计算等优点.

泰勒公式由 $f(x)$ 的 n 次泰勒多项式 $P_n(x)$ 和余项 $R_n(x)=o[(x-x_0)^n]$ 组成,我们来详细讨论它们.

当 $n=1$ 时,有

$$P_1(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

是 $y=f(x)$ 的曲线在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线(方程),称为曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 的一次密切. 显然,切线与曲线的差异是较大的,只是曲线的近似.

当 $n=2$ 时,有

$$P_2(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 的"二次切线",也称曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 的二次密切. 可以看出,二次切线与曲线的接近程度比切线要好.

当次数越来越高时,接近程度越来越密切,近似程度也越来越高.

2. 泰勒公式的余项有哪些类型?它们各有什么作用?

答 泰勒公式的余项分为两类,一类是定性的,一类是定量的,

它们的本质相同，但性质各异. 定性的余项如皮亚诺型余项 $o((x-x_0)^n)$，仅表示余项是比 $(x-x_0)^n$（当 $x \to x_0$ 时）高阶的无穷小. 如 $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$. 表示当 $x \to 0$ 时，$\sin x$ 用 $x - \frac{x^3}{6}$ 近似，误差（余项）是比 x^3 高阶的无穷小. 定量的余项如拉格朗日型余项 $\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$（$\xi$ 也可写成 $x_0 + \theta(x - x_0)$）、柯西型余项（如在某些函数的幂级数展开时用）. 定量的余项一般用于函数值的计算与函数性态的研究.

方法、技巧与典型例题分析

泰勒公式常用于近似计算、极限计算、不等式与等式证明及某些命题的证明.

一、利用泰勒公式计算极限

利用泰勒公式求极限，一般用麦克劳林公式形式，并采用皮亚诺型余项. 当极限式为分式时，一般要求分子分母展成同一阶的麦克劳林公式，通过比较求出极限.

例 1 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-x^2/2} - \cos x}{x^4}$；　　(2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2/2 + 1 - \sqrt{1+x^2}}{x^2 \sin x^2}$；

(3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan^3(2x)}{x^4}\left(1 - \dfrac{x}{e^x - 1}\right)$；

(4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(\sin x) - \cos x}{\sin^4 x}$.

解 (1) 因为当 $x \to 0$ 时，有

$$e^{-x^2/2} = 1 + \left(-\frac{1}{2}x^2\right) + \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}x^2\right)^2 + o(x^4),$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4),$$

所以 $$e^{-x^2/2} - \cos x = \frac{1}{\varepsilon}x^4 - \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) = \frac{1}{12}x^4 + o(x^4),$$

故 $$\lim_{x\to 0}\frac{x^4/12+o(x^4)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{12}+\frac{o(x^4)}{x^4}\right]=\frac{1}{12}.$$

(2) 当 $x\to 0$ 时,有 $\sqrt{1+x^4}=1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^4)$,故

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2/2+1-\sqrt{1+x^2}}{x^2\sin x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^4/8+o(x^4)}{x^2\cdot x^2}=-\frac{1}{8}.$$

(3) $$原式=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^3(2x)}\cdot\frac{8\sin^3(2x)}{(2x)^3}\cdot\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}8\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}.$$

因为 $x\to 0$ 时,$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$,所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan^3(2x)}{x^4}\left(1-\frac{x}{e^x-1}\right)=8\lim_{x\to 0}\frac{x^2/2+o(x^2)}{x(x+o(x))}=4.$$

(4) 当 $x\to 0$ 时,有

$$\cos(\sin x)=1-\frac{1}{2}\sin^2x+\frac{1}{24}\sin^4x+o(\sin^4x)$$

$$=1-\frac{1}{2}\left[x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)\right]^2$$

$$+\frac{1}{24}\left[x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)\right]^4+o(x^4)$$

$$=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+o(x^4),$$

$$\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4).$$

故 $$原式=\lim_{x\to 0}\frac{5x^4/24-x^4/24+o(x^5)}{\sin^4x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^4/6+o(x^4)}{x^4}=\frac{1}{6}.$$

例 2 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{1/x}-\sqrt{x^6+1}\right]$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$; (3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x+x^2}-1}{e^x-1}$;

(4) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^6}[\cos^2 x\sin^2 x-x^2(1-x^2)^{4/3}]$.

解 (1) 当 $x\to+\infty$ 时，$\frac{1}{x}\to 0$，有

$$e^{1/x}=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right),$$

$$\sqrt{x^6+1}=x^3\left(1+\frac{1}{x^6}\right)^{1/2}=x^3+\frac{1}{2x^3}-\frac{1}{8x^3}+o\left(\frac{1}{x^9}\right),$$

所以 $\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{1/x}-\sqrt{x^6+1}$

$$=\frac{1}{6}+x^3\cdot o\left(\frac{1}{x^3}\right)+\frac{5}{12x}+\frac{1}{12x^2}+o\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{2}\cdot o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$
$$+\frac{1}{2x^3}-\frac{1}{8x^9}+o\left(\frac{1}{x^9}\right).$$

故 $$\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{1/x}-\sqrt{x^6+1}\right]=\frac{1}{6}.$$

(2) 当 $x\to+\infty$ 时，$\frac{1}{x}\to 0$，有

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{4x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

故 $$\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left[x-x+\frac{1}{2}-\frac{1}{3x}+\frac{1}{4x^2}-x^2\cdot o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right]=\frac{1}{2}.$$

(3) 当 $x\to 0$ 时，$\sqrt[3]{1+x+x^2}=1+\frac{1}{3}(x+x^2)+o(x)$，$e^x=1+x+o(x)$. 故

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x+x^2}-1}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+x^2)/3+o(x)}{x+o(x)}=\frac{1}{3}.$$

(4) 当 $x\to 0$ 时，有

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2!}(2x)^2+\frac{1}{4!}(2x)^4-\frac{1}{6!}(2x)^6+o((2x)^7)\right],$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2!}(2x)^2+\frac{1}{4!}(2x)^4-\frac{1}{6!}(2x)^6+o((2x)^7)\right].$$

故
$$\cos^2 x\sin^2 x = x^2-\frac{4}{3}x^4+\frac{32}{45}x^6+o(x^7),$$

$$x^2(1-x^2)^{4/3}=x^2\left[1+\frac{4}{3}(-x^2)+\frac{2}{9}(-x^2)^2+o(x^4)\right]$$
$$=x^2-\frac{4}{3}x^4+\frac{2}{9}x^6+o(x^6).$$

所以
$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^6}\left[\left(\frac{32}{45}-\frac{2}{9}\right)x^6+o(x^6)\right]=\frac{22}{45}.$$

例 3 确定常数 λ 和 μ，使

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{1-x^2}-\lambda x-\mu)=0.$$

解 当 $x\to+\infty$ 时，$\frac{1}{x}\to 0$，有

$$\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}}=1-\frac{1}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

故
$$\text{原式}=\lim_{x\to+\infty}x\left[-\sqrt[3]{1-1/x^3}-\lambda-\frac{\mu}{x}\right]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}x\left[-1+\frac{1}{3x^3}-\lambda-\frac{\mu}{x}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}x\left[(-1-\lambda)-\frac{\mu}{x}+\frac{1}{3}\frac{1}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right].$$

要使左边 = 右边，则 $-1-\lambda=0,\mu=0$，于是 $\lambda=-1,\mu=0$.

例 4 设函数 f 在 $x=0$ 的某邻域内有二阶导数，且

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{1/x}=e^3,$$

求 $f(0),f'(0),f''(0)$ 及 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{1/x}$.

解 由题设条件知，有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\theta x)}{2}x^2(0<\theta<1).$$

又由 $$\lim_{x\to 0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{1/x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left[1+\left(x+\frac{f(x)}{x}\right)\right]^{\frac{1}{x+f(x)/x}\cdot\frac{x+f(x)/x}{x}}=e^3,$$
知 $$\lim_{x\to 0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)=1,\quad \lim_{x\to 0}\left[x+\frac{f(x)}{x}\right]\frac{1}{x}=3,$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0,$$
即 $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(0)}{x}+f'(0)+\frac{f''(\theta x)}{2}x^2\right]=0.$$
知 $f(0)=0, f'(0)=0, f(x)=\frac{f''(\theta x)}{2}x^2 \quad (0<\theta<1)$.

又由 $$\lim_{x\to 0}\left[x+\frac{f(x)}{x}\right]\frac{1}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{f(0)}{x^2}+\frac{f'(0)}{x}+\frac{f''(\theta x)}{2}\right]=3,$$
知 $$\lim_{x\to 0}f''(\theta x)=4\Rightarrow f''(0)=4.$$
所以
$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{1/x}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{x/f(x)\cdot f(x)/x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{x/f(x)\cdot f''(\theta x)x^2/2x^2}$$
$$=e^{4/2}=e^2.$$

二、函数的泰勒展开式或麦克劳林展开式

求函数的展开式，关键是求出高阶导数并写出余项，这项工作比较麻烦，可以用前面求高阶导数的知识、方法和技巧来完成. 更多的是用间接展开法，利用已知展开式和四则运算、导数等运算来完成，这样就比较简单.

例 5 求在点 $x=4$ 的 $f(x)=x^4-5x^3-x^2-3x+4$ 的泰勒多项式.

解 因为 $$f(4)=-56,$$
$$f'(4)=(4x^3-15x^2-2x-3)\Big|_{x=4}=21,$$

$$f''(4)=(12x^2-30x-2)\Big|_{x=4}=74,$$

$$f'''(4)=(24x-30)\Big|_{x=4}=66,\quad f^{(4)}(4)=24,$$

所以

$$\begin{aligned}&x^4-5x^3-x^2-3x+4\\=&-56+21(x-4)+37(x-4)^2\\&+11(x-4)^3+(x-4)^4.\end{aligned}$$

例 6　求函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $x_0=-1$ 的 n 阶泰勒公式.

解　因为 $f^{(n)}(x)=(-1)^n n!x^{-(n+1)}$，$f^n(-1)=-n!$，所以

$$\frac{1}{x}=-\left[1+(x+1)+(x+1)^2+\cdots+(x+1)^n\right]$$

$$+\frac{(-1)^{n+1}}{\xi^{n+2}}(x+1)^{n+1},\ -1<\xi<x.$$

例 7　求下列函数的 n 阶泰勒公式:

(1) $xe^x, x_0=0$;　　　　(2) $\sin x, x_0=\dfrac{\pi}{4}$;

(3) $\arctan x, x_0=0$;　　　　(4) $\arcsin x, x_0=0$.

解　(1) 因为 $f^{(n)}=e^x(k+x)$，所以

$$xe^x=f(0)+f'(0)+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+R_n(x)$$

$$=x+x^2+\frac{1}{2!}x^3+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}x^n+\frac{(n+1+\theta x)}{(n+1)!}e^{\theta x}x^{n+1},$$

$$0<\theta<1.$$

(2) 因为 $f^{(n)}(x)=\sin\left(\dfrac{n\pi}{2}+x\right)$，所以

$$f^{(n)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\begin{cases}(-1)^k\dfrac{\sqrt{2}}{2}, & n=2k,\\[2ex](-1)^k\dfrac{\sqrt{2}}{2}, & n=2k+1,\end{cases}$$

$$\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[1+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2\right.$$

$$-\frac{1}{3!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n}$$

$$+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}+o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}\right)\Bigg].$$

(3) 因为 $y^{(n)}=(n-1)!\cos^n y\sin n\left(y+\frac{\pi}{2}\right)(y=\arctan x)$,

$$y^{(2n)}(0)=0,\quad y^{(2n+1)}(0)=(-1)^n(2n)!,$$

所以 $\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+1})$.

(4) 因为 $y^{(2n)}=0,y^{(2n+1)}(0)=[(2n-1)!!]^2$,所以

$$\arcsin x=x+\frac{1}{3}\frac{1}{2!!}x^3+\frac{1}{5}\frac{3!!}{4!!}x^5$$

$$+\frac{1}{2n+1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n+1}+o(x^{2n+1}).$$

例 8 给定下列一般项的趋向于零的序列,求出它的一个等价无穷小量.

(1) $\alpha_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1$; (2) $\alpha_n=1-n\sin\frac{1}{n}$.

解 (1) 利用泰勒公式.

$$\alpha_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]$$

$$=\left[1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)+\frac{1}{2n}-\frac{1}{4n^2}+\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]-1$$

$$=\frac{1}{12n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

故 $\{\alpha_n\}$ 的等价无穷小量为 $\left\{\frac{1}{12n^2}\right\}$.

(2) $\alpha_n=1-n\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{3!n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]=\frac{1}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$,

故 $\{\alpha_n\}$ 的等价无穷小量为 $\left\{\frac{1}{6n^2}\right\}$.

三、证明不等式或等式及其它

例 9 证明:$\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\sin(2\pi en!)=2\pi$.

证 由泰勒公式,有

$$e=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{1}{(n+1)!}e^{\theta_n},\ 0<\theta_n<1,$$

$$e=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}e^{\theta_{n+1}},\ 0<\theta_{n+1}<1.$$

将上述两式两边相减，得

$$\frac{1}{(n+1)!}e^{\theta_n}=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}e^{\theta_{n+1}},$$

或

$$e^{\theta_n}=1+\frac{1}{(n+2)}e^{\theta_{n+1}}.$$

由

$$\lim_{n\to\infty}e^{\theta_n}=1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+2)}e^{\theta_{n+1}}=1\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\theta_n=0,$$

故

$$2\pi en!=2\pi\left(1+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}e^{\theta_n}\right)n!$$

$$=2\pi k+\frac{2\pi}{(n+1)}e^{\theta_n},\ k=n!\left(1+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right).$$

则

$$n\sin(2\pi en!)=n\sin\frac{2\pi}{n+1}e^{\theta_n}$$

$$=2\pi\frac{n}{n+1}e^{\theta_n}\sin\left(\frac{2\pi}{n+1}e^{\theta_n}\right)\Big/\left(\frac{2\pi}{n+1}e^{\theta_n}\right),$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}n\sin(2\pi en!)=\lim_{n\to\infty}2\pi e^{\theta_n}\frac{n}{n+1}\sin\left(\frac{2\pi}{n+1}e^{\theta_n}\right)\Big/\left(\frac{2\pi}{n+1}e^{\theta_n}\right)$$

$$=2\pi.$$

例 10 用泰勒公式证明：

$$\frac{a+b+c}{3}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}.$$

证 设 $f(x)=x^2$，则

$$f'(x)=2x,\ f''(x)=2>0,$$

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2,$$

即

$$f(x)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

取

$x=a$， 得 $a^2\geqslant x_0^2+2x_0(a-x_0)$，

$x=b$， 得 $b^2\geqslant x_0^2+2x_0(b-x_0)$，

$x=c$， 得 $c^2\geqslant x_0^2+2x_0(c-x_0)$.

将不等式两边相加，得

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant 3x_0^2+2x_0(a+b+c)-6x_0^2.$$

取 $x_0=\frac{1}{3}(a+b+c)$，则 x_0 在 a,b,c 之间，故

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant 3x_0^2=3\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2,$$

即
$$\frac{a+b+c}{3} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}.$$

例 11 设 $f(x)$ 有二阶导数，且

$$f(x) \leqslant \frac{1}{2}[f(x-h)+f(x+h)],$$

试证：$f''(x) \geqslant 0$.

证 由泰勒公式，有

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2+o(h^2),$$

$$f(x-h)=f(x)-f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2+o(h^2).$$

将二式相加再除以 h^2，利用题设条件，即得

$$f''(x)+o(1) \geqslant 0.$$

令 $h \to 0$，取极限得 $f''(x) \geqslant 0$.

例 12 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上有二阶导数，且 $f'(a)=f'(b)=0$，证明：$\exists\ \xi \in (a,b)$，使

$$|f''\xi| \geqslant \frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

证 将 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ 分别在点 a 和点 b 展成泰勒公式，考虑到 $f'(a)=f'(b)=0$，有

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2, \quad a<\xi_1<\frac{a+b}{2},$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2, \quad \frac{a+b}{2}<\xi_2<b.$$

将第二式减去第一式，得

$$f(b) - f(a) + \frac{1}{8}[f''(\xi_2) - f''(\xi_1)](b-a)^2 = 0,$$

故 $$\frac{4|f(b)-f(a)|}{(b-a)^2} \leqslant \frac{1}{2}(|f''(\xi_1) + f''|\xi_2|) \leqslant |f''(\xi)|.$$

$$f''(\xi) = \max\{|f''(\xi_1)|, |f''(\xi_2)|\}.$$

例 13 设 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内有四阶导数，且 $|f^{(4)}(x)| \leqslant M$，$M > 0$. 又 $x_1 = x_0 - h, x_2 = x_0 + h$，证明：

$$\left| f''(x_0) - \frac{f(x_1) - 2f(x_0) + f(x_2)}{h^2} \right| \leqslant \frac{1}{12}Mh^2.$$

证 将 $f(x_1)$ 和 $f(x_2)$ 分别在点 x_0 展开，得

$$f(x_i) = f(x_0) + f'(x_0)(x_i - x) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x_i - x_0)^2$$
$$+ \frac{f'''(x_0)}{3!}(x_i - x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(\xi_i)}{4!}(x_i - x_0)^4, \quad i = 1,2.$$

则 $$f(x_1) = f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2$$
$$- \frac{1}{6}f'''(x_0)h^3 + \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{24}h^4,$$

$$f(x_2) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2$$
$$+ \frac{1}{6}f'''(x_0)h^3 + \frac{f^{(4)}(\xi_2)}{24}h^4,$$
$$x_1 < \xi_1 < x_0,\ x_0 < \xi_2 < x_2.$$

将二式相加，得

$$f(x_1) + f(x_2) = 2f(x_0) + f''(x_0)h^2$$
$$+ \frac{h^4}{24}[f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2)],$$

所以 $$\left| f''(x_0) - \frac{f(x_1) - 2f(x_0) + f(x_2)}{h^2} \right|$$
$$\leqslant \frac{h^2}{24}[|f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2)|] \leqslant \frac{1}{12}Mh^2.$$

例 14 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上二阶可导，且 $|f(x)| \leqslant 1$，

$|f''(x)| \leqslant 1$，证明：在$[0,1]$上必有 $|f'(x)| \leqslant 2$.

证　将 $f(2)$，$f(0)$ 在任意点 $x \in [0,2]$ 展开，有

$$f(2) = f(x) + f'(x)(2-x) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)(2-x)^2,\ \xi_1 \in (x,2),$$

$$f(0) = f(x) + f'(x)(-x) + \frac{1}{2}f''(\xi_2)(-x)^2,\ \xi_2 \in (0,x).$$

故　$$f(2) - f(0) = 2f'(x) - \frac{1}{2}x^2 f''(\xi_2) + \frac{1}{2}(2-x)^2 f''(\xi_1).$$

因为 $|f(x)| \leqslant 1$，$|f''(x)| \leqslant 1$，所以

$$\begin{aligned}2|f'(x)| &\leqslant |f(2)| + |f(1)| + \frac{x^2}{2}|f''(\xi_2)| \\ &\quad + \frac{1}{2}(2-x)^2|f''(\xi_1)| \\ &\leqslant 2 + \frac{1}{2}[x^2 + (2-x)^2].\end{aligned}$$

又，函数 $g(x) = 2 + \frac{1}{2}[x^2 + (2-x)^2]$ 在 $x = 0$ 和 $x = 2$ 取得最大值 $g(0) = (2) = 4$，故

$$2|f'(x)| \leqslant 4 \Rightarrow |f'(x)| \leqslant 2.$$

例 15　设 $f(x)$ 在$[0,1]$上有二阶导数，且 $f(0) = f(1) = 0$，$\min\{f(x) | x \in [0,1]\} = -1$，证明：$\exists\ \xi \in (0,1)$，使得 $f''(\xi) \geqslant 8$.

证　设有 $f(x_0) = -1$，$x_0 \in (0,1)$，且 $f'(x_0) = 0$.

将 $f(0)$ 与 $f(1)$ 分别在 x_0 展开，得

$$f(0) = 0 = -1 + \frac{f''(\xi_1)}{2!}x_0^2 \Rightarrow f''(\xi_1) = \frac{2}{x_0^2},\ 0 < \xi_1 < x_0,$$

$$f(1) = 0 = -1 + \frac{f''(\xi_2)}{2!}(1-x_0)^2 \Rightarrow f''(\xi_2) = \frac{2}{(1-x_0)^2},$$

$$x_0 < \xi_2 < 1.$$

显然，当 $x_0 < \frac{1}{2}$ 时，　$f''(\xi_1) \geqslant \frac{2}{(1/2)^2} = 8$；

当 $x_0 > \frac{1}{2}$ 时，　$f''(\xi_2) \geqslant \frac{2}{(1-1/2)^2} = 8$.

从而知，存在 $\xi \in (0,1)$，使 $f''(\xi) \geqslant 8$.

例 16 设 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上二次可微，且 $\forall x \in \mathbf{R}$，有 $|f(x)| \leqslant M_0$，$|f''(x)| \leqslant M_2$.

(1) 写出 $f(x+h)$，$f(x-h)$ 关于 h 的有拉格朗日余项的泰勒公式；

(2) 证明：$\forall h > 0$，有 $|f(x)| \leqslant \dfrac{M_0}{h} + \dfrac{hM_2}{2}$；

(3) 证明：$|f'(x)| \leqslant \sqrt{2M_0M_2}$.

解 (1) $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \dfrac{f''(x+\theta_1 h)}{2}h^2,$

$$0 < \theta_1 < 1,$$

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(x-\theta_2 h)}{2}h^2, \quad 0 < \theta_2 < 1.$$

(2) 将题(1) 中的第一式减去第二式，得

$$2f'(x)h = f(x+h) - f(x-h) + \frac{h^2}{2}[f''(x+\theta_1 h) - f''(x-\theta_2 h)]$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \frac{1}{4}[f''(x-\theta_2 h) - f''(x+\theta_1 h)]h.$$

由题设条件，对上式两边取绝对值，得

$$|f'(x)| \leqslant \frac{M_0}{h} + \frac{h}{2}M_2.$$

(3) 设 $|f'(x)| \leqslant \dfrac{M_0}{h} + \dfrac{hM_2}{2} = \varphi(h)\ (h > 0)$，则

$$\varphi(h) \geqslant 2\sqrt{\frac{M_0}{h} \cdot \frac{hM_2}{2}} = \sqrt{2M_0M_2} \quad \left(h = \sqrt{\frac{2M_2}{M_2}} \text{ 时相等}\right),$$

所以，代入上式，即得

$$|f'(x)| \leqslant \sqrt{\frac{M_0M_2}{2}} + \sqrt{\frac{M_0M_2}{2}} = \sqrt{2M_0M_2}.$$

用泰勒公式还可证明其它命题.

例 17 设 $f''(x)$ 连续，且 $f''(x) \neq 0$. 求出在中值定理 $f(x+h) - f(x) = hf'(x+\theta h)$ 中的 θ 当 $h \to 0$ 时的极限.

证 依泰勒公式，有

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x+\theta_1 h)h^2,$$

与题设等式相比较，得

$$f'(x+\theta h) - f'(x) = \frac{1}{2}f''(x+\theta_1 h)h.$$

对 $f'(x)$ 在 $(x, x+\theta h)$ 上应用拉格朗日中值定理，得

$$f'(x+\theta h) - f'(x) = f''(x+\theta_2\theta h)\theta h \ (0 < \theta_2 < 1),$$

故
$$\theta = \frac{f''(x+\theta_1 h)h/2}{f''(x+\theta_2\theta h)h} = \frac{f''(x+\theta_1 h)}{2f''(x+\theta_2\theta h)}.$$

由 $f''(x)$ 的连续性，得

$$\lim_{h\to 0}\theta = \lim_{h\to 0}\frac{f''(x+\theta_1 h)}{2f''(x+\theta_2\theta h)} = \frac{1}{2}.$$

例 18 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有连续三阶导数，且 $\forall\, h > 0$，有

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'\left(x + \frac{h}{2}\right),$$

证明：$f(x)$ 是二次多项式.

证 对任意 $x \in \mathbf{R}$，将函数 $f(x+h)$ 和 $f'(x+h)$ 分别展为泰勒公式，有

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \frac{f'''(\xi)}{6}h^3,\ x < \xi < x+h,$$

$$f'\left(x+\frac{h}{2}\right) = f'(x) + f''(x)\,\frac{h}{2} + \frac{f'''(\eta)}{2}\,\frac{h^2}{4},\ x < \eta < x + \frac{h}{2}.$$

将上述二式代入题给等式，得

$$f'(x)+\frac{f''(x)}{2}h+\frac{f'''(\xi)}{6}h^2=f'(x)+f''(x)\frac{h}{2}+\frac{f'''(\eta)}{8}h^2,$$

即
$$f'''(\xi)=\frac{3}{4}f'''(\eta).$$

当 $h\to 0$ 时，$\xi\to x,\eta\to x$. 由 $f'''(x)$ 的连续性，得

$$\lim_{h\to 0}f'''(\xi)=\frac{3}{4}\lim_{x\to 0}f'''(\eta)\Rightarrow f'''(x)=\frac{3}{4}f'''(x),$$

即等式成立 $\Longleftrightarrow f'''(x)=0$.

由 $f'''(x)=0$ 知，$\forall\ x\in\mathbf{R}$，$f(x)$ 是二次多项式.

例 19 证明：函数 $f(x)$ 是 n 次多项式的充分必要条件是 $f^{(n+1)}(x)\equiv 0$.

证 **必要性** 若 $f(x)$ 是 n 次多项式，则

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n,$$

$a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是常数. 显然，$f^{(n+1)}(x)\equiv 0$.

充分性 将 $f(x)$ 在 $x=0$ 展成麦克劳林公式，则 $\forall\ x\in\mathbf{R}$，有

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

其中 $0<\theta<1$. 若 $f^{(n+1)}(x)\equiv 0$，则上式为

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

显然，$f(x)$ 是 n 次多项式.

例 20 设 $f(x)$ 是 n 次多项式，且 $f(x_0)=f'(x_0)=\cdots=f^{m}(x_0)=0$，$f^{(m+1)}(x_0)\neq 0\ (m\leqslant n-1)$，证明：$x=x_0$ 是方程 $f(x)=0$ 的 $m+1$ 重根.

证 将 $f(x)$ 在 x_0 展为泰勒展开式，有

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots$$
$$+\frac{f^{(m+1)}(x_0)}{(m+1)!}(x-x_0)^{m+1}+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$= (x - x_0)^{m+1}\left[\frac{f^{(m+1)}(x_0)}{(m+1)!} + \frac{f^{(m+2)}(x_0)}{(m+2)!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^{n-m-1}\right].$$

记 $$g(x) = \frac{f^{(m+1)}(x_0)}{(m+1)!} + \cdots + \frac{f^{(n)}x_0}{n!}(x - x_0)^{n-m-1},$$

则 $$g(x_0) \neq 0.$$

由 $f(x) = (x - x_0)^{m+1}g(x)$ 知，x_0 是 $f(x)$ 的 $m+1$ 重根.

例 21 设 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内有二阶连续导数，且 $f''(x) \neq 0$，证明：

(1) $\forall x \in (-1,1)$ 且 $x \neq 0$，$\exists$ 惟一的 $\theta(x) \in (0,1)$，使

$$f(x) = f(0) + xf'[\theta(x)x];$$

(2) $\lim\limits_{x \to 0}\theta(x) = \frac{1}{2}$.

证 (1) 对任 $x \neq 0$，且 $x \in (-1,1)$，由拉格朗日中值定理，有

$$f(x) = f(0) + f'(\theta(x)x) \cdot (x - 0) \quad (0 < \theta(x) < 1).$$

因为 $f''(x)$ 在 $(-1,1)$ 内连续，且 $f''(x) \neq 0$，所以 $f''(x)$ 在 $(-1,1)$ 内不改变符号. 不妨设 $f''(x) > 0$（$f''(x) < 0$ 类似可证），则 $f'(x)$ 严格递增，故 $\theta(x)$ 惟一.

(2) 由泰勒公式，有

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(\xi)x^2 \quad (\xi \text{ 在 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间}),$$

故 $$xf'(\theta(x)x) = f(x) - f(0) = f'(0)x + \frac{1}{2}f''(\xi)x^2,$$

即 $$f'(\theta(x)x) - f'(0) = \frac{1}{2}f''(\xi)x.$$

而 $$\lim_{x \to 0}\frac{f'(\theta(x)x) - f'(0)}{\theta(x)x} = f''(0), \quad \lim_{x \to 0}f''(\xi) = f''(0),$$

所以 $$\lim_{x \to 0}\theta(x) = \frac{1}{2}.$$

(由 $\theta(x)\dfrac{f'(\theta(x)x)-f'(0)}{\theta(x)x}=\dfrac{1}{2}f''(\xi)$，两边取 $x\to 0$ 的极限即得).

例 22 证明：若

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta h),\ 0<\theta<1,$$

且 $f^{(n+1)}(x)\neq 0$，则$\lim\limits_{x\to 0}\theta=\dfrac{1}{n+1}$.

证 因为 $f^{(n+1)}(x)\neq 0$，由泰勒公式，有

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a)+o(h^{n+1}).$$

于是，将题给等式减去泰勒公式并整理，得

$$\frac{f^{(n)}(a+\theta h)-f^{(n)}(a)}{h}=\frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(a)+\frac{n!}{h^{n+1}}o(h^{n+1}).$$

令 $h\to 0$，对上式两边取极限，得

$$\lim_{h\to 0}\theta\frac{f^{(n)}(a+\theta h)-f^{(n)}(a)}{h\theta}=\lim_{h\to 0}\theta\cdot f^{(n+1)}(a)=\frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(a),$$

所以

$$\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{n+1}.$$

例 23 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内 $f''(x)>0$，证明：$\forall\ x_1,x_2\in[x_1,x_2]$，且 $x_1<x_2$，有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

证 满足上述不等式的函数是凸函数. 一般利用拉格朗日中值定理证明(读者不妨一试). 在这里，我们利用泰勒公式来证明.

将 $f(x)$ 在 $x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}$ 处泰勒展开，得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2,$$

ξ 在 x 与 x_0 之间. 又

$$f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) + \frac{f''(\xi_1)}{2!}(x - x_0)^2,\ \xi_1 \in (x_1, x_0),$$

$$f(x_2) = f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0) + \frac{f''(\xi_2)}{2!}(x_2 - x_0)^2,\ \xi_2 \in (x_0, x_2).$$

将上述两式相加后除以 2,考虑 $x_1 - x_0 = -(x_2 - x_0)$,得

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} = f(x_0) + \frac{f''(\xi_1) + f''(\xi_2)}{4}\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2.$$

因为 $f''(x) > 0$,所以上式右边第二项大于零,故

$$f(x_0) = f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

第四节 函数的单调性与极值

主要内容

1. 设函数 f 在 (a,b) 内可导.

(1) f 在 (a,b) 内单调增加(或单调减少)的充要条件是

$$f'(x) \geqslant 0\ (\text{或 } f'(x) \leqslant 0),\ x \in (a,b);$$

(2) f 在 (a,b) 内严格单调增加的充要条件是,对一切 $x \in (a,b)$,有 $f'(x) \geqslant 0$ (或 $f'(x) \leqslant 0$),且在 (a,b) 内的任何子区间上 $f'(x) \not\equiv 0$.

推论 若函数 f 在 (a,b) 内可导,且 $f'(x) > 0$ (或 $f'(x) < 0$),则 f 在 (a,b) 内严格单调增加(或严格单调减少).

注意 推论是严格单调的充分条件,不是充要条件.

2. 若函数 f 在 x_0 可导,且在 x_0 取得极值,则称 x_0 为 f 的稳定

点(或驻点、静止点),且将 $f'(x_0)=0$ 称为极值的必要条件.

3. 极值的第一充分条件　设 f 在 $U(x_0)$ 内连续,在 $U^\circ(x_0)$ 内可导.

(1) 若当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时,$f'(x)\geqslant 0$,当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时,$f'(x)\leqslant 0$,则 f 在 x_0 取得极大值;

(2) 若当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时,$f'(x)\leqslant 0$,当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时,$f'(x)\geqslant 0$,则 f 在 x_0 取得极小值.

4. 极值的第二充分条件　设 f 在 $U(x_0)$ 内一阶可导,在 $x=x_0$ 二阶可导,且 $f'(x_0)=0$,$f''(x_0)\neq 0$,则

(1) 若 $f''(x_0)<0$,f 在 x_0 取得极大值;

(2) 若 $f''(x_0)>0$,f 在 x_0 取得极小值.

5. 极值的第三充分条件　f 在 $U(x_0)$ 内存在直到 $n-1$ 阶导数,在 $x=x_0 n$ 阶可导,且 $f^{(n)}(x_0)=0$ $(k=0,1,\cdots,n-1)$,$f^{(n)}(x_0)\neq 0$,则

(1) 当 n 为偶数时,f 在 $x=x_0$ 有极值. 且当 $f^{(n)}(x_0)<0$ 时,$f(x_0)$ 为极大值;当 $f^{(n)}(x_0)>0$ 时,$f(x_0)$ 为极小值.

(2) 当 n 为奇数时,f 在 $x=x_0$ 无极值.

6. 若 f 在 $[a,b]$ 上连续,则 f 在 $[a,b]$ 上必有最大值 M 与最小值 m.

(1) 对以解析式表达的函数,可以通过比较所有稳定点,不可导点和区间端点的函数值大小来确定函数 f 的最大值与最小值.

(2) 对应用问题,一般不考虑区间端点. 也可以通过比较稳定点、不可导点函数值大小确定 f 的最大值与最小值.

若问题只有一个稳定点,可以根据问题的实际意义确定是最大值还是最小值.

疑难解析

1. 若 $f'(x_0)>0$,能否说函数 f 在 $U(x_0)$ 内单调增加?

答　若$f'(x_0)>0$，则$f(x)$在点x_0严格单调增加. 即$\forall\ x\in(x_0-\delta,x_0)$，有$f(x)<f(x_0)$；$\forall\ x\in(x_0,x_0+\delta)$，有$f(x_0)<f(x)$. 但两个不等式之间的关系不一定能传递，即$f$在$(x_0-\delta,x_0+\delta)$内不一定严格单调增加. 例如

$$f(x)=\begin{cases}x+x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

当$x\neq 0$时，有　　$$f'(x)=1+2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x},$$

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x+\Delta x^2\sin(1/\Delta x)-0}{\Delta x}=1>0$$

所以，$f(x)$在$x=0$严格单调增加. 但当$x\neq 0$时，有

$$f''(x)=2\sin\frac{1}{x}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x},$$

$$f''\left(\frac{1}{2n\pi}\right)=-\ 4n\pi\begin{cases}<0, & n\text{ 为正整数},\\ >0, & n\text{ 为负整数}.\end{cases}$$

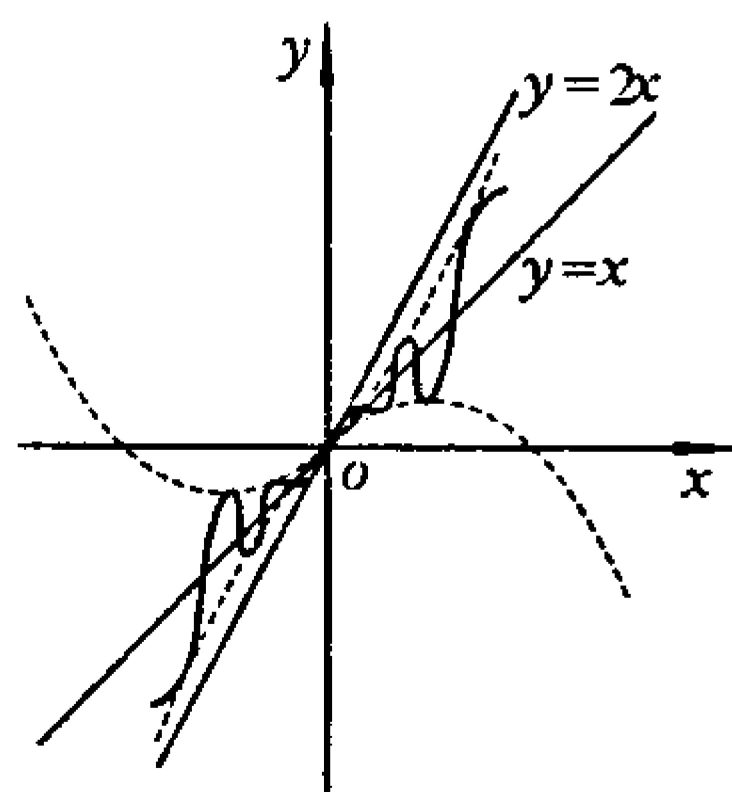


图 4.1

而$f'\left(\dfrac{1}{2n\pi}\right)=0$. 故$f(x)$在点$\dfrac{1}{2n\pi}$都有极大值. 由于$x_n=\dfrac{1}{2n\pi}\to 0$，所以，在任何$(-\varepsilon,\varepsilon)$内，$f$都不是严格单调增加的，而是作无穷次的振荡.

2. 怎样理解函数的极值与最值？

答　极值与最值的问题是一个局部与整体的问题. 极值是函数的局部性质，即函数f在某个$U(x_0)$内所具有的$f(x_0)<f(x)$（或$f(x_0)>f(x)$）的性质. 因此，从图 4.1 可以看出，一个函数f在区间$[a,b]$上可以有多个极大值与极小值，此极大值可能小于彼极小值. 而最值是函数的整体性质，在$[a,b]$上连续的函数必有最大值与最小值，最大值与最小值都是惟一的. 最大值与最小值可能是极值，也可能不是极值.

方法、技巧与典型例题分析

一、函数的单调性问题

函数的单调性问题包括确定函数的单调区间、证明不等式、确定方程根的个数和证明某些命题.其中对方法和技巧要求较高的是证明不等式,证明不等式的关键是要引入一个函数.引入函数的方法有多种:最简单的是将不等式的一边移到另一边构成辅助函数;较复杂的则需根据对不等式特征的观察加以确定,因而有一定的技巧,需要通过多练习才能掌握.

例 1 讨论下列函数的单调性:

(1) $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x},\ x>0$;

(2) $y=\sqrt[3]{(2x-a)(a-x)^{2}},\ a>0$;

(3) $y=x+|\sin x|$;　　(4) $y=x^{n}\cdot \mathrm{e}^{-x},\ n>0, x>0.$

解 (1) 因为 $\ln y=x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=x[\ln(1+x)-\ln x]$,两边求导,得

$$\frac{y'}{y}=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+x\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{x}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}$$

$$=\ln(1+x)-\ln x-\frac{1}{1+x}.$$

因为,由拉格朗日中值定理,在 $[x,1+x]$ 上有

$$\ln(1+x)-\ln x=\frac{1}{\xi}(1+x-x)=\frac{1}{\xi},\ \xi\in(x,1+x),$$

所以
$$\frac{1}{1+x}<\frac{1}{\xi},$$

即
$$\ln(1+x)-\ln x-\frac{1}{1+x}=\frac{1}{\xi}-\frac{1}{1+x}>0.$$

又 $y>0$,所以

$$y'=y\left[\ln(1+x)-\ln x-\frac{1}{1+x}\right]>0.$$

即 $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$ 在$(0,+\infty)$内单调增加.

(2) 因为 $y'=-6(x-2a/3)\Big/\left[3\sqrt[3]{(2x-a)^2(a-x)}\right]$,稳定点为$\dfrac{2}{3}a$,导数不存在的点为$\dfrac{a}{2}$和 a.

在$(-\infty,a/2)$内,$y'>0$,函数单调增加;

在$(a/2,2a/3)$内,$y'>0$,函数单调增加;

在$(2a/3,a)$内,$y'<0$,函数单调减少;

在$(a,+\infty)$内,$y'>0$,函数单调增加.

(3) 因为函数含绝对值记号,要分区间讨论.

当 $2n\pi\leqslant 2x\leqslant(2n+1)\pi$ 时,$\sin 2x\geqslant 0$;

当$(2n-1)\pi\leqslant 2x\leqslant 2n\pi$ 时,$\sin 2x\leqslant 0$.

所以,当 $2n\pi\leqslant 2x\leqslant(2n+1)\pi$,即 $n\pi\leqslant x\leqslant n\pi+\pi/2$ 时,有

$$y=x+\sin 2x,\quad y'=1+2\cos 2x,$$

$$y'\geqslant 0\Longleftrightarrow\cos 2x\geqslant-1/2\Longleftrightarrow 2n\pi\leqslant 2x\leqslant 2n\pi+2\pi/3,$$

即 $n\pi\leqslant x\leqslant n\pi+\pi/3$. 故

当 $n\pi\leqslant x\leqslant n\pi+\pi/3$ 时,$y'\geqslant 0$,y 单调增加;

当 $n\pi+\pi/3\leqslant x\leqslant n\pi+\pi/2$ 时,$y'\leqslant 0$,y 单调减少.

类似地,当$(2n-1)\pi\leqslant 2x\leqslant 2n\pi$,即 $n\pi-\pi/2\leqslant x\leqslant n\pi$ 时,

$$y=x-\sin 2x,\quad y'=1-2\cos 2x,$$

$$y'\geqslant 0\Longleftrightarrow\cos 2x\leqslant 1/2\Longleftrightarrow(2n-1)\pi\leqslant 2x\leqslant 2n\pi-\pi/3,$$

即 $n\pi-\pi/2\leqslant x\leqslant n\pi-\pi/6$,故

当 $n\pi-\pi/2\leqslant x\leqslant n\pi-\pi/6$ 时,$y'\geqslant 0$,y 单调增加;

当 $n\pi-\pi/6\leqslant x\leqslant n\pi$ 时,$y'\leqslant 0$,y 单调减少.

(4) 因为 $y'=nx^{n-1}\mathrm{e}^{-x}+x^n\mathrm{e}^{-x}=(n-x)\mathrm{e}^{-x}\cdot x^n$,稳定点为 $x=n$.

在$(0,n)$内,$y'>0$,y 单调增加;

在(n,∞)内,$y'<0$,y 单调减少.

例 2 判断下列命题的真伪：

(1) 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内单增且可导，则 $f'(x)>0$.

(2) 单调函数的导函数必单调.

(3) 一个函数的导函数单调，则函数必单调.

(4) $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，在 $[a,b]$ 上单调减少，则 $f'(x)\leqslant 0$.

解 (1) 伪. 例如 $y=x^3$ 在 $(-2,2)$ 内单调增加且可导，但

$$f'(0)=3x^2\Big|_{x=0}=0.$$

应改为 $f'(x)\geqslant 0$，命题才成立.

(2) 伪. 例如 $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调，但 $y'=3x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内不单调.

(3) 伪. 例如 $y=x^2$ 的导函数 $y'=2x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调，但 $y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内不单调.

(4) 真. 因为 $\forall\ x_0\in(a,b)$，取 $[x_1,x_2]\subset(a,b)$，且 $x_0\in(x_1,x_2)$，则 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上满足拉格朗日中值定理条件，所以

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1),\ \xi\in(x_1,x_2).$$

而 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少，于是

$$f'(\xi)(x_2-x_1)\leqslant 0,\quad f'(\xi)\leqslant 0.$$

显然，上式当 $x_2-x_1\to 0^+$ 时均成立.

当 $x_2-x_1\to 0^+$ 时，由 $f'(x)$ 的连续性，$\lim\limits_{\xi\to x_0}f'(\xi)=f'(x_0)$. 又由有极限函数的局部保号性知，由 $\lim\limits_{\xi\to x_0}f'(\xi)\leqslant 0\Rightarrow f'(x_0)\leqslant 0$. 再由 x_0 的任意性，确定在 (a,b) 内恒有 $f'(x_0)\leqslant 0$.

例 3 证明下列不等式：

(1) $e^{\pi}>\pi^{e}$；

(2) $2^x>x^2(x>4)$，并说明，当 $0<x<1$ 或 $x=e$ 时，只有 $y=x$ 才满足 $x^y=y^x$；当 $x>1$ 且 $x\neq e$ 时，对一切 x，都能找到惟一的 $y\neq x$，使 $y^x=x^y$.

证 考虑一般情形：$a^b>b^a$（设 $a>1,b>1$），则两边取对数

后可得等价不等式：$\frac{\ln a}{a} > \frac{\ln b}{a}$.

于是引入辅助函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$，则

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}\begin{cases} < 0, & x > e, \\ > 0, & x < e. \end{cases}$$

也可以引入辅助函数 $f(x) = x - e\ln x$ 来讨论 $e^\pi > \pi^e$.

(1) 由 $f'(x)$ 在 $(e, +\infty) < 0$ 知，$f(x)$ 严格单调减少，因此 $\frac{\ln e}{e} > \frac{\ln\pi}{\pi}$，即 $\pi\ln e > e\ln\pi$，得 $e^\pi > \pi^e$.

(2) 因为 $x = 4 > e$，所以由 $f'(x)$ 在 $(x, +\infty) < 0$ 知，$f(x)$ 严格单调减少，因此 $\frac{\ln 2}{2} > \frac{\ln x}{x}$，即 $x\ln 2 > 2\ln x$，得 $2^x > x^2$.

当 $0 < x < 1$ 时，$f'(x) > 0$，$f(x)$ 严格单调增加. 当 $y, x \in (0, 1)$ 且 $y \neq x$ 时，$f(x) \neq f(y)$. 所以仅当 $x = y$ 时，才有 $y^x = x^y$；当 $x = e$ 时，$f(x)$ 取得极大值，对任何 $y \neq e$，都有 $f(y) < f(e)$，故仅当 $y = x = e$ 时，有 $x^y = y^x$.

对 $x > 1$ 且 $x \neq e$，因为在 $(1, e)$ 内 $f(x)$ 严格单调增加，在 $(e, +\infty)$ 内严格单调减少，所以直线 $y = \frac{\ln x_0}{x_0}$ 与曲线 $y = \frac{\ln x}{x}$ 有且只有两个交点 $\left(x_0, \frac{\ln x_0}{x_0}\right)$，$\left(y_0, \frac{\ln x_0}{x_0}\right)$. 即

$$\frac{\ln y_0}{y_0} = \frac{\ln x_0}{x_0} \Rightarrow x_0^{y_0} = y_0^{x_0}.$$

这表明，当 $x > 1$ 且 $x \neq e$ 时，有惟一的 $y \neq x$，使 $y^x = x^y$.

实际上，要证 $a^b > b^a$，可转化为：(1) 证 $a^b - b^a > 0$；(2) 证 $b\ln a - a\ln b > 0$；(3) 证 $a^b/b^a > 1$. 从而可以选择一种最易确定 $f'(x)$ 符号的方法.

例 4 证明下列不等式：

(1) $1 + x\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) > \sqrt{1 + x^2}$, $x > 0$;

(2) $\frac{|a + b|}{\pi + |a + b|} \leqslant \frac{|a|}{\pi + |a|} + \frac{|b|}{\pi + |b|}$ $(a, b \in \mathbf{R})$;

(3) $\frac{2}{e} < x^{\frac{x}{1-x}} + x^{\frac{1}{1-x}} < 1$, $0 < x < 1$;

(4) $0 < \frac{x\ln x}{x^2 - 1} < \frac{1}{2}$, $x > 0, x \neq 1$.

证 (1) 设 $f(x) = 1 + x\ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$,则

$$f'(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \frac{x}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \ln(x + \sqrt{1+x^2}) > 0, \ x > 0.$$

所以在$(0, +\infty)$内,$f(x)$严格单调增加.而$f(0) = 0$,故

$$1 + x\ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} > 0,$$

即 $$1 + x\ln(x + \sqrt{1+x^2}) > \sqrt{1+x^2}, \ x > 0.$$

(2) 设 $f(x) = \frac{x}{\pi + x}$,则 $f'(x) = \frac{\pi}{(\pi+x)^2} > 0$.所以 $f(x)$ 单调增加.

又 $|a+b| \leqslant |a| + |b|$,令 $x_1 = |a+b|, x_2 = |a| + |b|$,则 $f(x_1) < f(x_2)$,即

$$\frac{|a+b|}{\pi + |a+b|} \leqslant \frac{|a|+|b|}{\pi + |a| + |b|} \leqslant \frac{|a|}{\pi + |a|} + \frac{|b|}{\pi + |b|}.$$

(3) 令 $f(x) = x^{\frac{x}{1-x}} + x^{\frac{1}{1-x}} = (1+x)x^{\frac{x}{1-x}}$,则 $f(x) > 0$.对等式两边取对数可得

$$\ln f(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{1-x}\ln x, \ x > 0,$$

$$f'(x) = f(x) \cdot \frac{\ln x + 2(1-x)/(1+x)}{(1-x)^2}.$$

因为 $$g'(x) = \left[\ln x + 2\frac{1-x}{1+x}\right]' = \frac{1}{x}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 > 0, \ x > 0,$$

所以 $$g(x) = \ln x + 2\frac{1-x}{1+x} < g(1) = 0, \ 0 < x < 1.$$

故 $f'(x) < 0$,$f(x)$ 严格单调减少,故

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) < f(x) < \lim_{x\to 0^+} f(x),$$

即
$$\frac{2}{e} < x^{\frac{x}{1-x}} + x^{\frac{1}{1+x}} < 1.$$

(4) $\dfrac{x\ln x}{x^2-1} > 0$ 是显然的，只需证$\dfrac{x\ln x}{x^2-1} < \dfrac{1}{2}$.

当 $0 < x < 1$ 时，$\dfrac{x\ln x}{x^2-1} < \dfrac{1}{2} \sim 2\ln x > \dfrac{x^2-1}{x}$，令

$$f(x) = 2\ln x - \frac{x^2-1}{x} = 2\ln x - x + \frac{1}{x},$$

则
$$f'(x) = \frac{2}{x} - 1 - \frac{1}{x^2} = -\left(1-\frac{1}{x}\right)^2 < 0.$$

所以 $f(x)$ 在$(0,1)$内严格单调减少，$f(x) > \lim\limits_{t\to 1^-} f(t) = 0$. 故有 $\dfrac{x\ln x}{x^2-1} < \dfrac{1}{2}$. 于是欲证不等式成立.

例 5 证明下列不等式：

(1) $pe^{x/p} + qe^{-x/q} \leqslant e^{x^2/(8p^2q^2)}$, $p,q > 0, p+q=1$;

(2) $(1+x)^\lambda - (1-x)^\lambda \leqslant 2^\lambda$, $\lambda \geqslant 1, 0 \leqslant x \leqslant 1$;

(3) $(x^\alpha + y^\alpha)^{1/\alpha} > (x^\beta + y^\beta)^{1/\beta}$, $x,y > 0, \beta > \alpha > 0$;

(4) $xe^{-x} > \dfrac{1}{x}e^{-x}$, $0 < x < 1$.

证 (1) 将不等式变形为 $pe^{x/pq} + q \leqslant e^{x/q + x^2/(8p^2q^2)}$，令 $x = 2pqy$ 得，$pe^{2y} + q \leqslant e^{2py + y^2/2}$.

令 $f(y) = e^{2py+y^2/2} - pe^{2y}$，则

$$f'(y) = e^{2y}\left[(2p+y)e^{y^2/2-2qy} - 2p\right] = e^{2y}g(y),$$

$$g'(y) = (y+p-q)^2e^{y^2/2-2qy} \geqslant 0,\ y \in (-\infty, +\infty).$$

所以当 $y \geqslant 0$ 时，$g(y) \geqslant 0$；当 $y \leqslant 0$ 时，$g(y) \leqslant 0$. 于是对 $y \in (-\infty, +\infty)$，恒有 $f(y) \geqslant f(0) = q$. 故

$$pe^{2y} + q \leqslant e^{2py+y^2/2} \Rightarrow pe^{x/p} + qe^{-x/q} \leqslant e^{x^2/(8p^2q^2)}.$$

(2) 令 $f(x) = (1+x)^\lambda - (1-x)^\lambda$, $0 \leqslant x \leqslant 1$，则

$$f'(x)=\lambda[(1+x)^{\lambda-1}-(1-x)^{\lambda-1}]\geqslant 0\ (\lambda>1).$$

所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上严格单调增加，又 $f(1)=2^{\lambda}$，故

$$f(x)=(1+x)^{\lambda}-(1-x)^{\lambda}\leqslant 2^{\lambda},\ 0\leqslant x\leqslant 1.$$

(3) 将等式变形为 $[1+(x/y)^{\alpha}]^{1/\alpha}>[1+(x/y)^{\beta}]^{1/\beta}$，令 $f(\alpha)=(1+t^{\alpha})^{1/\alpha}$，$t>0,0<\alpha<+\infty$，则由证变形后不等式转化为证 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内的单调性.

因为
$$\ln f(x)=\frac{1}{\alpha}\ln(1+t^{\alpha}),$$

$$\begin{aligned}\frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)}&=\frac{1}{\alpha^2}\left[\frac{\alpha t^{\alpha}\ln t}{1+t^{\alpha}}-\ln(1+t^{\alpha})\right]\\&=\frac{t^{\alpha}\ln t^{\alpha}-(1+t^{\alpha})\ln(1+t^{\alpha})}{\alpha^2(1+t^{\alpha})}\\&<\frac{t^{\alpha}\ln(1+t^{\alpha})-(1+t^{\alpha})\ln(1+t^{\alpha})}{\alpha^2(1+t^{\alpha})}\\&=-\frac{\ln(1+t^{\alpha})}{\alpha^2(1+t^{\alpha})}<0\ (\alpha>0),\end{aligned}$$

所以由 $f'(\alpha)<0,\alpha>0,f(\alpha)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调减少. 即当 $\beta>\alpha$ 时，$(1+t^{\alpha})^{1/\alpha}>(1+t^{\beta})^{1/\beta}$. 令 $t=\dfrac{x}{y}$，即为

$$\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^{\alpha}\right]^{1/\alpha}>\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^{\beta}\right]^{1/\beta}\Rightarrow[x^{\alpha}+y^{\alpha}]^{1/\alpha}<[x^{\beta}+y^{\beta}]^{1/\beta}.$$

(4) 将欲证不等式两边取对数，得

$$\ln x-x>-\ln x-1/x,$$

即
$$2\ln x-x+1/x>0,\ 0<x<1.$$

令 $f(x)=2\ln x-x+1/x$，则 $f(1)=0$，且

$$f'(x)=\frac{2}{x}-1-\frac{1}{x^2}=-\frac{(x-1)^2}{x^2}<0,\ 0<x<1.$$

故 $f(x)$ 严格单调减少，有 $f(x)>f(1)=0,0<x<1$. 即有

$$\begin{aligned}&2\ln x-x+1/x>0\Rightarrow x^2e^{-x}e^{1/x}>1\\&\qquad\Rightarrow xe^{-x}>e^{-1/x}/x,\quad 0<x<1.\end{aligned}$$

例 6　证明下列不等式：

(1) $e^{-t}-\left(1-\frac{t}{x}\right)^x\geqslant 0,\quad x>0, t\leqslant x$;

(2) $\ln(1+x)\geqslant\frac{\arctan x}{1+x},\quad x\geqslant 0$.

证 (1) 当 $t=0$ 或 $t=x$ 时，不等式显然成立. 当 $x>0, t<x$ 且 $t\neq 0$ 时，有

$$[\ln f(x)]'=\left[\ln\left(1-\frac{t}{x}\right)^x\right]'=\left[x\ln\left(1-\frac{t}{x}\right)\right]'$$

$$=\ln(x-t)-\ln x+\frac{t}{x-t}.$$

由拉格朗日中值定理，有

$$\ln(x-t)-\ln x=-\frac{t}{\xi}\left(\begin{array}{ll}\text{当}0<t<x\text{ 时}, & 0<x-t<\xi<x\\ \text{当}t<0\text{ 时}, & 0<x<\xi<x-t\end{array}\right),$$

$$[\ln f(x)]'=-\frac{t}{\xi}\geqslant\frac{-t}{x-t}+\frac{t}{x-t}=0.$$

又 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{t}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1-\frac{t}{x}\right)^{-\frac{x}{t}}\right]^{-t}=e^{-t}$,

所以，当 $x\to+\infty$ 时，$\left(1-\frac{t}{x}\right)^x$ 严格单调增加且趋向 e^{-t}，即

$$e^{-t}-\left(1-\frac{t}{x}\right)^x\geqslant 0.$$

(2) 令 $F(x)=(1+x)\ln(1+x)-\arctan x, x\geqslant 0$，则

$$F'(x)=\ln(1+x)+1-\frac{1}{1+x^2}=\ln(1+x)+\frac{x^2}{1+x^2}\geqslant 0.$$

故 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 严格单调增加. 又 $F(0)=0$，即 $F(x)\geqslant 0$.

$$\ln(1+x)\geqslant\frac{\arctan x}{1+x}.$$

例 7 讨论 $k>0$，k 为何值时，方程

$$\arctan x-kx=0$$

存在正根.

解 令 $f(x)=\arctan x-kx, x\geqslant 0$，则

$$f(0)=0,\quad f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-k,$$

$$f'(0)=1-k,\quad f''(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}<0.$$

所以 $f'(x)$ 严格单调减少，且

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to+\infty} f'(x)=-k.$$

当 $k\geqslant 1$ 时，$f'(x)<0$，于是

$$f(x)<f(0)=0,\ x>0.$$

即 $k\geqslant 1$ 时，方程没有正根.

当 $0<k<1$ 时，有

$$f'(x)\begin{cases}>0, & x\in[0,\sqrt{(1-k)/k}],\\ <0, & x\in[\sqrt{(1-k)/k},+\infty].\end{cases}$$

即 f 在 $[0,\sqrt{(1-k)/k}]$ 上严格单调增加，在 $[\sqrt{(1-k)/k},+\infty]$ 上严格单调减少. 有

$$f(\sqrt{(1-k)/k})>f(0)=0,\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty.$$

由连续函数的介值定理和 f 的单调性知，方程在 $(\sqrt{(1-k)/k},+\infty)$ 内有惟一正根.

例 8 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，在 $[a,+\infty)$ 内可导，且 $f'(x)>k>0$ (k 为常数). 又 $f(a)<0$. 证明：$f(x)=0$ 在 $\left(a,a-\dfrac{f(a)}{k}\right)$ 内有惟一实根.

证 令 $b=a-\dfrac{f(a)}{k}>a$，则由拉格朗日中值定理，有

$$f(b)=f(a)+f'(\xi)(b-a)=f(a)+f'(\xi)\left(-\frac{f(a)}{k}\right)$$

$$=-f(a)\left(\frac{f'(\xi)}{k}-1\right)>0,\quad a<\xi<b.$$

即 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 两端点异号，依连续函数的介值定理，$f(x)$ 在 (a,b) 内至少有一个实根.

例 9 设 $f(x)$ 为定义在 $(-a,a)$ 内的偶函数，且在 $(-a,0]$ 内严格单调减少，证明：$f(x)$ 在 $[0,a)$ 内严格单调增加.

证　任取 $x_1, x_2 \in [0,a)$，且 $x_1 < x_2$，即 $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 < a$，则 $-a < -x_2 < -x_1 \leqslant 0$. 由于 $f(x)$ 在 $(-a,0]$ 内严格单调减少，即 $f(-x_2) > f(-x_1)$，但 $f(x)$ 为偶函数，有

$$f(x_2) = f(-x_2) > f(-x_1) = f(x_1),$$

所以 $f(x)$ 在 $[0,a)$ 内严格单调增加.

二、函数的极值与最值问题

确定函数的极值可以用第一充分条件，也可以用第二充分条件，具体使用时一定要根据实际问题决定，使问题简洁明了.

例 10　根据题给条件，讨论指定点是否函数的极限点，是极大值点还是极小值点.

(1) 已知 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{(x-a)^2} = -1$，讨论 $x = a$；

(2) 已知 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 有定义，$x_0 \neq 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点，对 $-f(-x)$ 讨论 $-x_0$；

(3) 已知 $f(x)$ 二阶连续可导，且 $f'(0) = 0$，$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f''(x)}{|x|} = 1$，讨论 $x = 0$.

解　(1) 因 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{(x-a)^2} = -1$，依极限的保号性知，在某 $U(a)$ 内，$\dfrac{f(x) - f(a)}{(x-a)^2} < 0$，即 $f(x) - f(a) < 0\ (x \neq a)$. 所以，$f(a)$ 是 $f(x)$ 的极大值，$x = a$ 是 $f(x)$ 的极大值点.

将极限式改为 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{(x-a)^n} = k$，$n$ 为正整数，$k \neq 0$，可以证明：

若 n 为偶数. 当 $k > 0$ 时，$f(a)$ 为极小值；若 $k < 0$，$f(a)$ 为极大值.

若 n 为奇数，则在 $U(a)$ 内，有

$$f(x) - f(a) = (k + \alpha(x))(x-a)^n$$

在 $x = a$ 两侧异号，所以 $f(a)$ 不是极值.

(2) $x_0 \neq 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点，但不一定是 $f(x)$ 的稳定点.

$y = -f(-x)$ 的图形与 $y = f(x)$ 的图形关于原点对称，故 $x_0 \neq 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点时，$-x_0$ 是 $-f(-x)$ 的极小值点.

(3) 因为 $f'(0) = 0$，所以 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的稳定点. 由 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f''(x)}{|x|} = 1$ 知，$f''(x)$ 与 $|x|$ 是等价无穷小. 因为在 $U(0)$ 内，$|x| > 0$，故 $f''(x) > 0$. 依极值的第二充分条件，$f(x)$ 在 $x = 0$ 取得极小值，所以 $x = 0$ 为极小值点.

例 11 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内恒满足方程

$$(x-1)f''(x) + 2(x-1)[f'(x)]^3 = 1 - e^{1-x}.$$

(1) 若 $f(x)$ 在 $x = a$ $(a \neq 1)$ 处取得极值，则必为极小值；

(2) 若 $f(x)$ 在 $x = 1$ 取得极值，是否为极小值？

证 (1) 由题设知 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内二阶可导，故若在 $x = a$ 取得极值，必有 $f'(a) = 0$，则有

$$f''(a) = \frac{1}{a-1}(1 - e^{1-a}), \quad a \neq 1.$$

当 $a < 1$ 时，$f''(a) > 0$；当 $a > 1$ 时，也有 $f''(a) > 0$. 所以 $f(x)$ 在 $x = a$ 取得极小值.

(2) 是. 因为 $f'(1) = 0$，而

$$f''(x) = \frac{1}{x-1}[1 - e^{1-x} - 2(x-1)(f'(x))^3].$$

由 $f'(x)$ 的连续性知，$f''(x)$ 连续，故

$$f''(1) = \lim_{x \to 1} \frac{1 - e^{1-x} - 2(x-1)(f'(x))^3}{x-1}$$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{1 - e^{1-x}}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{-(1-x)}{(x-1)} = 1.$$

由 $f''(1) > 0$ 知，$f(x)$ 在 $x = 1$ 取得极小值.

例 12 设正值序列 $\{x_n\}$ 满足 $\ln x_n + \dfrac{1}{x_{n+1}} < 1$. 证明：$\lim\limits_{n \to \infty} x_n$ 存在.

证 因为对 $f(x)=\frac{1}{x}+\ln x,\ x>0$,有 $f'(x)=\frac{x-1}{x^2}$,所以,$x=1$ 是稳定点. 由 $f''(1)=\left.\frac{2-x}{x^3}\right|_{x=1}=1>0$ 知,$f(1)=1$ 为极小值,即最小值.

由上知 $\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}\leqslant \ln x_n+\frac{1}{x_n}$,即 $x_n\leqslant x_{n+1}$,所以 $\{x_n\}$ 严格单调增加. 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 存在,且 $a>0$.

设 $a=+\infty$,则对 $\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}<1$ 取 $n\to\infty$ 的极限,得 $+\infty<1$,这是不可能的. 故 $a<+\infty$.

对不等式 $\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}<1<\ln x_n+\frac{1}{x_n}$ 取极限,得 $\ln a+\frac{1}{a}=1$. 由第一段知 $a=1$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

例 13 证明:$\frac{1}{2^{p-1}}\leqslant x^p+(1-x)^p\leqslant 1,\ 0\leqslant x\leqslant 1, p>1$.

证 引入辅助函数 $f(x)=x^p+(1-x)^p$,则

$$f'(x)=p[x^{p-1}-(1-x)^{p-1}]\Rightarrow \text{稳定点 } x=\frac{1}{2}.$$

又 $$f''(x)=p(p-1)[x^{p-2}+(1-x)^{p-2}]>0.$$

故 $x=\frac{1}{2}$ 为 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 的惟一极值点,且有极小值 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2^{p-1}}$. 而 $f(0)=f(1)=1$ 为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上最大值,于是

$$\frac{1}{2^{p-1}}\leqslant x^p+(1-x)^p\leqslant 1.$$

例 14 (1) 求函数 $f(x)=x^3-px+q\ (p>0)$ 的极值点与极值;(2) 求方程 $x^3-px+q=0\ (p>0)$ 的三个实根的条件.

解 (1) 因为 $f'(x)=3x^2-p$,所以稳定点为 $x=\pm\sqrt{p/3}$. 又 $f''(x)=6x$,知 $f''(\sqrt{p/3})>0, f''(-\sqrt{p/3})<0$,则 $f(x)$ 在 $x=\sqrt{p/3}$ 有极小值 $f(\sqrt{p/3})=-2\left(\frac{p}{3}\right)^{3/2}+q$;在 $x=-\sqrt{p/3}$

有极大值 $f(-\sqrt{p/3}) = 2\left(\frac{p}{3}\right)^{3/2} + q$.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$,所以若极小值 $f(\sqrt{p/3}) < 0$,极大值 $f(-\sqrt{p/3}) > 0$,则 $f(x) = 0$ 有三个根,分别在区间

$$(-\infty, -\sqrt{p/3}),\ (-\sqrt{p/3}, \sqrt{p/3}),\ (\sqrt{p/3}, +\infty),$$

要满足条件 $-2\left(\frac{p}{3}\right)^{3/2} < q < 2\left(\frac{p}{3}\right)^{3/2}$,可简化为 $\left(\frac{q}{2}\right)^2 < \left(\frac{p}{3}\right)^3$.

例 15 设在 $[0,a]$ 上 $|f''(x)| \leqslant M$,且 $f'(x)$ 在 $(0,a)$ 内有极大值,证明:$|f'(0)| + |f'(a)| \leqslant Ma$.

证 设 $f(x)$ 在点 $c \in (0,a)$ 有极大值,则 $f'(c) = 0$. 对 $f'(x)$ 在 $[0,c]$,$[c,a)$ 上分别应用拉格朗日中值定理,有

$$f'(c) - f'(0) = cf''(\xi_1),\ \xi_1 \in (0,c),$$
$$f'(a) - f'(c) = (a-c)f''(\xi_2),\ \xi_2 \in (c,a).$$

由 $f'(c) = 0$ 知,$f'(0) = -cf''(\xi_1)$,$f'(a) = (a-c)f''(\xi_2)$. 故

$$|f'(0)| + |f'(a)| = c|f''(\xi_1) + (a-c)|f''(\xi_2)|$$
$$\leqslant cM + (a-c)M = aM.$$

例 16 设 $x_1x_2 = a$(常数),且 $x_1 > 0, x_2 > 0$,求 $x_1^m + x_2^n$ 的最小值($m > 0, n > 0$).

解 因为 $x_1x_2 = a$,所以

$$f(x_1) = x_1^m + (a/x_1)^n,$$
$$f'(x_1) = mx_1^{m-1} - na^n x_1^{-n-1} = (mx_1^{m+n} - na^n)/x_1^{n+1}.$$

令 $f'(x_1) = 0$,有惟一驻点 $x_{10} = (na^n/m)^{1/(m+n)}$.

当 $0 < x_1 < (na^n/m)^{1/(m+n)}$ 时 ,$f'(x_1) < 0$;当 $x_1 > (na^n/m)^{1/(m+n)}$ 时,$f'(x_1) > 0$,故 x_{10} 为 $f(x_1)$ 的极小值点,即最小值点. 最小值为

$$f(x_{10}) = f\left[\left(\frac{na^n}{m}\right)^{1/(m+n)}\right] = \left(\frac{n}{m}a^n\right)^{\frac{m}{m+n}} + \left[\frac{a}{(na^n/m)^{1/(m/n)}}\right]^n$$

$$= \left(\frac{n}{m}a^{n}\right)^{\frac{m}{m+n}} + \left[\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{m+n}}(a^{n})^{\frac{m}{m+n}}\right]$$

$$= \left[\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{m}{m+n}} + \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{m+n}}\right]a^{\frac{mn}{m+n}}.$$

例 17 证明不等式 $ab \leqslant \frac{1}{p}a^{p} + \frac{1}{q}b^{p}$，其中 $a \geqslant 0, b \geqslant 0, p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

证 令 $f(x) = x^{1/p} - \frac{x}{p}$，则

$$f'(x) = \frac{1}{p}\left(x^{\frac{1}{p}-1}\right) = \frac{1}{p}\left(x^{\frac{1}{q}} - 1\right) = 0,$$

有惟一稳定点 $x = 1$. 当 $0 < x < 1$ 时，$f'(x) > 0$；当 $x > 1$ 时，$f'(x) < 0$. 所以 $f(1) = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$ 是极大值，即 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的最大值. 故

$$x^{\frac{1}{p}} - \frac{x}{p} \leqslant \frac{1}{q}.$$

令 $x = \frac{a^{p}}{b^{q}}$ 代入($b = 0$ 时显然成立)，得

$$\frac{a}{b^{q/p}} - \frac{1}{p}\frac{a^{p}}{b^{q}} \leqslant \frac{1}{q} \Rightarrow a - \frac{1}{p}a^{p}b^{\frac{q}{p}-q} \leqslant \frac{1}{q}b^{\frac{q}{p}},$$

即

$$ab \leqslant \frac{1}{p}a^{p} + \frac{1}{q}b^{q}.$$

(1) 利用本例可以证明赫尔德不等式

$$\sum_{k=1}^{n}a_{k}b_{k} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}a_{k}^{p}\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}b_{k}^{q}\right)^{1/q},$$

其中 $a_{k} > 0, b_{k} > 0, p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, k = 1, 2, \cdots, n$.

只需设 $a = a_{k}\Big/\left(\sum_{k=1}^{n}a_{k}^{p}\right)^{1/p}, b = b_{k}\Big/\left(\sum_{k=1}^{n}b_{k}^{q}\right)^{1/q}$，代入例中不等式，再将两边对 k 求和，即可证得.

当 $p = q = 2$ 时，称柯西 - 施瓦兹公式

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right).$$

(2) 应用赫尔德不等式可以证明闵可夫斯基(Minkowski)不等式,有

$$\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right]^{1/p}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^p\right)^{1/q},$$

其中 $a_k\geqslant0,b_k\geqslant0,p>1,k=1,2,\cdots,n$.

由 $$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p=\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)(a_k+b_k)^{p-1}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}a_k(a_k+b_k)^{p-1}+\sum_{k=1}^{n}b_k(a_k+b_k)^{p-1},$$

注意到$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,q(p-1)=p$,应用赫尔德不等式,有

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{1/p}\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{q(p-1)}\right]^{1/q}$$
$$+\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^p\right)^{1/p}\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{q(p-1)}\right]^{1/q}$$
$$=\left[\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^p\right)^{1/p}\right]\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right]^{1/q}$$

变形即得闵可夫斯基不等式.

第五节 函数的凸性与拐点

主要内容

1. 设 f 是区间 I 上的函数,$\forall\ x_1,x_2\in I$. 和 $\lambda\in(0,1)$. 恒有

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$

(取"<"称严格凸)则称 f 为 I 上的凸函数. 若恒有

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

(取“>”称严格凹)则称 f 为 I 上的凹函数.

2. f 为 I 上凸函数 $\Longleftrightarrow I$ 上任意三点 $x_1 < x_2 < x_3$，总有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

3. 设 f 在区间 I 上可导，则下述论述等价：

(1) f 为 I 上凸函数；　　(2) f' 为 I 上递增函数；

(3) f 定义在区间 I 上，$\forall\, x_1, x_2 \in I$.

$$f(x_2) \geqslant f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1).$$

4. 设 f 在 I 上二阶可导，f 为 I 上凸函数 $\Longleftrightarrow$ 在 I 上 $f''(x) \geqslant 0$.

5. 詹森(Jensen)不等式　若 f 为 $[a,b]$ 上凸函数，对任意 $x_i \in [a,b]$，$\lambda_i \geqslant 0$ $(i = 1,2,\cdots,n)$，且 $\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1\right)$，有

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right) \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)\right).$$

6. 若 $y = f(x)$ 的曲线在点 $(x_0, f(x_0))$ 处有切线穿过，且在切点两侧的曲线分别是严格凸和严格凹的，则称点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线的拐点.

7. 若 f 在 x_0 二阶可导，则 $(x_0, f(x_0))$ 为 $y = f(x)$ 的曲线拐点的必要条件是 $f''(x_0) = 0$.

8. 若 f 在 x_0 可导，在 $U^\circ(x_0)$ 内二阶可导，且在 $U^\circ_+(x_0)$ 和 $U^\circ_-(x_0)$ 上 $f''(x)$ 的符号相反，则 $(x_0, f(x_0))$ 为 $y = f(x)$ 曲线的拐点.

疑难解析

1. 叙述 $f(x)$ 在区间 I 上是凸函数的等价命题.

答　$f(x)$ 在区间 I 上是凸函数的定义共有三种形式：

(1) $f(x)$ 在区间 I 上可导，曲线 $f(x)$ 位于曲线上任意点

$(x,f(x))$ 的切线上方. 即 $\forall\ x_1,x_2\in I$,有

$$f(x_2)\geqslant f'(x_1)(x_2-x_1)+f(x_1).$$

(2) 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续,$\forall\ x_1,x_2\in I$,有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

(3) 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义,$\forall\ x_1,x_2\in I$ 与 $\lambda\in(0,1)$,有

$$f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]\leqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2).$$

将上式中的"$\leqslant$"改为"$<$",则为严格凸的定义.

其它等价命题还有:

(4) 主要内容之 2.

(5) $f(x)$ 在 I 上可导(或二阶可导),$f'(x)$ 在 I 上单调增加(或 $\forall\ x\in I,f''(x)>0$).

方法、技巧与典型例题分析

例 1 设 $f(x),g(x)$ 为 (a,b) 上的凸函数,证明:

$$h(x)\triangleq\max\{f(x),g(x)\}$$

也是 (a,b) 上的凸函数.

证 利用凸函数定义. 设 $\lambda_1,\lambda_2>0,\lambda_1+\lambda_2=1$,则 $\forall\ x_1,x_2\in(a,b)$,有

$$\begin{aligned}f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)&\leqslant\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)\\&\leqslant\lambda_1h(x_1)+\lambda_2h(x_2),\\g(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)&\leqslant\lambda_1g(x_1)+\lambda_2g(x_2)\\&\leqslant\lambda_1h(x_1)+\lambda_2h(x_2),\end{aligned}$$

从而 $$\begin{aligned}h(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)&=\max\{f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2),g(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)\}\\&\leqslant\lambda_1h(x_1)+\lambda_2h(x_2).\end{aligned}$$

所以 $h(x)$ 为凸函数.

例 2 设 $0<x_1<x_2<\cdots<x_n<\pi$,证明:

$$\sin\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)>\frac{1}{n}(\sin x_1+\sin x_2+\cdots+\sin x_n).$$

证　令 $f(x)=-\sin x, x\in(0,\pi)$，则

$$f'(x)=-\cos x,\quad f''(x)=\sin x>0,$$

故 $f(x)$ 是 $(0,\pi)$ 上的严格凸函数，由詹森不等式

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)<\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)],$$

即得欲证等式.

例 3　利用 $f(x)=-\ln x\ (x>0)$ 是凸函数，证明：

(1) $x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_n^{\lambda_n}\leqslant\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n$，其中 $x_i>0,\lambda_i\geqslant 0,\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=1$；

(2) 当 $x_i>0,\ i=1,2,\cdots,n$ 时，有

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}\leqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

证　(1) 因为 $f(x)=-\ln x\ (x>0)$ 是凸函数，所以詹森不等式 $f\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_ix_i\right)\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_if(x_i)$ 成立. 即

$$\begin{aligned}&-\ln(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n)\\&\leqslant-[\lambda_1\ln x_1+\lambda_2\ln x_2+\cdots+\lambda_n\ln x_n]\\&\Rightarrow-\ln(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n)\leqslant-\ln(x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_n^{\lambda_n})\\&\Rightarrow\ln(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n)\geqslant\ln(x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_n^{\lambda_n}),\end{aligned}$$

从而　　$x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_n^{\lambda_n}\leqslant\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n.$

(2) 在题(1)中令 $\lambda_i=\frac{1}{n}$，则

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

又对 $f(x)=-\ln x\ (x>0)$，取 $x_i>0$，则 $\frac{1}{x_i}>0,\ i=1,2,\cdots,n$. 由詹森不等式

$$f\left(\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}{n}\right)\leqslant\frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{x_1}\right)+f\left(\frac{1}{x_2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{x_n}\right)\right]$$

得

$$-\ln\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}{n}$$

$$\leqslant-\frac{1}{n}\left[\ln\frac{1}{x_1}+\ln\frac{1}{x_2}+\cdots+\ln\frac{1}{x_n}\right],$$

$$\ln\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}{n}\geqslant\ln\left(\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_n}\right)^{1/n},$$

$$\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}{n}\geqslant\left(\frac{1}{x_1x_2\cdots x_n}\right)^{1/n},$$

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}\leqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}.$$

综合题(1)、题(2),即得欲证不等式.

例4(詹森不等式) 证明:若f为$[a,b]$上凸函数,$\forall\ x_i\in[a,b]$,$\lambda_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$,且$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$,则

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\lambda_if(x_i).$$

证 用数学归纳法.

当$n=2$时,由定义(主要内容1)知命题成立.

设$n=k$时,命题成立.即

$$f\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_ix_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{k}\lambda_if(x_i),\quad\sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1.$$

当$n=k+1$时,$\sum_{i=1}^{k+1}\lambda_i=1$,则

$$f\left(\sum_{i=1}^{k+1}\lambda_ix_i\right)=f\left(\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_ix_i+\lambda_kx_k+\lambda_{k+1}x_{k+1}\right)$$

$$= f\Big[\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i x_i + (\lambda_k + \lambda_{k+1})\Big(\frac{\lambda_k}{\lambda_k + \lambda_{k+1}}x_k + \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k + \lambda_{k+1}}x_{k+1}\Big)\Big]$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i f(x_i) + (\lambda_k + \lambda_{k+1})f\Big(\frac{\lambda_k}{\lambda_k + \lambda_{k+1}}x_k + \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k + \lambda_{k+1}}x_{k+1}\Big)$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i f(x_i) + (\lambda_k + \lambda_{k+1})\Big[\frac{\lambda_k}{\lambda_k + \lambda_{k+1}}f(x_k) + \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k + \lambda_{k+1}}f(x_{k+1})\Big]$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i f(x_i) + \lambda_k f(x_k) + \lambda_{k+1}f(x_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1}\lambda_i f(x_i).$$

所以，对任意的 n，都有

$$f\Big(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\Big) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i), \quad \sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1.$$

例 5 证明：

(1) 若 f,g 都是 I 上的凸函数，则 $\alpha f + \beta g$ 也是凸函数，其中 α,β 是正实数.

(2) 若 f,g 是 I 上非负凸函数，且 f 与 g 在 I 上都是严格单调增加(或单调减少)的，则 $f\cdot g$ 是 I 上的凸函数.

(3) 设 $f:I_1\to I_2$ 与 $g:I_2\to\mathbf{R}$ 都是凸函数，且 g 严格单调增加，则 $g\circ f$ 是 I_1 上的凸函数.

证 (1) 因为 f,g 都是 I 上的凸函数，则 $\forall\, x_1,x_2\in I$ 和 $\forall\,\lambda\in(0,1)$，有

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2),$$

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda g(x_1) + (1-\lambda)g(x_2),$$

故
$$\alpha f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) + \beta g(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$$
$$\leqslant \lambda(\alpha f(x_1) + \beta g(x_1)) + (1-\lambda)(f(x_2) + g(x_2)).$$

其中 α,β 为正常数，故 $\alpha f + \beta g$ 也是凸函数.

(2) 设 f,g 在 I 上严格单调增加(单调减少类似可证)，$f'(x) > 0, g'(x) > 0$. 并有 $f(x) > 0, g(x) > 0$. 则 $\forall\, x_1,x_2\in I$，不妨设 $x_2 > x_1$，有

$$f(x_2) \geqslant f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1),$$

$$g(x_2) \geqslant g(x_1) + g'(x_1)(x_2 - x_1).$$

因为$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$,所以

$$\begin{aligned} f(x_2)g(x_2) \geqslant &\ f(x_1)g(x_1) + f'(x_1)g(x_1)(x_2 - x_1) \\ &+ f(x_1)g'(x_1)(x_2 - x_1) + f'(x_1)g'(x_1)(x_2 - x_1)^2 \\ \geqslant &\ f(x_1)g(x_1) \\ &\quad + [f'(x_1)g(x_1) + f(x_1)g'(x_1)](x_2 - x_1). \end{aligned}$$

所以,按等价定义(主要内容 3 中的(3))知,$f \cdot g$ 是凸函数.

(3) 因为 f 是凸函数,则 $\forall\ x_1, x_2 \in I$ 和 $\lambda \in (0,1)$,有

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$$

又由 $g(x)$ 严格单调增加,有

$$g[f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)] \leqslant g[\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)], \quad ①$$

而 g 为 $I_2 \to \mathbf{R}$ 上凸函数,有

$$\begin{aligned} &g[\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)] \\ &\leqslant \lambda g[f(x_1)] + (1-\lambda)g[f(x_2)]. \end{aligned} \quad ②$$

由式 ①、式 ② 可得

$$g \circ f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \leqslant \lambda g \circ f(x_1) + (1-\lambda)g \circ f(x_2).$$

所以 $f \circ g$ 是 I_1 上的凸函数.

例 6 设 $f(x)$ 在(a,b) 内可导,$\forall\ x, y \in (a,b)$,且 $x < y$,$\exists$ 惟一的 $z \in (x,y)$,使 $f(y) - f(x) = f'(z)(y-x)$,证明:$f(x)$ 在(a,b) 内是严格凸或严格凹的.

证 用反证法.设函数 $f(x)$ 在(a,b) 内不是严格凸或严格凹的,则 $\exists\ x_1, x_2, x_3 \in (a,b)$,且 $x_1 < x_2 < x_3$,对曲线 $y = f(x)$ 上的三点$(x_1, f(x_1))$,$(x_2, f(x_2))$,$(x_3, f(x_3))$,有

$$f(x_2) = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1) + f(x_1),$$

$$f(x_2) = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_3) + f(x_3),$$

或 $$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = \frac{f(x_1) - f(x_3)}{x_1 - x_3}.$$

即三个点$(x_1,f(x_1))$，$(x_2,f(x_2)$，$(x_3,f(x_3))$位于一条直线上. 依拉格朗日中值定理，有

$$\frac{f(x_1)-f(x_3)}{x_1-x_3}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi_1),\ \xi_1\in(x_1,x_2),$$

$$\frac{f(x_1)-f(x_3)}{x_1-x_3}=\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}=f'(\xi_2),\ \xi_2\in(x_2,x_3).$$

显然$\xi_1\neq\xi_2$，这与只存在一个η，使$\dfrac{f(x_1)-f(x_3)}{x_1-x_3}=f'(\eta)$矛盾. 所以$f(x)$在$(a,b)$内是严格凸或严格凹的.

例 7 设$a_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$不全相等，证明：

(1) $x\dfrac{a_1^x\ln a_1+a_2^x\ln a_2+\cdots+a_n^x\ln a_n}{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}-\ln\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}>0$；

(2) $f(x)=\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{1/x}$在$(-\infty,+\infty)$严格单调增加；

(3) $\arctan(\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\cdots+\lambda_na_n)\geqslant\lambda_1\arctan a_1+\lambda_2\arctan a_2+\cdots+\lambda_n\arctan a_n$.

证 (1) 考虑函数$f(x)=x\ln x$，则$f'(x)=1+\ln x$，$f''(x)=1/x>0\ (x<0)$，所以$f(x)=x$是$(0,+\infty)$上的凸函数，又$a_i^x(i=1,2,\cdots,n)$不全相等，所以由詹森不等式，有

$$f\left(\frac{a_1^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)<\frac{1}{n}f(a_1^x)+\cdots+\frac{1}{n}f(a_n^*).$$

将$f(x)$代入，即得所证等式.

(2) 因为$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$(类似第二节例 9)，再补充定义$f(0)=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$，则函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续. 当$x\neq0$时，有

$$[\ln f(x)]'=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$=\frac{1}{x^2}\left[x\frac{a_1^x\ln a_1+a_2^x\ln a_2+\cdots+a_n^x\ln a_n}{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}-\ln\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right].$$

由$f(x)>0$及上例知，当$x\neq 0$时，$f'(x)>0$，故$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上严格单调增加.

(3) 考虑函数$f(x)=-\arctan x, x\in(0,+\infty)$，则$f'(x)=\frac{-1}{1+x^2}$，$f''(x)=\frac{2x}{1+x^2}>0(x>0)$. 即$f(x)$为$(0,+\infty)$上的凸函数. 由詹森不等式(即将$f(x)$代入)，得

$$\arctan(\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\cdots+\lambda_n a_n)$$
$$\geqslant \lambda_1\arctan a_1+\lambda_2\arctan a_2+\cdots+\lambda_n\arctan a_n.$$

例 8 设a,b,x,y都是正数，证明：

$$x\ln\frac{x}{a}+y\ln\frac{y}{b}\geqslant(x+y)\ln\frac{x-y}{a+b}.$$

证 设$f(x)=x\ln x\ (x>0)$，则$f'(x)=1+\ln x$，$f''(x)=\frac{1}{x}>0$，所以$f(x)$为凸函数，有

$$\frac{x+y}{a+b}\ln\frac{x+y}{a+b}\leqslant\frac{x}{a+b}\ln\frac{x}{a+b}+\frac{y}{a+b}\ln\frac{y}{a+b}.$$

故$(x+y)\ln\frac{x+y}{a+b}\leqslant x\ln\frac{x}{a+b}+y\ln\frac{y}{a+b}\leqslant x\ln\frac{x}{a}+y\ln\frac{y}{b}$.

例 9 利用函数的凸性，证明：

(1) $\frac{1}{2}(x^n+y^n)>\frac{x^n+y^n}{2}$，$\quad x>0,y>0,x\neq y,n>1$；

(2) $\frac{1}{2}(e^x+e^y)>e^{(x+y)/2}$，$\quad x\neq y$.

证 (1) 设$f(x)=t^n$，则$f'(t)=nt^{n-1}$，$f''(t)=n(n-1)t^{n-2}$. 当$n>1$时，$f''(t)>0(t>0)$，所以$f(t)$为凸函数，依定义，有

$$f(\lambda t_1+(1-\lambda)t_2)<\lambda f(t_1)+(1-\lambda)f(t_2).$$

令$t_1=x,t_2=y,\lambda=1/2$，即得

$$\frac{1}{2}(x^n+y^n)>\frac{x^n+y^n}{2}.$$

(2) 设$f(t)=e^t$，则$f'(t)=e^t$，$f''(t)=e^t>0$，所以$f(t)$为凸函数，同题(1)，取$t_1=x,t_2=y,y=1/2$，即得

$$(e^x + e^y)/2 > e^{(x+y)/2},\ x \neq y.$$

例10 设概率曲线 $y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}$ 在点 $x = \pm\sigma$ 处有拐点 $(\sigma > 0, h > 0)$，h 和 σ 有何关系?

解 因 $y' = \frac{-2h^3x}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}$，$y'' = \frac{2h^3}{\sqrt{\pi}}(2h^2x^2 - 1)e^{-h^2x^2}$，令 $y'' = 0$，可得 $x_0 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2h}$. 讨论 x_0 与 x 的值，知:

当 $|x| < |x_0|$ 时，$y'' < 0$；当 $|x| > |x_0|$ 时，$y'' > 0$. 所以，当 $x_0 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2h} = \pm\sigma$ 时，y 的曲线有拐点，即 $h = \frac{\sqrt{2}}{2\sigma}$.

例 11 确定 $y = k(x^2 - 3)^2$ 中 k 的值，使曲线在拐点处的法线通过原点.

解 因为

$$y' = 2k(x^2 - 3) = 4kx^3 - 12kx,\ y'' = 12k(x + 1)(x - 1),$$

所以 $x_{1,2} = \pm 1$ 可能是拐点. 讨论 y'' 的表达式，知 y'' 在 $x_{1,2} = \pm 1$ 两侧异号，所以 $x_{1,2} = \pm 1$ 确为拐点横坐标. 拐点为 $(1, 4k)$ 和 $(-1, 4k)$.

在点 $(1, 4k)$ 处切线斜率 $k_1 = -8k$，法线方程是 $y - 4k = \frac{1}{8k}(x - 1)$. 将原点坐标 $(0,0)$ 代入，得

$$-4k = -\frac{1}{8k} \Rightarrow k = \pm\frac{\sqrt{2}}{8}.$$

在点 $(-1, 4k)$ 处，类似可得相同结果.

故当 $k = \pm\frac{\sqrt{2}}{8}$ 时，曲线 $y = k(x^2 - 3)^2$ 在拐点处的法线通过原点.

例 12 确定曲线 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 中的 a, b, c, d 的值，使 $x = -2$ 为稳定点，$(1, -10)$ 为拐点，且 $(-2, 44)$ 在曲线上.

解 由题给条件列出方程组求解.

$$\begin{cases} -8a+4b-2c+d=44, \\ a+b+c+d=-10, \\ 12a-4b+c=0\ (y'=0), \\ 6a+2b=0\ (y''=0), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1, \\ b=-3, \\ c=-24, \\ d=16. \end{cases}$$

例 13 证明:曲线 $y=\dfrac{x-1}{x^2+1}$ 的三个拐点在同一直线上.

证 因为
$$y'=\frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2},$$

$$y''=\frac{2(x+1)[x-(2-\sqrt{3})][x-(2+\sqrt{3})]}{(x^2+1)^3},$$

所以 $x_1=-1, x_2=2-\sqrt{3}, x_3=2+\sqrt{3}$ 时,$y''=0$.

经考察,在 $(-\infty,-1)$ 内,$y''<0$;在 $(-1,2-\sqrt{3})$ 内,$y''>0$;在 $(2-\sqrt{3},2+\sqrt{3})$ 内,$y''<0$;在 $(2+\sqrt{3},+\infty)$ 内,$y''>0$. 故点 $A(-1,-1)$,$B\left(2-\sqrt{3},\dfrac{1-\sqrt{3}}{4(2-\sqrt{3})}\right)$,$C\left(2+\sqrt{3},\dfrac{1+\sqrt{3}}{4(2+\sqrt{3})}\right)$ 是曲线的拐点.

可以算得直线 AB 与 BC 的斜率为

$$\begin{aligned} k_{AB} &= \frac{(1-\sqrt{3})/[4(2-\sqrt{3})]-(-1)}{(2-\sqrt{3})-(-1)} \\ &= \frac{(9-5\sqrt{3})(9+5\sqrt{3})}{24}=\frac{1}{4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{BC} &= \frac{(1+\sqrt{3})/[4(2+\sqrt{3})]-(-1)}{(2+\sqrt{3})-(-1)} \\ &= \frac{(9+5\sqrt{3})(9-5\sqrt{3})}{24}=\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

两直线斜率相同,且都经过 B 点,所以 A,B,C 三个拐点在一条直线上.

第五章　不定积分

第一节　不定积分的概念与基本公式

主要内容

1. 设函数 F 与 f 在区间 I 上都有定义，且在 I 上 $F'(x)=f(x)$，则称 F 为 f 在区间 I 上的一个原函数.

2. （原函数存在定理）　若函数 f 在区间 I 上连续，则 f 在 I 上存在原函数 F.

3. 设 F 是 f 在区间 I 上的一个原函数，则

（1）$F+c$ 也是 f 的一个原函数，其中 c 为任意常数；

（2）f 的任意两个原函数至多相差一个任意常数.

4. 函数 f 在区间 I 上的全体原函数称为 f 在 I 上的不定积分，记作 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+c$.

不定积分的几何意义是：若 F 是 f 的一个原函数，则 $y=F(x)$ 的图像称为 f 的一条积分曲线，任一条积分曲线在横坐标相同点处的切线都是互相平行的.

5. 不定积分的基本公式：

（1）$\int 0\mathrm{d}x=c$；　　（2）$\int \mathrm{d}x=x+c$；

（3）$\int x^{\alpha}\mathrm{d}x=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c\ (\alpha\neq-1, x>0)$；

（4）$\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+c$；　　（5）$\int \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x}+c$；

(6) $\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + c$;　　(7) $\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + c$;

(8) $\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + c$;　　(9) $\int \sec^2 x \mathrm{d}x = \tan x + c$;

(10) $\int \csc^2 x \mathrm{d}x = -\cot x + c$;

(11) $\int \sec x \tan x \mathrm{d}x = \sec x + c$;

(12) $\int \csc x \cot x \mathrm{d}x = -\csc x + c$;

(13) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$;

(14) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + c$;

(15) $\int \ln x \mathrm{d}x = x\ln x - x + c$;

(16) $\int \tan x \mathrm{d}x = \ln|\sin x| + c$;

(17) $\int \sec x \mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + c$.

公式(17)还有其它形式,不再一一列出.

6. 不定积分的运算法则

(1) $\int (f \pm g)\mathrm{d}x = \int f\mathrm{d}x \pm \int g\mathrm{d}x$;　　(2) $\int kf\mathrm{d}x = k\int f\mathrm{d}x$.

疑 难 解 析

1. 为什么说微分运算"d"与不定积分运算构成一对逆运算?

答　从原函数和不定积分定义可以看到:$F(x)$是$f(x)$一个原函数,则$F'(x) = f(x)$. $f(x)$的不定积分$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + c$. 所以,有

$$\mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right] = f(x)\mathrm{d}x, \quad \int \mathrm{d}F(x) = F(x) + c.$$

即"先积后微,作用抵消;先微后积,抵消加c",故知微分与不定积

分构成一对逆运算.

方法、技巧与典型例题分析

在计算不定积分时,要注意任意常数 c. 当积分结果中含有 c 时,结果表示全体原函数;不含 c 时,只表示一个原函数. 一般地,若一个不定积分可化为几个积分时,在积分号全部去掉后添加一个 c 即可.

一、不定积分的基本概念

读者必须十分清楚函数、原函数、不定积分之间的联系与区别,在辨析问题时能够熟练地运用. 对于涉及基本概念的问题,只能利用定义和以前学过的连续与导数概念来考察和研究. 对分段函数和绝对值函数尤应注意.

例 1 判断下列 $F(x)$ 是否 $f(x)$ 的原函数,并说明为什么.

(1) $$F(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0. \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0. \end{cases}$$

(2) $$F(x)=\begin{cases} x^3+x+1, & x>0,\\ x^2, & x\leqslant 0. \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2+1, & x>0,\\ 2x, & x\leqslant 0. \end{cases}$$

解 (1) $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数. 因为当 $x\neq 0$ 时,有

$$F'(x)=f(x),$$

$$F'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin(1/x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0=f(0),$$

所以恒有 $F'(x)=f(x)$. 但 $f(x)$ 却不是连续函数, $f(x)$ 在 $x=0$

处有一个第二类间断点.

(2) $F(x)$ 不是 $f(x)$ 的原函数. 因为 $F(x)$ 不连续,所以在不连续点 $x=0$ 必不可导,不存在 $F'(0)=f(0)$.

但当 $x\neq 0$ 时,恒有 $F'(x)=f(x)$,所以 $F(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上是 $f(x)$ 的原函数.

例 2 一曲线通过点 $(e^2,3)$,且在曲线上任一点处切线的斜率都等于该点横坐标的倒数,求该曲线的方程.

解 设曲线方程为 $y=f(x)$,则依题设有 $y'=\dfrac{1}{x}$,于是

$$y=\int\frac{1}{x}dx+c=\ln x+c,$$

且
$$3=\ln e^2+c=2+c\Longrightarrow c=1.$$

所以,曲线方程为 $y=\ln x+1$.

例 3 证明:

$$\int\left[\frac{f(x)}{f'(x)}-\frac{f^2(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}\right]dx=\frac{1}{2}\left[\frac{f(x)}{f'(x)}\right]^2+c.$$

证 因为

$$\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{f(x)}{f'(x)}\right]^2+c\right\}'=\frac{f(x)}{f'(x)}\cdot\frac{[f'(x)]^2-f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$
$$=\frac{f(x)}{f'(x)}-\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2},$$

所以,命题成立.

例 4 设 $y=y(x)$ 是由方程 $y^2(x-y)=x^2$ 所确定的隐函数,计算不定积分 $\int\dfrac{1}{y^2}dx$.

解 设 $y=tx$,则由参数方程得

$$t^2x^2(x-tx)=x^2\Longrightarrow x=\frac{1}{t^2(1-t)},$$

$$dx=\frac{3t-2}{t^3(1-t)^2}dt,\ y=\frac{1}{t(1-t)}.$$

故
$$\int\frac{dy}{y^2}=\int[t(1-t)]^2\cdot\frac{3t-2}{t^3(1-t)^2}dt=\int\left(3-\frac{2}{t}\right)dt$$

$$= 3t - 2\ln t + c = \frac{3y}{x} - 2\ln\frac{y}{x} + c.$$

例 5 设 $f(x)$ 的原函数 $F(x) > 0$，且 $F(0) = 1$. 当 $x \geqslant 0$ 时，有 $f(x)F(x) = \sin^2 2x$，求 $f(x)$.

解 $\int f(x)F(x)\mathrm{d}x = \int \sin^2 2x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int(1 - \cos 4x)\mathrm{d}x$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{8}\sin 4x + c.$$

又 $$\int f(x)F(x)\mathrm{d}x = \int F(x)\mathrm{d}F(x) = \frac{1}{2}F^2(x) + c,$$

故 $$F^2(x) = x - \frac{1}{4}\sin 4x + c.$$

即 $F(x) = \sqrt{x - \frac{1}{4}\sin 4x + c}$，由 $F(0) = 1 \Longrightarrow c = 1$. 所以

$$f(x) = \left(\sqrt{x - \frac{1}{4}\sin 4x + 1}\right)'$$

$$= (1 - \cos 4x)\Big/\left[2 - \sqrt{x - \frac{1}{4}\sin 4x + c}\right].$$

例 6 设单调的连续函数 $y = f(x)$ 和 $x = \varphi(y)$ 互为反函数，且 $\varphi'(y) > 0$，证明：

$$\int \sqrt{f'(x)}\mathrm{d}x = \int \sqrt{\varphi'(y)}\mathrm{d}y.$$

证 由反函数求导法则知 $f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}$，$\mathrm{d}x = \varphi'(y)\mathrm{d}y$，故

$$\int \sqrt{f'(x)}\mathrm{d}x = \int \sqrt{1/\varphi'(y)}\varphi'(y)\mathrm{d}y = \int \sqrt{\varphi'(y)}\mathrm{d}y.$$

例 7 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\frac{\sin x}{1 + x\sin x}$，计算 $\int f(x)f'(x)\mathrm{d}x$.

解 因为 $\int f(x)f'(x)\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}f(x) = \frac{1}{2}f^2(x) + c$，而

$$f(x) = \left[\frac{\sin x}{1 + \sin x}\right]' = \frac{\cos x - \sin^2 x}{(1 + x\sin x)^2},$$

所以 $$\int f(x)f'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{\cos x - \sin^2 x}{(1 + x\sin x)^2}\right]^2 + c.$$

例 8 已知$\int f(x)\mathrm{d}x = x^2 + c$,计算$\int xf(1 - x^2)\mathrm{d}x$.

解 由题设知,$f(x) = (x^2 + c)' = 2x$,故

$$f(1 - x^2) = 2(1 - x^2).$$

于是 $$\int xf(1 - x^2)\mathrm{d}x = \int x \cdot 2(1 - x^2)\mathrm{d}x$$

$$= \int(2x - 2x^3)\mathrm{d}x = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + c.$$

例 9 已知 $f'(\sin^2 x) = \cos 2x + \tan^2 x$,求 $f(x)$,$0 < x < 1$.

解 $$f'(\sin^2 x) = 1 - 2\sin^2 x + \frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x}$$

$$\Longrightarrow f'(x) = 1 - 2x + \frac{x}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} - 2x.$$

故 $$f(x) = \int f'(x)\mathrm{d}x = \int\left(\frac{1}{1 - x} - 2x\right)\mathrm{d}x$$

$$= -\ln(1 - x) - x^2 + c,\ 0 < x < 1.$$

例 10 设 $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}$,计算$\int \frac{f'(\ln x)}{x}\mathrm{d}x$.

解 由 $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ 知,$f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$,得

$$f'(\ln x) = -\mathrm{e}^{-\ln x} = -\frac{1}{x},$$

则 $$\int \frac{f'(\ln x)}{x}\mathrm{d}x = \int \frac{-1/x}{x}\mathrm{d}x = \int -\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{x} + c.$$

例 11 计算$\int |x|\mathrm{d}x$.

解 先分别讨论,再加以综合.

当 $x > 0$ 时, $\int |x|\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + c_1$;

当 $x < 0$ 时, $\int |x|\mathrm{d}x = -\int x\mathrm{d}x = -\frac{x^2}{2} + c_2$.

因为 $|x|$ 在$(-\infty, +\infty)$上连续,所以 $|x|$ 的原函数$\int |x|\mathrm{d}x$ 也在$(-\infty, +\infty)$上连续. 故

$$\lim_{x\to 0^+}(x_2/2+c_1)=\lim_{x\to 0^-}(-x_2/2+c_2)\Longrightarrow c_1=c_2,$$

于是
$$\int|x|\mathrm{d}x=\frac{|x|x}{2}+c.$$

例 12 已知 $F(x)=f(x)-\dfrac{1}{f(x)},G(x)=f(x)+\dfrac{1}{f(x)}$，若 $f'(x)=[G(x)]^2$，且 $f(\pi/4)=1$，求 $f(x)$.

解 先求 $f'(x)$ 的表达式. 由题设得

$$F'(x)=f'(x)+\frac{f'(x)}{f^2(x)}=f'(x)\left(\frac{f^2(x)+1}{f^2(x)}\right),$$

又 $$F'(x)=[G(x)]^2=\left[f(x)+\frac{1}{f(x)}\right]^2=\left[\frac{f^2(x)+1}{f(x)}\right]^2,$$

故 $$f'(x)\left(\frac{1+f^2(x)}{f^2(x)}\right)=\frac{(f^2(x)+1)^2}{f^2(x)}\Longrightarrow f'(x)=1+f^2(x).$$

即
$$\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}=1.$$

将等式两边对 x 积分，得

$$\int\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{1+f^2(x)}\mathrm{d}f(x)=\arctan f(x)=x+c.$$

所以
$$f(x)=\tan(x+c).$$

由 $f(\pi/4)=1\Longrightarrow\pi/4+c=\pi/4\Longrightarrow c=0$. 故

$$f(x)=\tan x.$$

二、用基本公式与性质计算不定积分

例 13 计算下列积分：

(1) $\int\tan^2x\mathrm{d}x$； (2) $\int\dfrac{1}{\sin^2 2x}\mathrm{d}x$；

(3) $\int(\cos^4x+\sin^4x)\mathrm{d}x$； (4) $\int(\cos^4x-\sin^4x)\mathrm{d}x$.

解 要善于利用三角函数恒等式将函数变形，使积分计算变得简单易行.

(1) 原式 $=\int(\sec^2x-1)\mathrm{d}x=\int\sec^2x\mathrm{d}x-\int\mathrm{d}x$
$=\tan x-x+c.$

(2) 原式$=\dfrac{1}{4}\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^2x\cos^2x}=\frac{1}{4}\int\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin^2x\cos^2x}dx$

$$=\frac{1}{4}\left[\int\frac{dx}{\cos^2x}-\int\frac{dx}{\sin^2x}\right]=\frac{1}{4}(\tan x-\cot x)+c.$$

(3) 原式$=\displaystyle\int[(\cos^2x+\sin^2x)^2-2\cos^2x\sin^2x]dx$

$$=\int(1-2\sin^2 2x)dx=\frac{1}{4}\int(3+\cos 4x)dx$$

$$=\frac{1}{4}\left(3x+\frac{1}{4}\sin 4x\right)+c.$$

(4) 原式$=\displaystyle\int(\cos^2x+\sin^2x)(\cos^2x-\sin^2x)dx$

$$=\int\cos 2x dx=\frac{1}{2}\sin 2x+c.$$

显然，将题(3) 积分式与题(4) 积分式的和再乘以 1/2，得

$$\int\cos^4x dx=\frac{1}{32}(12x+\sin 4x+8\sin 2x)+c_1,$$

将题(3) 积分式与题(4) 积分式的差再乘以 1/2，得

$$\int\sin^4x dx=\frac{1}{32}(12x+\sin 4x-8\sin 2x)+c_2.$$

例 14 计算下列积分：

(1) $\displaystyle\int a^xe^xdx$；　　(2) $\displaystyle\int(2^x-3^x)^2dx$；

(3) $\displaystyle\int e^x\left(a^x-\frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$；　　(4) $\displaystyle\int\frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx$.

解 (1) 原式$=\displaystyle\int(ae^x)dx=\frac{(ae)^x}{\ln(ae)}+c=\frac{(ae)^x}{1+\ln a}+c.$

(2) 原式$=\displaystyle\int(4^x-2\cdot 6^x+9^x)dx=\frac{4^x}{\ln 4}-\frac{2\cdot 6^x}{\ln 6}+\frac{9^x}{\ln 9}+c.$

(3) 原式$=\displaystyle\int\left[(ae)^x-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right]dx$

$$=\frac{(ae)^x}{1+\ln a}-\arcsin x+c.$$

(4) 原式$=\displaystyle\int\frac{(e^x+1)(e^{2x}-e^x+1)}{e^x+1}dx=\int(e^{2x}-e^x+1)dx$

$$= \frac{1}{2}e^{2x} - e^{x} + x + c.$$

例 15　计算下列积分：

(1) $\int \frac{dx}{(x+3)(x+7)}$；　　(2) $\int \frac{3x^4+2x^2+1}{x^2+1}dx$；

(3) $\int \frac{dx}{x^2-a^2}$；　　(4) $\int \frac{x^2+x-1}{x^3-2x^2+x-2}dx$.

解　拆项、拼项是将复杂函数化为简单函数的常用手段，拆得巧妙，拼得合理，可以极大地简化积分计算，故分项积分是一种基本方法.

(1) $$\frac{1}{(x+3)(x+7)} = \frac{1}{4}\frac{(x+7)-(x+3)}{(x+3)(x+7)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+7}\right),$$

故　$$原式 = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+7}\right)dx = \frac{1}{4}[\ln|x+3| - \ln|x+7|] + c = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+3}{x+7}\right| + c.$$

(2) $$\frac{3x^4+2x^2+1}{x^2+1} = \frac{3x^2(x^2+1)-(x^2+1)+2}{x^2+1} = 3x^2 - 1 + \frac{2}{x^2+1},$$

故　$$原式 = \int\left(3x^2 - 1 + \frac{2}{1+x^2}\right)dx = x^3 - x + 2\arctan x + c.$$

(3) $$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right),$$

故　$$原式 = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c.$$

(4) $$\frac{x^2+x-1}{x^3-2x^2+x-2} = \frac{(x^2+1)+(x-2)}{(x^2+1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x^2+1},$$

故　$$原式 = \int\left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x^2+1}\right)dx = \ln|x-2| + \arctan x + c.$$

例 16　计算下列积分：

(1) $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax}}$;　　　　(2) $\int(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x^3}-1)dx$;

(3) $\int \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}dx$;　　　　(4) $\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}dx$.

解　遇到根式函数，将式中根式化为分数指数幂，再利用幂函数积分公式计算积分.

(1) 原式 $=\frac{1}{\sqrt{2a}}\int x^{-1/2}dx=\frac{1}{\sqrt{2a}}\left(\frac{1}{-1/2+1}\right)x^{-1/2+1}+c$

$=\sqrt{2x/a}+c.$

(2) 原式 $=\int(x^2+x^{3/2}-x^{1/2}-1)dx$

$=\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{5}x^{5/2}-\frac{2}{3}x^{3/2}-x+c.$

(3) 原式 $=\int(x^{-1/2}-2x^{1/2}+x^{3/2})dx$

$=2x^{1/2}-\frac{4}{3}x^{3/2}+\frac{2}{5}x^{5/2}+c.$

(4) 原式 $=\int(1-x^{-2})x^{3/4}dx=\int(x^{3/4}-x^{-5/4})dx$

$=\frac{4}{7}x^{7/4}+4x^{-1/4}+c.$

例 17　计算下列积分：

(1) $\int\frac{x^3}{(x-1)^{100}}dx$;　　　(2) $\int\sin x\sin(x+a)dx$.

解　(1) $x^3=[(x-1)+1]^3$

$=(x-1)^3+3(x-1)^2+3(x-1)+1.$

故

$$原式=\int\left[\frac{1}{(x-1)^{97}}+\frac{3}{(x-1)^{98}}+\frac{3}{(x-1)^{99}}+\frac{1}{(x-1)^{100}}\right]dx$$

$$=-\left[\frac{1}{96(x-1)^{96}}+\frac{3}{97(x-1)^{97}}+\frac{3}{98(x-1)^{98}}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{99(x-1)^{99}}\right]+c.$$

(2) $\sin x\sin(x+a)=\frac{1}{2}[\cos a-\cos(2x+a)]$，故

$$原式=\frac{1}{2}\int[\cos a-\cos(2x+a)]\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}x\cos a-\frac{1}{4}\sin(2x+a)+c.$$

例 18 已知 $y'=f'(x)$ 的图形是一条开口向着 y 轴正向的二次抛物线，与 x 轴交于 $x=0$ 和 $x=2$ 两点. 设 $f(x)$ 有极大值 4 和极小值 0，求 $f(x)$.

解 由题设，知 $f'(x)=ax(x-2)\ (a>0)$，则

$$f(x)=\int ax(x-2)\mathrm{d}x=ax^3/3-ax^2+c.$$

又当 $f'(x)=0$ 时，有稳定点 $x=0$ 和 $x=2$，则

$$f(0)=c,\quad f(2)=-4a/3+c.$$

而 $f''(x)=2a(x+1)$，有 $f''(0)=-2a<0$，$f''(2)=2a>0$. 故 $f(0)$ 为极大，$f(2)$ 为极小，即

$$\begin{cases}c=4,\\-4a/3+c=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=4,\\a=3.\end{cases}$$

所以
$$f(x)=x^3-3x^2+4.$$

第二节　换元积分法与分部积分法

主 要 内 容

1. 换元积分法　设 $u=\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $\alpha<\varphi(x)<\beta$，$g(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上有定义，记

$$f(x)=g(\varphi(x))\varphi'(x),\ x\in[a,b].$$

(1) 第一换元法(也称凑微分法)　若 g 在 $[\alpha,\beta]$ 上有原函数

G,则 f 在$[a,b]$上也有原函数 F,且 $F(x)=G(\varphi(x))+c$ 或

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int g(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x=\left[\int g(u)\mathrm{d}u\right]_{u=\varphi(x)}$$
$$=G(\varphi(x))+c.$$

(2) 第二换元法　若 $\varphi'(x)\neq 0$,则当 f 在$[a,b]$上有原函数时,g 在$[\alpha,\beta]$上也有原函数 G,且 $G(u)=F(\varphi^{-1}(u))+c$ 或

$$\int g(u)\mathrm{d}u=\int g(\varphi(x))\varphi(x)\mathrm{d}x=\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]_{x=\varphi^{-1}(u)}$$
$$=F[\varphi^{-1}(u)]+c.$$

2. 分部积分法　若 $u(x)$ 与 $v(x)$ 可导,且不定积分 $\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$ 存在,则$\int u(c)v'(x)\mathrm{d}x$ 也存在,且有

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x.$$

上式称为分部积分公式,简记为$\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u.$

疑 难 解 析

1. 使用换元法应注意哪些问题?

答　换元积分法也称变量替换法,是计算不定积分的重要方法.换元积分公式是复合函数求导公式的逆转,可以解决一大类函数的不定积分问题.

(1) 第一换元法又称凑微分法,它是将不定积分公式中被积函数分离,用分离出的一部分与自变量的微分凑成一个新变量的微分,而使被积函数中的余下部分化为新变量的函数,于是原不定积分化为新变量的函数对新变量的不定积分.即,将不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 中 $f(x)$ 分离为 $f[\varphi(x)]\varphi'(x)$,使 $\varphi'(x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$ 成为新变量的微分,余下部分化为新变量的函数 $f[\varphi(x)]=g(u)$,故

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x=\int g(u)\mathrm{d}u$$

$$= G(u) + c = G[\varphi(x)] + c.$$

要掌握第一换元法，读者必须牢记常用的求导数公式并能熟练运用复合函数的求导法则.

(2) 在第二换元法中引入一个新变量，使原不定积分中的自变量的微分化为一个新变量函数与新变量微分之积，而原被积函数也化为新变量的函数，于是两个新变量函数之积成为新的被积函数，得到一个新的不定积分. 即，对不定积分$\int g(u)\mathrm{d}u$，令 $u = \varphi(x)$，则 $\mathrm{d}u = \varphi'(x)\mathrm{d}x, g(u) = g[\varphi(x)]$. 得到新的被积函数 $g[\varphi(x)]\varphi'(x) = f(x)$. 故

$$\int g(u)\mathrm{d}u = \int g[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x$$

$$= F(x) + c = F[\varphi^{-1}(u)] + c.$$

要掌握第二换元法也必须能熟练运用复合函数的求导法则，能引入恰当的新变量.

总之，换元法的关键是变量替换，技巧在于凑微分和引入新变量，目的是使新的不定积分比原不定积分易于求出.

2. 使用分部积分法的原则是什么？

答 分部积分法是两个函数乘积的导数公式的逆转，在认识公式

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$$

时要认识到：等式的意义是等号两边的全体原函数相等，而不是某一个原函数相等.

使用分部积分法的原则是：将$\int f(x)\mathrm{d}x$ 中的 $f(x)\mathrm{d}x$ 化为 $u\mathrm{d}v$，要求 $v = \int \mathrm{d}v$ 易于求得（最好是一眼即能看出），要求$\int v\mathrm{d}u$ 要比$\int u\mathrm{d}v$ 易于积出. 将 $f(x)\mathrm{d}x$ 化为恰当的 $u\mathrm{d}v$ 是分部积分的关键，也是技巧的体现. 一般地，当 $f(x)$ 可以分解为两个函数的乘积时，

我们选择其中一个为 u，另一个与 $\mathrm{d}x$ 组成 $\mathrm{d}v$，选择"u"的优先次序是"反(三角函数)、对(数函数)、幂(函数)、三(角函数)、指(数函数)". 次序选对了，不定积分易于求出；次序选错了，则不定积分不能求出. 如

$$\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}\mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + c,$$

而

$$\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}\,\frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}\mathrm{e}^x - \int \frac{x^2}{2}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x.$$

积分反而越来越复杂了.

方法、技巧与典型例题分析

一、换元积分法的应用

换元积分法分第一换元法与第二换元法，第一换元法的关键在于凑微分. 凑得巧妙，不定积分就易于求出；否则求积分就比较困难. 但一般地，使用第一换元法时不写出中间的替换变量，做题者心中有数就可以了. 常用的凑微分形式有：

$$\int f(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int f(ax+b)\mathrm{d}(ax+b),$$

$$\int f(x^n)x^{n-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int f(x^n)\mathrm{d}x^n,$$

$$\int f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x = \int f(\sin x)\mathrm{d}\sin x,$$

$$\int f(\cos x)\sin x\mathrm{d}x = -\int f(\cos x)\mathrm{d}\cos x,$$

$$\int f(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \int f(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}\mathrm{e}^x,$$

$$\int f(\ln x)\,\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \int f(\ln x)\mathrm{d}\ln x,$$

$$\int f(\tan x)\,\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int f(\tan x)\mathrm{d}\tan x,$$

$$\int f(\cot x)\frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=-\int f(\cot x)\mathrm{d}\cot x,$$

$$\int f(\arcsin x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int f(\arcsin x)\mathrm{d}\arcsin x,$$

$$\int f(\arccos x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=-\int f(\arccos x)\mathrm{d}\arccos x,$$

$$\int f(\arctan x)\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int f(\arctan x)\mathrm{d}\arctan x,$$

$$\int f\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\int f\left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{x}\right),$$

$$\int f\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\int f\left(x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right).$$

一些较复杂的问题，有时要凑几次微分.

第二换元法一般是根据被积函数的特点和形式来选定代换形的，常用的有三角代换、双曲代换、根式代换、指数代数、倒代换等.具法的方法和技巧，我们将在例题中讲述.

事实上，较复杂的不定积分一般都不能用单一的方法求得，而需要使用多种方法积分.这种例子我们将在后面逐步引入.

例 1 用不同方法计算不定积分$\int\sin 2x\mathrm{d}x$，解释不同结果的合理性.

解 有三种解法：

$$I=2\int\sin x\cos x\mathrm{d}x=2\int\sin x\mathrm{d}\sin x=\sin^2 x+c_1,$$

$$I=2\int\sin x\cos x\mathrm{d}x=-2\int\cos x\mathrm{d}\cos x=-\cos^2 x+c_2,$$

$$I=\frac{1}{2}\int\sin 2x\mathrm{d}(2x)=-\cos 2x+c_3.$$

因为$-\cos^2 x+c_2=\sin^2 x-1+c_2$，所以，当$c_1=c_2-1$时，前两式就相等了，即前两结果只相差一个常数，故在全体原函数的意义上是相等的.

又 $$-\frac{1}{2}\cos 2x+c_3=-\frac{1}{2}(\cos^2 x-\sin^2 x)+c_3$$

$$= -\cos^2 x + \frac{1}{2} + c_3,$$

所以后两式也只相差一个常数，它们在全体原函数的意义上是相等的.

例 2 计算下列不定积分：

(1) $\int \frac{dx}{(ax+b)^n}$；　　(2) $\int \sqrt{a-bx}\,dx$；

(3) $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+8}dx$；　　(4) $\int \frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}$.

解 利用$\int x^\mu dx = \frac{1}{\mu+1}x^{\mu+1}+c$.

(1) $I = \frac{1}{a}\int (ax+b)^{-n}d(ax+b)$

$$= -\frac{1}{a(n-1)}(ax+b)^{1-n}+c.$$

(2) $I = \frac{-1}{b}\int (a-bx)^{1/2}d(a-bx) = -\frac{2}{3b}(a-bx)^{3/2}+c.$

利用$\int \frac{1}{u}du = \ln u + c$，特别是分子的分子恰好是分母的导数时，非常简便.

(3) $I = \int \frac{d(x^2-3x+8)}{x^2-3x+8} = \ln|x^2-3x+8|+c.$

(4) $I = \int \frac{d\ln x}{\ln x\ln(\ln x)} = \int \frac{d\ln(\ln x)}{\ln(\ln x)} = \ln[\ln(\ln x)]+c.$

例 3 计算下列不定积分：

(1) $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx$；　　(2) $\int \frac{1}{x^4+x^2-6}dx$；

(3) $\int \tan\sqrt{1+x^2}\,\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$；　　(4) $\int \frac{1}{x(x^6+4)}dx$.

解 有时需要先将被积函数变形，再进行恰当的变量替换.

(1) $I = \int (a+x)\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = a\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} + \int \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$$= a\cdot\arcsin\frac{x}{a} + \left(-\frac{1}{2}\right)\int (a^2-x^2)^{-1/2}d(a^2-x^2)$$

$$= a \cdot \arcsin \frac{x}{a} - (a^2 - x^2)^{1/2} + c.$$

(2) $$I = \int \frac{1}{(x^2-2)(x^2+3)}\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{x^2-2} - \frac{1}{x^2+3}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{5}\int\left[\frac{1}{(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})} - \frac{1}{3}\frac{1}{1+(x/\sqrt{3})^2}\right]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{20}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right| - \frac{1}{15}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}} + c.$$

(3)

$$I = \int \frac{\sin\sqrt{1+x^2}}{\cos\sqrt{1+x^2}}\frac{\mathrm{d}x^2}{2\sqrt{1+x^2}} = \int\frac{\sin\sqrt{1+x^2}}{\cos\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}\sqrt{1+x^2}$$

$$= \int\frac{1}{\cos\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}\cos\sqrt{1+x^2} = \ln|\cos\sqrt{1+x^2}| + c.$$

(4) $$I = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x} - \frac{x^5}{x^6+4}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{24}\int\frac{\mathrm{d}(x^6+4)}{x^6+4}$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{24}\ln|x^6+4| + c = \frac{1}{24}\ln\left|\frac{x^6}{x^6+4}\right| + c.$$

例 4 计算下列不定积分：

(1) $\int\frac{\ln(1+x)-\ln x}{x(x+1)}\mathrm{d}x$；　(2) $\int\frac{x+1}{x(1+xe^x)}\mathrm{d}x$；

(3) $\int\frac{x+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$；　(4) $\int e^x\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$.

解　(1) 观察到分母两个因式与分子中两个因式相同，所以分解分母的因式，得

$$I = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)[\ln(1+x) - \ln x]\mathrm{d}x$$

$$= -\int[\ln(1+x) - \ln x]\mathrm{d}[\ln(1+x) - \ln x]$$

$$= -\frac{1}{2}[\ln(1+x) - \ln x]^2 + c = -\frac{1}{2}\ln^2\left(1+\frac{1}{x}\right) + c.$$

(2) 观察到分母中因式 xe^x 无法分解，因此设法将含 x 的项都凑成 xe^x 形式，得

$$I = \int\frac{e^x(x+1)}{xe^x(1+xe^x)}\mathrm{d}x = \int\frac{\mathrm{d}xe^x}{xe^x(1+xe^x)}$$

$$= \int\left(\frac{1}{xe^x} - \frac{1}{1+xe^x}\right)d(xe^x) = \ln\frac{xe^x}{1+xe^x} + c$$

$$= x + \ln\frac{x}{1+xe^x} + c.$$

一般地,有凑微分形式

$$e^{ax}[\varphi(bx) + b\varphi'(bx)] = d[e^{ax}\varphi(bx)],$$

如
$$\int e^x\left[\frac{1}{x} + \ln x\right]dx = \int d(e^x\ln x) = e^x\ln x + c.$$

(3) 当函数 $v(x) = xu'(x)$ 时,有公式

$$\int[u(x) + v(x)]dx = \int d[xu(x)] = xu(x) + c.$$

在本例中令 $u(x) = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$,则 $xu'(x) = \dfrac{x}{1+\cos x}$,

故
$$I = \int\left(\frac{\sin x}{1+\cos x} + \frac{x}{1+\cos x}\right)dx = \int d\left(x\cdot\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)$$

$$= \frac{x\sin x}{1+\cos x} + c.$$

(4) 因为
$$\frac{1+\sin x}{1+\cos x} = \frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{1}{1+\cos x},$$

而
$$\frac{1}{1+\cos x} = \left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)',$$

所以由题(2)中凑微分形式得

$$I = \int e^x\left(\frac{\sin x}{1+\cos x} + \frac{1}{1+\cos x}\right)dx = \int d\left(\frac{e^x\sin x}{1+\cos x}\right)$$

$$= \frac{e^x\sin x}{1+\cos x} + c.$$

例 5 计算下列不定积分:

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{1+\sin x}}dx$; (2) $\displaystyle\int\frac{x^{2n-1}}{1+x^n}dx$;

(3) $\displaystyle\int\frac{\cos x - \sin x}{1+\sin x\cos x}dx$; (4) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}$.

解 认真观察被积函数,找出特点,进行变形,使积分易于计算.

(1) 进行变形,去掉根号再积分.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+\sin x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1+\cos(\pi/2-x)}}$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{2\cos^2(\pi/4-x/2)}} = -\sqrt{2}\int \frac{d(\pi/4-x/2)}{\cos(\pi/4-x/2)}$$

$$= -\sqrt{2}\ln\left|\sec\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right|+c.$$

(2) 由于分母含因式 x^n，进行变形，化为对 x^n 的积分.

$$\int \frac{x^{2n-1}}{1+x^n}dx = \int \frac{x^n \cdot x^{n-1}}{1+x^n}dx = \frac{1}{n}\int \frac{x^n+1-1}{1+x^n}dx^n$$

$$= \frac{1}{n}\int dx^n - \int \frac{d(x^n+1)}{1+x^n} = \frac{x^n}{n} - \ln|x^n+1| + c.$$

(3) 利用三角函数之间的关系和 $d(\cos x+\sin x)=(\cos x-\sin x)dx$ 积分. 即变形后，考察分子是否为某函数的导数.

$$\int \frac{\cos x-\sin x}{1+\sin x\cos x}dx = \int \frac{2(\cos x+\sin x)}{1+(\cos x+\sin x)^2}dx$$

$$= 2\int \frac{d(\cos x+\sin x)}{1+(\cos x+\sin x)^2} = \arctan(\cos x+\sin x)+c.$$

(4) 将被积函数变形重组，巧妙地凑成微分.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)}} = \int \frac{2d\sqrt{x-a}}{\sqrt{b-x}}$$

$$= 2\int \frac{d\sqrt{x-a}}{\sqrt{(\sqrt{b-a})^2-(\sqrt{x-a})^2}} = 2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}+c.$$

从题(4)可以看出，要想凑微分"凑"得巧妙，使积分变得简单，必须对复合函数求导方法和常用公式烂熟于心.

例 6 计算下列不定积分：

(1) $\int \cos(\ln x)dx$； (2) $\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$； (3) $\int e^{2x}\sin^2 x dx$.

解 利用三角函数间的关系，将不定积分"配对"然后解方程求出不定积分，还可以得到一个配对的不定积分结果.

(1) 令 $I_1 = \int \cos(\ln x)dx, I_2 = \int \sin(\ln x)dx$. 则

$$I_1 + I_2 = \int [\cos(\ln x) + \sin(\ln x)]dx$$

$$= \int [x(\sin(\ln x))' + \sin(\ln x)]dx \text{（由例 4(3) 中公式）}$$

$$= \int d[x\sin(\ln x)] = x\sin(\ln x) + c_1,$$

$$I_1 - I_2 = \int [\cos(\ln x) - \sin(\ln x)]dx$$

$$= \int [\cos(\ln x) + x(\cos(\ln x))']dx = \int d[x\cos(\ln x)]$$

$$= x\cos(\ln x) + c.$$

解方程组，即得 I_1 和 I_2

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = x\sin(\ln x) + c_1, \\ I_1 - I_2 = x\sin(\ln x) + c_2, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I_1 = \dfrac{x}{2}[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)] + c, \\ I_2 = \dfrac{x}{2}[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + c_0. \end{cases}$$

（2）令 $I_1 = \int \dfrac{\sin x dx}{\sin x + \cos x}, I_2 = \int \dfrac{\cos x dx}{\sin x + \cos x}$，则

$$I_1 + I_2 = \int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x}dx = \int dx = x + c_1,$$

$$-I_1 + I_2 = \int \frac{-\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x}dx = \int \frac{d(\cos x + \sin x)}{\sin x + \cos x}$$

$$= \ln|\sin x - \cos x| + c_2.$$

解方程组，即得 c_1 和 I_2.

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = x + c_1 \\ -I_1 + I_2 = \ln|\sin x + \cos x| + c_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I_1 = \dfrac{1}{2}(x - \ln|\sin x + \cos x|) + c, \\ I_1 = \dfrac{1}{2}(x + \ln|\sin x + \cos x|) + c_0. \end{cases}$$

（3）令 $I_1 = \int e^{2x}\sin^2 x dx, I_2 = \int e^{2x}\cos^2 x dx$，则

$$I_1 + I_2 = \int e^{2x}(\sin^2 x + \cos^2 x)dx = \frac{1}{2}e^{2x} + c_1,$$

$$I_1 - I_2 = \int e^{2x}(\cos^2 x - \sin^2 x)dx = \frac{1}{2}\int e^{2x}\cos 2x dx.$$

又令 $I_3 = \int e^t \cos t dt, I_4 = \int e^t \sin t dt$，则

$$I_3 + I_4 = \int e^t[\cos t + \sin t]dt = \int e^t[(\sin t)' + \cos t]dt$$

$$= \int d(e^t \sin t) = e^t \sin t + c_3 \text{（依例 4(3) 中公式）},$$

$$I_3 - I_4 = \int e^t[\cos t - \sin t]dt = \int e^t[\cos t + (\cos t)']dt$$

$$= \int d(e^t \cos t) = e^t \cos t + c_4 \text{（依例 4(3) 中公式）}.$$

解方程组
$$\begin{cases} I_3 + I_4 = e^t \sin t + c_3, \\ I_3 - I_4 = e^t \cos t + c_4, \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} I_3 = \frac{e^t}{2}(\sin t + \cos t) + c_3', \\ I_4 = \frac{e^t}{2}(\sin t - \cos t) + c_4', \end{cases}$$

$$\Longrightarrow I_2 - I_1 = \frac{e^{2x}}{4}(\sin 2x + \cos 2x) + c_2;$$

解方程组
$$\begin{cases} I_1 + I_2 = \frac{1}{2}e^{2x} + c_1, \\ I_2 - I_1 = \frac{e^{2x}}{4}(\sin 2x + \cos 2x) + c_2, \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} I_1 = \frac{e^{2x}}{4}\left[1 - \frac{1}{2}(\sin 2x + \cos 2x)\right] + c, \\ I_2 = \frac{e^{2x}}{4}\left[1 + \frac{1}{2}(\sin 2x + \cos 2x)\right] + c_0. \end{cases}$$

例 7 计算下列不定积分：

(1) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$； (2) $\int \frac{e^{2x}}{1 + e^x}dx$；

(3) $\int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1}dx$； (4) $\int \frac{e^{\arctan x} + x\ln x(1 + x^2)}{1 + x^2}dx$.

解 (1) $I=\int\frac{-\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{x}\sqrt{1-(\mathrm{e}^{-x})^{2}}}=\int\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{1-(\mathrm{e}^{-x})^{2}}}$

$=\arcsin\mathrm{e}^{-x}+c.$

(2) $I=\int\frac{\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{x}}=\int\frac{\mathrm{e}^{x}+1-1}{1+\mathrm{e}^{x}}\mathrm{d}\mathrm{e}^{x}=\int\mathrm{d}\mathrm{e}^{x}-\int\frac{(\mathrm{d}\mathrm{e}^{x}+1)}{1+\mathrm{e}^{x}}$

$=\mathrm{e}^{x}-\ln(1+\mathrm{e}^{x})+c.$

(3) $I=\int\frac{1+1/x^{2}}{x^{2}+1/x^{2}}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(x-1/x)}{(x-1/x)^{2}+2}$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left[\left(x-\frac{1}{x}\right)\Big/\sqrt{2}\right]+c$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x^{2}-1}{\sqrt{2}x}.$

(4) $I=\int\frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{1+x^{2}}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\frac{\ln(1+x^{2})}{1+x^{2}}\mathrm{d}(1+x^{2})$

$=\int\mathrm{e}^{\arctan x}\mathrm{d}\arctan x+\frac{1}{2}\int\ln(1+x^{2})\mathrm{d}[\ln(1+x^{2})]$

$=\mathrm{e}^{\arctan x}+\frac{1}{4}\ln^{2}(1+x^{2})+c.$

例 8 用三角代换计算下列不定积分：

(1) $\int\frac{x^{2}}{\sqrt{a^{2}-x^{2}}}\mathrm{d}x$； (2) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^{2}+a^{2}}}$；

(3) $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^{2}+a^{2})^{2}}$； (4) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^{2}\sqrt{x^{2}-a^{2}}}$.

解 (1)含 $\sqrt{a^{2}-x^{2}}$ 时，令 $x=a\sin t$（或 $a\cos t$），则 $\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$（或 $-a\sin t\mathrm{d}t$），且当 $|t|<\frac{\pi}{2}$ 时，$t=\arcsin\frac{x}{a}$，$\cos t=\frac{1}{a}\sqrt{a^{2}-x^{2}}$ $(a>0)$.（在使用熟练的情况下，以上内容在解题时均不再指出）从而有

$$\int\frac{x^{2}}{\sqrt{a^{2}-x^{2}}}\mathrm{d}x=\int\frac{a^{2}\sin^{2}t}{a\cos t}a\cos t\mathrm{d}t$$

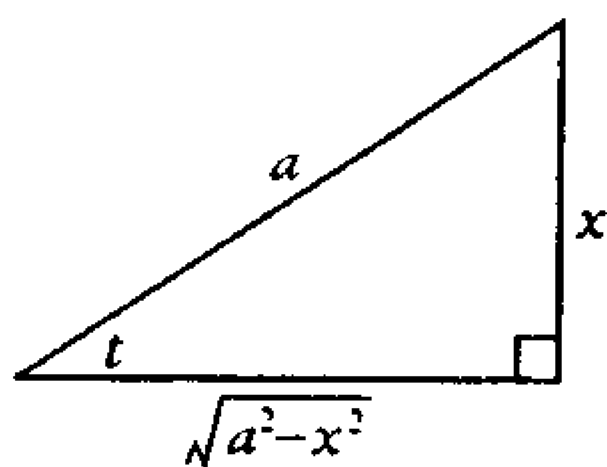


图 5.1

$$= \frac{a^2}{2}\int(1-\cos 2t)\mathrm{d}t = \frac{a^2}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)+c$$

$$= \frac{a^2}{2}(t-\sin t\cos t)+c$$

$$= \frac{a^2}{c}\left(\arcsin\frac{x}{a}-\frac{x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}\right)+c.$$

求反函数可借助图 5.1 所示的直角三角形，即结果要化为原变量的函数.

(2) 含 $\sqrt{a^2+x^2}$ 时，令 $x=a\tan t$，则

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{a^2+x^2}} = \int\frac{1}{a\tan t a\sec t}a\sec^2 t\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\int\csc t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{a}[-\ln|\csc t+\cot t|]+c$$

$$= -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}+\frac{a}{x}\right|+c$$

$$= \frac{1}{a}\ln\frac{|x|}{a+\sqrt{a^2+x^2}}+c\ \text{（见图 5.2）.}$$

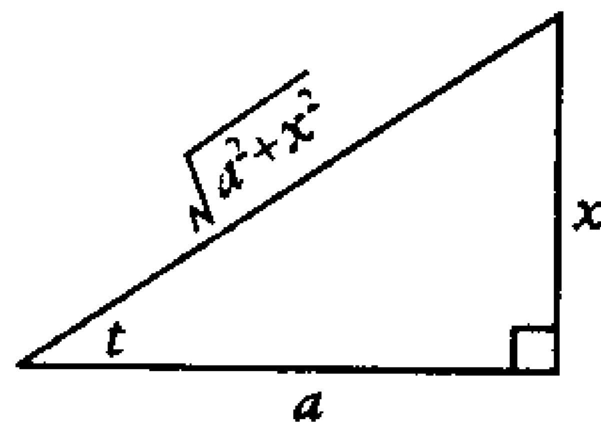


图 5.2

(3) 令 $x=a\tan t$，则

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \int\frac{a\sec^2 t+t\mathrm{d}t}{(a^2\tan^2 t+a^2)^2} = \frac{1}{a^3}\int\frac{\sec^2 t}{\sec^4 t}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{a^3}\int\cos^2 t\mathrm{d}t = \frac{1}{2a^3}\int(1-\cos 2t)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2a^3}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+c = \frac{1}{2a^3}\left(\arctan\frac{x}{a}+\frac{ax}{a^2+x^2}\right)+c.$$

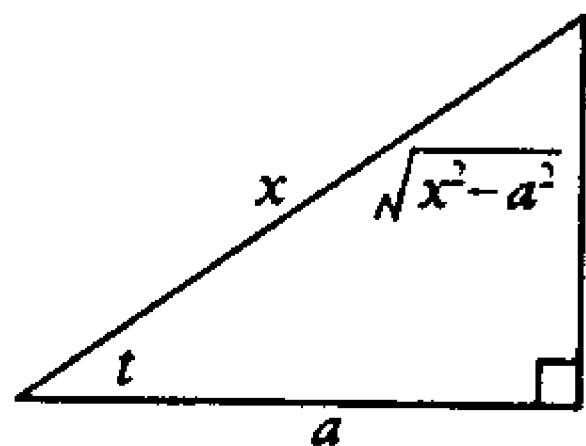


图 5.3

(4) 含 $\sqrt{x^2-a^2}$ 时，令 $x=a\sec t$，则

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-a^2}} = \int\frac{a\sec t\tan t}{a^2\sec^2 t a\tan t}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{a^2}\int\cos t\mathrm{d}t = \frac{1}{a^2}\sin t\mathrm{d}t+c$$

$$= \frac{1}{a^2x^2}\sqrt{x^2-a^2}+c\text{（见图 5.3）.}$$

例 9　用根式代换计算下列不定积分：

(1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$；　　(2) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1+x}}$；

(3) $\int \frac{1}{\sqrt{e^x+1}}dx$；　　(4) $\int \sqrt{1-e^{2x}}dx$.

解　(1) 被积函数中含根式 $\sqrt{x}$ 和 $\sqrt[3]{x}$，取根次数的最小公倍数 6，令 $u=\sqrt[6]{x}$，则

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=\int \frac{6u^5du}{u^3+u^2}=6\int\left(u^2-u+1-\frac{1}{1+u}\right)du$$

$$=6\left(\frac{u^3}{3}-\frac{u^2}{2}+u-\ln|1+u|\right)+c$$

$$=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln|1+\sqrt[6]{x}|+c.$$

(2) 令 $\sqrt{1+x}=t$，有 $dx=2tdt$，则

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{1+x}}=\int \frac{2tdt}{1+t}=\int\left(2-\frac{2}{1+t}\right)dt$$

$$=2t-2\ln|1+t|+c=2\sqrt{1+x}-2\ln|1+\sqrt{1+x}|+c.$$

(3) 令 $\sqrt{e^x+1}=t$，有 $dx=\frac{2t}{t^2-1}dt$，则

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}=\int \frac{2tdt}{t(t^2-1)}=2\int \frac{dt}{t^2-1}$$

$$=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+c=\ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right|+c.$$

(4) 令 $\sqrt{1-e^{2x}}=t$，有 $dx=\frac{-tdt}{1-t^2}$，则

$$\int \sqrt{1-e^{2x}}dx=\int t\frac{-t}{1-t^2}dt=\int \frac{1-t^2-1}{1-t^2}dt$$

$$=\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+c$$

$$=\sqrt{1-e^{2x}}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1-e^{2x}}-1}{\sqrt{1-e^{2x}}+1}\right|+c.$$

例 10　用指数代换计算下列不定积分：

(1) $\int \frac{1-e^x}{1+e^x}dx$；　　　(2) $\int \frac{dx}{e^{x/2}+e^x}$；

(3) $\int \frac{2^x dx}{1+2^x+4^x}$；　　　(4) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}$.

解　当被积函数中含因式 a^x 时，可令 $a^x=t$，化去指数因式.

(1) 令 $e^x=t$，有 $dx=\frac{dt}{t}$，则

$$\int \frac{1-e^x}{1+e^x}dx=\int \frac{1-t}{1+t}\frac{dt}{t}=\int\left(\frac{1}{t}-\frac{2}{1+t}\right)dt$$
$$=\ln|t|-2\ln|1+t|+c=x-2\ln|1+e^x|+c.$$

(2) 令 $e^{x/2}=t$，有 $dx=\frac{2dt}{t}$，则

$$\int \frac{dx}{e^{x/2}+e^x}=\int \frac{2}{t+t^2}\frac{dt}{t}=2\int \frac{t+1-t}{t^2(t+1)}dt$$
$$=2\int\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}+\frac{1}{t+1}\right)dt$$
$$=\frac{-2}{t}-2\ln|t|+2\ln|1+t|+c$$
$$=-2e^{-x/2}-x+2\ln|1+e^{x/2}|+c.$$

(3) 令 $2^x=t$，有 $dx=\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{dt}{t}$，则

$$\int \frac{2^x dx}{1+2^x+4^x}=\int \frac{t}{1+t+t^2}\frac{dt}{t\ln 2}=\frac{1}{\ln 2}\int \frac{dt}{(t+1/2)^2+3/4}$$
$$=\frac{1}{\ln 2}\int \frac{d(t+1/2)}{(t+1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2}$$
$$=\frac{1}{\ln 2}\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left[\left(t+\frac{1}{2}\right)\Big/\frac{\sqrt{3}}{2}\right]+c$$
$$=\frac{2}{\sqrt{3}\ln 2}\arctan[(2^{x+1}+1)/\sqrt{3}]+c.$$

(4) 令 $e^x=t$，有 $dx=\frac{dt}{t}$，则

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}=\int \frac{1}{\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}}\frac{dt}{t}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{1+t} - \sqrt{1-t}}{t^2}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{1+t}}{t^2}\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{1-t}}{t^2}\mathrm{d}t.$$

再令 $\sqrt{1+t} = u$,有 $\mathrm{d}t = 2u\mathrm{d}u$,则

$$\int \frac{\sqrt{1+t}}{t^2}\mathrm{d}t = \int \frac{u}{(u^2-1)^2}2u\mathrm{d}u = 2\int \frac{u^2-1+1}{(u^2-1)}\mathrm{d}u$$

$$= 2\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2-1} + \frac{1}{2}\int\left[\frac{-1}{u-1} + \frac{1}{(u-1)^2} + \frac{1}{u+1} + \frac{1}{(u-1)^2}\right]\mathrm{d}u$$

$$= -\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right| - \frac{1}{2}\ln|u-1| - \frac{1}{2(u-1)}$$

$$+ \frac{1}{2}\ln|u+1| - \frac{1}{2(u+1)} + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}-1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}+1}\right| - \frac{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}{2\mathrm{e}^x} + c_1.$$

再令 $\sqrt{1-t} = v$,有 $\mathrm{d}t = -2v\mathrm{d}v$,则

$$\int \frac{\sqrt{1-t}}{t^2}\mathrm{d}t = -2\int \frac{v^2-1+1}{(v^2-1)}\mathrm{d}v$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1-\mathrm{e}^x}-1}{\sqrt{1-\mathrm{e}^x}+1}\right| + \frac{\sqrt{1-\mathrm{e}^x}}{2\mathrm{e}^x} + c_2.$$

所以 $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x} - \sqrt{1-\mathrm{e}^x}}$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}-1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}+1}\right| + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{1-\mathrm{e}^x}-1}{\sqrt{1-\mathrm{e}^x}+1}\right|$$

$$- \frac{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}{2\mathrm{e}^x} - \frac{\sqrt{1-\mathrm{e}^x}}{2\mathrm{e}^x} + c.$$

例 11 用对数代换计算下列不定积分：

(1) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}\mathrm{d}x$; (2) $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\mathrm{d}x$.

解　当被积函数含因式 $\ln x$ 时，可令 $\ln x = t$，化简积分计算.

(1) 令 $\ln x = t$，有 $dx = e^t dt$，则

$$\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}dx = \int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{\ln x}d\ln x = \int \frac{\sqrt{1+t}}{t}dt.$$

再令 $\sqrt{1+t} = u$，有 $dt = 2udu$，则

$$\int \frac{\sqrt{1+t}}{t}dt = \int \frac{u}{u^2-1}2udu = 2\int\left(1 - \frac{1}{u^2-1}\right)du$$

$$= 2\left(u + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\right) + c$$

$$= 2\sqrt{1+t} + \ln\left|\frac{\sqrt{1+t}-1}{\sqrt{1+t}+1}\right| + c.$$

故　$$\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}dx = 2\sqrt{1+\ln x} + \ln\left|\frac{\sqrt{1+\ln x}-1}{\sqrt{1+\ln x}+1}\right| + c.$$

(2) 令 $\ln x = t$，有 $dx = e^t dt$，则

$$\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx = \int \frac{\ln x}{\sqrt{1+\ln x}}dx = \int \frac{t}{\sqrt{1+t}}dt.$$

再令 $\sqrt{1+u} = u$，有 $dt = 2udu$，则

$$\int \frac{t}{\sqrt{1+u}}dt = \int \frac{u^2-1}{u}2udu = 2\int(u^2-1)du$$

$$= \frac{2}{3}u^3 - 2u + c = \frac{2}{3}\sqrt{(1+t)^3} - 2\sqrt{1+t} + c.$$

故　$$\int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = \frac{2}{3}(\ln x - 2)\sqrt{1+\ln x} + c.$$

例 12　用倒代换计算下列不定积分：

(1) $\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}dx$；　　(2) $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}$；

(3) $\int \frac{dx}{x^8(1+x^2)}$；　　(4) $\int \frac{dx}{(1+x+x^2)^{3/2}}$.

解　当被积函数为分式，且分母中变量次数高于分子中变量次数时，可用倒代换，即 $x = \frac{1}{t}$，化简积分计算.

(1) 令 $x = \frac{1}{t}$，有 $dx = -\frac{dt}{t^2}$，则

$$\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}dx = \int \frac{1-\ln(1/t)}{[1/t-\ln(1/t)]^2}\left(-\frac{dt}{t^2}\right) = -\int \frac{1+\ln t}{(1+t\ln t)^2}dt$$

$$= -\int \frac{d(t\ln t)}{(1+t\ln t)^2} = \frac{1}{1+t\ln t} + c = \frac{x}{x-\ln x} + c.$$

(2) 令 $x^2 = \frac{1}{t}$，有 $\frac{dx}{x} = -\frac{dt}{2t}$，则

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t\sqrt{4-1/t}} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{4t^2-t}}$$

$$= -\frac{1}{4}\int \frac{1}{\sqrt{(t-1/8)^2-(1/8)^2}}d(t-1/8)$$

$$= -\frac{1}{4}\ln\left|t-\frac{1}{8}+\sqrt{t^2-t/4}\right| + c.$$

其中用了公式 $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln|u+\sqrt{u^2-a^2}| + c.$

故 $$\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}} = -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1}{x^2}-\frac{1}{8}+\sqrt{1/x^4-1/4x^2}\right| + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{2+\sqrt{4-x^2}}\right| + c.$$

(3) 令 $x = \frac{1}{t}$，有 $dx = -\frac{dt}{t^2}$，则

$$\int \frac{dx}{x^8(1+x^2)} = -\int \frac{t^8}{t^2+1}\cdot\frac{t^2}{t^2}dt = -\int \frac{t^8}{1+t^2}dt$$

$$= -\int (t^2-1)(t^4+1)dt - \int \frac{dt}{t^2+1}$$

$$= \int (-t^6+t^4-t^2+1)dt - \int \frac{dt}{t^2+1}$$

$$== \frac{t^7}{7}+\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}+t-\arctan t + c$$

$$= -\frac{1}{7x^7}+\frac{1}{5x^5}-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{x}-\arctan\frac{1}{x} + c.$$

(4) $$\int \frac{dx}{(1+x+x^2)^{3/2}} = \int \frac{dx}{[(x+1/2)^2+3/4]^{3/2}}.$$

令$(x+1/2)=\dfrac{1}{t}$，有 $\mathrm{d}x=-\dfrac{\mathrm{d}t}{t^2}$，则原式化为

$$\int\frac{1}{(1/t^2+3/4)^{3/2}}\left(-\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\right)=-\int\frac{t\mathrm{d}t}{(1+3t^2/4)}$$

$$=-\frac{2}{3}\int\frac{\mathrm{d}(3t^2/4+1)}{(1+3t^2/4)^{3/2}}=\frac{4}{3}(1+3t^2/4)^{-1/2}+c.$$

故
$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+x+x^2)^{3/2}}=\frac{2}{3}\frac{2x+1}{\sqrt{1+x+x^2}}+c.$$

例 13 用双曲代换计算下列不定积分：

(1) $\int\sqrt{a^2+x^2}\mathrm{d}x$； (2) $\int\dfrac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x$；

(3) $\int\sqrt{\dfrac{x-a}{x+a}}\mathrm{d}x$； (4) $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}$ $(a>0)$.

解 双曲代换的功效与三角代换相似，但演算较为复杂，一般令 $x=a\mathrm{sh}t$ 或 $x=a\mathrm{ch}t$，可以化简积分计算.

(1) 令 $x=a\mathrm{sh}t$，有 $\mathrm{d}x=a\mathrm{ch}t\mathrm{d}t$，则

$$\int\sqrt{a^2+x^2}\mathrm{d}x=a^2\int\mathrm{ch}^2t\mathrm{d}t=a^2\int\frac{1}{2}(\mathrm{ch}2t+1)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{a^2}{4}\mathrm{sh}2t+\frac{a^2}{2}t+c_1.$$

因为
$$x+\sqrt{a^2+x^2}=a(\mathrm{sh}t+\mathrm{ch}t)=a\mathrm{e}^t,$$

则
$$t=\ln\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a}.$$

又
$$\mathrm{sh}2t=2\mathrm{sh}t+\mathrm{ch}t=\frac{2x\sqrt{a^2+x^2}}{a^2},$$

故
$$\int\sqrt{a^2+x^2}\mathrm{d}x=\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+c.$$

(2) 令 $x=a\mathrm{sh}t$，有 $\mathrm{d}x=a\mathrm{ch}t\mathrm{d}t$，则

$$\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}}=a^2\int\mathrm{sh}^2t\mathrm{d}t=a^2\int\frac{\mathrm{ch}2t-1}{2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{a^2}{4}\mathrm{sh}2t-\frac{a^2}{2}t+c$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} - \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + c.$$

(3) 因为函数定义域为 $x \geqslant a$ 和 $x < -a$，所以：

1° $x > a$ 时，令 $x = a\mathrm{ch}t\ (t > 0)$，有 $\mathrm{d}x = a\mathrm{sh}t\mathrm{d}t$.

$$\int\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\mathrm{d}x = \int a(\mathrm{ch}t - 1)\mathrm{d}t = a\mathrm{sh}t - at + c_1$$

$$= a\sqrt{\mathrm{ch}^2t - 1} - at + c_1$$

$$= \sqrt{x^2-a^2} - a\ln(\sqrt{x^2-a^2} + x) + c_2$$

$$= \sqrt{x^2-a^2} - 2a\ln(\sqrt{x-a} + \sqrt{x+a}) + c.$$

2° 当 $x < -a$ 时，令 $x = -a\mathrm{ch}t$，有 $\mathrm{d}x = -a\mathrm{sh}t\mathrm{d}t$，

$$\int\sqrt{\frac{x-a}{x+a}} = -a\int(\mathrm{ch}t + 1)\mathrm{d}t = -a\mathrm{sh}t - at + c_1$$

$$= -\sqrt{x^2-a^2} - a\ln(\sqrt{x^2-a^2} - x) + c_2$$

$$= -\sqrt{x^2-a^2} - 2\ln(\sqrt{-x-a} + \sqrt{-x+a}) + c.$$

即，当 $|x| > a$ 时，有

$$\int\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\mathrm{d}x$$

$$= \mathrm{sgn}x \cdot \sqrt{x^2-a^2} - 2a\ln(\sqrt{|x-a|} + \sqrt{|x+a|}) + c$$

（式中 $2\ln(\sqrt{|x-a|} + \sqrt{|x+a|})$

$$= 2\ln\frac{\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a}}{\sqrt{2}\,a} + 2\ln\sqrt{2}\,a$$

$$= \ln\frac{(\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a})^2}{2a^2} + \ln 2a^2 = \ln(x + \sqrt{x^2-a^2}).$$

(4) 令 $x = a\mathrm{ch}t$，有 $\mathrm{d}x = a\mathrm{sh}t\mathrm{d}t$，则

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int\frac{a\mathrm{ch}t}{a\mathrm{ch}t}\mathrm{d}t = \int\mathrm{d}t = t + c_1 = \mathrm{arch}\frac{x}{a} + c_1$$

$$= \ln\left[\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}\right]c_1 = \ln(x + \sqrt{x^2-a^2}) + c.$$

在上面的例题中，我们对每一个题只用一种指定的方法求解．需要指出的是，这并不说明这种解是惟一的，或者是最优的．实际上，大多数题都有多种解法，技巧各有不同，结果有时也迥然相异，但对结果求导，总能得到被积函数．

下面的例题，我们不规定方法，读者可试用其它方法求解．

例 14 计算下列不定积分：

(1) $\int \sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}\mathrm{d}x$；

(3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$；　　(4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$；

(5) $\int \frac{1-x^n}{x(1+x^n)}\mathrm{d}x$；　　(6) $\int \frac{\sin 2nx}{\sin x}\mathrm{d}x \ (n\in \mathbf{N})$.

解 (1) 令 $\mathrm{e}^x=\sin t$，有 $\mathrm{d}x=\frac{\cos t}{\sin t}\mathrm{d}t$，则

$$\int \sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x=\int \frac{\cos^2 t}{\sin t}\mathrm{d}t=\int \frac{1-\sin^2 t}{\sin t}\mathrm{d}t$$

$$=\int(\csc t-\sin t)\mathrm{d}t=\cos t+\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right|+c$$

$$=\cos t-\ln\left|\frac{\sqrt{1-\cos t}}{\sqrt{1+\cos t}}\right|+c$$

$$=\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}-1}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}+1}\right|+c.$$

(2) 令 $x=2a\sin^2 t$，有 $\mathrm{d}x=4a\sin t\cos t\mathrm{d}t$，则

$$\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}\mathrm{d}x=8a^2\int\sin^4 t\mathrm{d}t=2a^2\int(1-\cos 2t)^2\mathrm{d}t$$

$$=2a^2\int(1-2a\cos t+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4t)\mathrm{d}t$$

$$=3a^2 t-2a^2\sin 2t+\frac{a^2}{4}\sin 4t+c.$$

由 $\sin t=\sqrt{\frac{x}{2a}}$，$\cos t=\sqrt{\frac{2a-x}{2a}}$，$\sin 2t=\sqrt{\frac{x(2a-x)}{a}}$，$\sin 4t=$

$\frac{2(a-x)\sqrt{x(2a-x)}}{a^2}$，得

$$I = 3a^2\arcsin\sqrt{x/2a} - 2a\sqrt{x(2a-x)} + \frac{a-x}{2}\sqrt{x(2a-x)} + c.$$

(3) 令 $x-a=(b-a)\sin^2 t$，有 $\mathrm{d}x = 2(b-a)\sin t\cos t\mathrm{d}t$，则

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$$
$$= \int\frac{1}{(b-a)\sin^2 t}\sqrt{\frac{(b-a)\sin^2 t}{(b-a)\cos^2 t}}\cdot 2(b-a)\sin t\cos t\mathrm{d}t$$
$$= 2\int\mathrm{d}t = 2t + c.$$

由 $x-a=(b-a)\sin^2 t, b-x=(b-a)\cos^2 t \Longrightarrow \tan^2 t = \frac{x-a}{b-x}$，

故 $\tan t = \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}$，于是

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = 2\arctan\sqrt{\frac{x-a}{b-x}} + c.$$

(4) $$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x} = \int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\mathrm{d}x$$
$$= \int\frac{\tan^2 x\sec^2 x+\sec^2 x}{\tan^4 x+1}\mathrm{d}x = \int\frac{\tan^2 x+1}{\tan^4 x+1}\mathrm{d}\tan x$$
$$= \int\frac{t^2+1}{t^4+1}\mathrm{d}t = \int\frac{1+1/t^2}{t^2+1/t^2}\mathrm{d}t = \int\frac{\mathrm{d}(t-1/t)}{(t-1/t)^2+2}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t-1/t}{\sqrt{2}} + c = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan^2 x-1}{\sqrt{2}\tan x} + c.$$

(5) 令 $x^n = t$，有 $\mathrm{d}x = \frac{x\mathrm{d}t}{nt}$，则

$$\int\frac{1-x^n}{x(1+x^n)}\mathrm{d}x = \int\frac{1-t}{x(1+t)}\cdot\frac{x\mathrm{d}t}{nt} = \frac{1}{n}\int\frac{1-t}{t(1+t)}\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{n}\int\left(\frac{1}{t} - \frac{2}{1+t}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{n}[\ln t - 2\ln(1+t)] + c$$

$$= \frac{1}{n}[\ln x^n - 2\ln(1 + x^n)] + c.$$

(6) 将 $\sin 2nx$ 变形为

$$\begin{aligned}\sin 2nx &= \sin 2nx - \sin 2(n-1)x + \sin 2(n-1)x \\ &\quad - \sin 2(n-2)x + \cdots + \sin 2x - \sin 0x \\ &= \sum_{k=1}^{n}[\sin 2kx - \sin(2k-2)x] \\ &= 2\sin x \sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)x,\end{aligned}$$

则 $$\int \frac{\sin 2nx}{\sin x}dx = 2\int \sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)x dx = 2\sum_{k=1}^{n}(2k-1)x dx$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{2}{2k-1}\sin(2k-1)x + c.$$

对于初学者来说，用常规方法解题比较可靠，但不一定最简单. 非常规方法如剑走偏锋，有时有很好的效果，但不易掌握.

二、分部积分法的应用

当被积函数为两类不同函数乘积时，可采用分部积分法计算不定积分. 如疑难解析中所指出的，选 u 的优先次序为“反、对、幂、三、指”，不按次序，不定积分则难以计算出.

例 15 下面的运算错在哪里?说明为什么.

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos x}{\sin x}dx &= \int \frac{d\sin x}{\sin x} = \frac{\sin x}{\sin x} - \int \sin x d\,\frac{1}{\sin x} \\ &= 1 + \int \frac{\cos x}{\sin x}dx,\end{aligned}$$

从而得 $0 = 1$.

解 整个运算过程是正确的，恰恰是结论“$0 = 1$”下错了. 因为，不定积分的等式不同于数值等式，等式 $\int \frac{\cos x}{\sin x}dx = 1 + \int \frac{\cos x}{\sin x}dx$ 表示等式两边原函数在全体意义上的相等，即在等式左边的原函数中任取一个原函数 $f(x)$ 时，等式右边的原函数中必有

一个原函数 $1+g(x)$ 与之相等，而 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是 $\int \frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x$ 的原函数. 事实上

$$\int \frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + c_1,$$

$$1 + \int \frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x = 1 + \ln|\sin x| + c_2 = \ln|\sin x| + c_1,$$

即当给定 c_1 时，总有 $c_2 = c_1 - 1$ 与之对应. 故不能用数值等式方法得出“$0=1$”.

例 16 已知 $f(x)$ 的一个原函数是 $\frac{\sin x}{x}$，证明：

$$\int xf'(x)\mathrm{d}x = \cos x - \frac{2\sin x}{x} + c.$$

证 $\int xf'(x)\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}f(x) = xf(x) - \int f(x)\mathrm{d}x,$

因为 $$f(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2},$$

所以 $$\int xf'(x)\mathrm{d}x = \frac{x\cos x - \sin x}{x} - \frac{\sin x}{x} + c$$

$$= \cos x - \frac{2\sin x}{x} + c.$$

例 17 设 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + c$，$f(x)$ 可微，且 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 存在，证明：

$$\int f^{-1}(x)\mathrm{d}x = xf^{-1}(x) - F[f^{-1}(x)] + c.$$

证 $\int f^{-1}(x)\mathrm{d}x = xf^{-1}(x) - \int x\mathrm{d}[f^{-1}(x)],$

令 $t = f^{-1}(x)$，则 $x = f(t)$，于是

$$\int f^{-1}(x)\mathrm{d}x = xf^{-1}(x) - \int f(t)\mathrm{d}t = xf^{-1}(x) - F(t) + c$$

$$= xf^{-1}(x) - F[f^{-1}(x)] + c.$$

例 18 计算下列不定积分：

(1) $\int \arctan\sqrt{x}\,dx$；　　(2) $\int \operatorname{arcsh}x\,dx$.

解　利用例 17 的结果.

(1) 令 $f^{-1}(x)=\arctan\sqrt{x}$，则 $x=\tan^2 t$，于是

$$\begin{aligned}\int \arctan\sqrt{x}\,dx &= x\arctan\sqrt{x}-\int \tan^2 t\,dt\\ &= x\arctan\sqrt{x}-\int(\sec^2 t-1)\,dt\\ &= x\arctan\sqrt{x}-\tan^2 t+t+c\\ &= x\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+\arctan\sqrt{x}+c\\ &= (x+1)\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+c.\end{aligned}$$

(2) 令 $f^{-1}(x)=\operatorname{arcsh}x$，则 $x=\operatorname{sh}t$，于是

$$\begin{aligned}\int \operatorname{arcsh}x\,dx &= x\operatorname{arcsh}x-\int \operatorname{sh}t\,dt = x\operatorname{arcsh}x-\operatorname{ch}t+c\\ &= x\operatorname{arcsh}x-\sqrt{1+x^2}+c.\end{aligned}$$

例 19　计算不定积分

$$\int[\ln f(x)+\ln f'(x)][f'^2(x)+f(x)f''(x)]\,dx.$$

解　原式 $=\int \ln[f(x)f'(x)]\,d[f(x)f'(x)]$

$$\begin{aligned}&= f(x)f'(x)\ln[f(x)f'(x)]\\ &\quad -\int\frac{f(x)f'(x)}{f(x)f'(x)}\,d[f(x)f'(x)]\\ &= f(x)f'(x)[\ln[f(x)f'(x)]-1]+c.\end{aligned}$$

例 20（工科硕士研究生入学试题）　计算下列不定积分：

(1) $\int\frac{\ln\sin x}{\sin^2 x}\,dx$；　　(2) $\int\frac{\arctan e^x}{e^{2x}}\,dx$；

(3) $\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}\,dx$；　　(4) $\int\frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}\,dx$.

解　(1) $\int\frac{\ln\sin x}{\sin^2 x}\,dx=-\int\ln\sin x\,d\cot x$

$$=-\cot x\ln\sin x+\int\cot^2 x\mathrm{d}x$$

$$=-\cot x\ln\sin x+\int(\csc^2 x-1)\mathrm{d}x$$

$$=-\cot x\ln\sin x-\cot x-x+c.$$

(2) $\displaystyle\int\frac{\arctan e^x}{e^{2x}}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int\arctan e^x\mathrm{d}e^{-2x}$

$$=-\frac{1}{2}\left[e^{-2x}\arctan e^x-\int\frac{\mathrm{d}x}{e^{2x}(1+e^{2x})}\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\left[e^{-2x}\arctan e^x-\int\left(\frac{1}{e^{2x}}-\frac{1}{1+e^{2x}}\right)\mathrm{d}e^x\right]$$

$$=-\frac{1}{2}(e^{-2x}\arctan e^x+e^{-x}+\arctan e^x)+c.$$

(3) $\displaystyle\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}\mathrm{d}x=\int\frac{x\mathrm{d}(e^x-1)}{\sqrt{e^x-1}}=2\int x\mathrm{d}\sqrt{e^x-1}$

$$=2\left[x\sqrt{e^x-1}-\int\sqrt{e^x-1}\mathrm{d}x\right].$$

令 $u=\sqrt{e^x-1}$，有 $\mathrm{d}x=\dfrac{2u}{1+u^2}\mathrm{d}u$，则

$$\int\sqrt{e^x-1}\mathrm{d}x=\int\frac{2u}{1+u^2}\cdot u\mathrm{d}u=2\int\frac{u^2+1-1}{1+u^2}\mathrm{d}u$$

$$=2u-2\int\frac{\mathrm{d}u}{1+u}=2u-\arctan u+c.$$

故 $$\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}\mathrm{d}x=2x\sqrt{e^x-1}-4\sqrt{e^x-1}$$

$$+4\arctan\sqrt{e^x-1}+c.$$

(4) $\displaystyle\int\frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x=\int\frac{\arctan x}{x^2}\mathrm{d}x-\int\frac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x,$

其中 $$\int\frac{\arctan x}{x^2}\mathrm{d}x=-\int\arctan x\mathrm{d}\frac{1}{x}$$

$$=-\frac{\arctan x}{x}+\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)}$$

$$=-\frac{\arctan x}{x}+\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x^2$$

$$=-\frac{\arctan x}{x}+\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2}+c_1.$$

故 $$\int\frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x=-\frac{\arctan x}{x}-\frac{1}{2}(\arctan x)^2+\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2}+c.$$

例 21(工学硕士研究生入学试题)

(1) 设 $f(\ln x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$,计算$\int f(x)\mathrm{d}x$.

(2) 设 $f(\sin^2 x)=\dfrac{x}{\sin x}$,计算$\int\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)\mathrm{d}x$.

解 需要先求出 $f(x)$,再用分部积分法计算.

(1) 设 $\ln x=t$,则 $x=\mathrm{e}^t$,$f(t)=[\ln(1+\mathrm{e}^t)]/\mathrm{e}^t$,则

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=-\int\ln(1+\mathrm{e}^x)\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x}$$

$$=-\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x)+\int\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$$

$$=-\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x)+\int\left(1+\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\right)\mathrm{d}x$$

$$=-\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x)+x-\ln(1+\mathrm{e}^x)+c.$$

(2) 设 $u=\sin^2 x$,有 $\sin x=\sqrt{u}$,$x=\arcsin\sqrt{u}$,$f(x)=\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$,则

$$\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$$

$$=-\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}(1-x)=-2\int\arcsin\sqrt{x}\,\mathrm{d}\sqrt{1-x}$$

$$=-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\int\sqrt{1-x}\frac{1}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}\sqrt{x}$$

$$=-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{x}+c.$$

例 22 计算下列不定积分：

(1) $\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\mathrm{d}x$； (2) $\int \frac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}\mathrm{d}x$.

解 这两个题的共同点是分母为某函数 $\varphi(x)$ 的平方式，可以设法将分子化为 $\varphi(x)$ 的导数形式，然后将积分变量凑成 $\varphi(x)$，再去分母. 最后用分部积分法计算.

(1) $\varphi(x)=x-\ln x, \varphi'(x)=\frac{x-1}{x}$，于是

$$\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\mathrm{d}x=\int \frac{x-\ln x-(x-1)}{(x-\ln x)^2}\mathrm{d}x$$
$$=\int \frac{\mathrm{d}x}{x-\ln x}-\int \frac{(x-1)}{(x-\ln x)^2}\mathrm{d}x$$
$$=\int \frac{\mathrm{d}x}{x-\ln x}-\int \frac{x}{(x-\ln x)^2}\mathrm{d}(x-\ln x)$$
$$=\int \frac{\mathrm{d}x}{x-\ln x}-\int x\mathrm{d}\left(\frac{1}{x-\ln x}\right)$$
$$=\int \frac{\mathrm{d}x}{x-\ln x}-\frac{x}{x-\ln x}-\int \frac{\mathrm{d}x}{x-\ln x}=\frac{x}{x-\ln x}+c.$$

(2) $\varphi(x)=x\sin x+\cos x, \varphi'(x)=x\cos x$，于是

$$\int \frac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}\mathrm{d}x=\int \frac{x}{\cos x}\frac{x\cos x\mathrm{d}x}{(x\sin x+\cos x)^2}$$
$$=\int \frac{x}{\cos x}\frac{\mathrm{d}(x\sin x+\cos x)}{(x\sin x+\cos x)^2}=-\int \frac{x}{\cos x}\mathrm{d}\left(\frac{1}{x\sin x+\cos x}\right)$$
$$=-\frac{x}{\cos x}\cdot\frac{1}{x\sin x+\cos x}+\int \frac{(\cos x+x\sin x)\mathrm{d}x}{(x\sin x+\cos x)\cos^2 x}$$
$$=-\frac{x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}+\tan x+c.$$

例 23 用分部积分法计算下列积分：

(1) $\int \frac{\arctan(1/x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$； (2) $\int x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$；

(3) $\int (2x-1)\ln x\mathrm{d}x$； (4) $\int x^2\arcsin x\mathrm{d}x$；

(5) $\int \sec^3 x\mathrm{d}x$； (6) $\int \frac{1}{x}\ln(\ln x)\mathrm{d}x$.

解 事实上，在解题过程中换元积分法与分部积分法是混合

在一起使用的，使用次数和顺序都没有限制，由读者自行确定.

(1) $$\int \frac{\arctan(1/x)}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int \frac{\arctan(1/x)}{x^2(1+1/x^2)}\mathrm{d}x$$

$$= -\int \frac{\arctan(1/x)}{1+(1/x)^2}\mathrm{d}\,\frac{1}{x} = -\int \arctan\frac{1}{x}\mathrm{d}\arctan\frac{1}{x}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\arctan\frac{1}{x}\right)^2 + c.$$

(2) $$\int x^2 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \int x^2 \mathrm{d}(-\mathrm{e}^x) = -x^2\mathrm{e}^{-x} + 2\int x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

$$= -x^2\mathrm{e}^{-x} - 2x\mathrm{e}^{-x} + 2\int \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

$$= (x^2 - 2x + 2)\mathrm{e}^{-x} + c.$$

(3) $$\int (2x-1)\ln x\mathrm{d}x = \int \ln x\mathrm{d}(x^2 - x)$$

$$= (x^2 - x)\ln x - \int (x^2 - x)\,\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

$$= (x^2 - x)\ln x - \frac{1}{2}x^2 + x + c.$$

(4) $$\int x^2 \arcsin x = \int \arcsin x\mathrm{d}\left(\frac{x^3}{3}\right)$$

$$= \frac{x^3}{3}\arcsin x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x^3}{3}\arcsin x + \frac{1}{3}\int x^2\mathrm{d}\,\sqrt{1-x^2}$$

$$= \frac{x^3}{3}\arcsin x + \frac{x^2}{3}\,\sqrt{1-x^2} + \frac{2}{9}\,\sqrt{(1-x^2)^3} + c.$$

(5) $$\int \sec^3 x\mathrm{d}x = \int \sec x\mathrm{d}\tan x = \sec x\tan x - \int \sec x\tan^2 x\mathrm{d}x$$

$$= \sec x\tan x + \int \sec x(1 - \sec^2 x)\mathrm{d}x$$

$$= \sec x\tan x + \ln|\sec x + \tan x| - \int \sec^3 x\mathrm{d}x,$$

移项后除以 2，得

$$\int \sec^3 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\sec x\tan x + \ln|\sec x + \tan x|) + c.$$

(6) $\int \frac{1}{x}\ln(\ln x)\mathrm{d}x = \ln x \cdot \ln(\ln x) - \int \ln x \cdot \frac{1/x}{\ln x}\mathrm{d}x$

$= \ln(\ln x) \cdot \ln x - \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln x \cdot \ln(\ln x) - \ln x + c$

$= \ln x[\ln(\ln x) - 1] + c.$

例 24 计算下列不定积分：

(1) $\int \sin(\ln x)\mathrm{d}x$； (2) $\int \cos(\ln x)\mathrm{d}x$.

解 此题见例 6 题(1)，是用换元积分法的"配对"法解的. 现在我们用传统的分部积分法来计算，比较哪种方法更简单.

(1) $\int \sin(\ln x)\mathrm{d}x = x\sin(\ln x) - \int x\cos(\ln x)\frac{\mathrm{d}x}{x}$

$= x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\mathrm{d}x$

$= \sin(\ln x) - x\cos(\ln x) + \int x\sin(\ln x)\frac{\mathrm{d}x}{x}$

$= x[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] - \int \sin(\ln x)\mathrm{d}x$

出现循环，移项、除以 2，可得

$$\int \sin(\ln x)\mathrm{d}x = \frac{x}{2}[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + c.$$

(2) 完全类似地，可得

$$\int \cos(\ln x)\mathrm{d}x = \frac{x}{2}[\cos(\ln x + \sin(\ln x)] + c.$$

例 25 建立以下不定积分的递推公式：

(1) $I_n = \int x^n \cos x\mathrm{d}x$； (2) $I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + a^2)^n}$；

(3) $I_n = \int \tan^n \mathrm{d}x$； (4) $I_n = \int \frac{1}{\sin^n x}\mathrm{d}x$；

(5) $I_{n,m} = \int x^n(\ln x)^m \mathrm{d}x$； (6) $I_n = \int (\arcsin x)^n \mathrm{d}x$.

解 证明递推公式，常用分部积分法. 分部积分法又可分为降幂法与升幂法，依 $\mathrm{d}v$ 的幂次降升而命名，方式是相同的.

(1) $I_n = \int x^n \mathrm{d}\sin x = x^n \sin x - n\int x^{n-1}\sin x \mathrm{d}x$

$$= x^n \sin x + n\left[x^{n-1}\cos x - (n-1)\int x^{n-2}\cos x \mathrm{d}x\right]$$

$$= x^n \sin x + n x^{n-1}\cos x - n(n-1)I_{n-1},\ n = 2,3,\cdots,$$

$$I_0 = \sin x + c, \qquad I_1 = x\sin x + \cos x + c.$$

(2) $I_n = \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2)-x^2}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}I_{n-1} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$,

而 $$\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = \frac{-1}{2(n-1)}\int x\mathrm{d}\,\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}$$

$$= \frac{-1}{2(n-1)}\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} - I_{n-1}\right],$$

故 $$I_n = \left[\frac{1}{a^2} - \frac{1}{2a^2(n-1)}\right]I_{n-1} + \frac{1}{2a^2(n-1)}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}$$

$$= \frac{2n-3}{2a^2(n-1)}I_{n-1} + \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}},$$

$$n = 2,3,\cdots,$$

$$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c.$$

(3) $I_n = \int \tan^{n-2}x(\sec^2 x - 1)\mathrm{d}x$

$$= \int \tan^{n-2}x\mathrm{d}\tan x - \int \tan^{n-2}x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x - I_{n-2},\quad n = 3,4,\cdots,$$

$$I_1 = -\ln\cos x + c,\quad I_2 = \tan x - x + c.$$

(4) $I_n = -\int \frac{\mathrm{d}\cot x}{\sin^{n-2}x} = -\frac{\cot x}{\sin^{n-2}x} - \int \frac{\cot x\cdot(n-2)\cos x}{\sin^{n-1}x}\mathrm{d}x$

$$= -\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x} - (n-2)\int \frac{\cos^2 x}{\sin^n x}\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x} - (n-2)I_n + (n-2)I_{n-2},$$

移项即得 $$I_n = \frac{1}{1-n}\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}I_{n-2}.$$

用下面方法同样可以得出

$$I_n=\int\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin^n x}\mathrm{d}x=I_{n-2}-\frac{1}{n-1}\int\cos x\mathrm{d}\,\frac{1}{\sin^{n-1}x}$$

$$=I_{n-2}-\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x}-\frac{1}{n-1}I_{n-2}$$

$$=\frac{\cos x}{(1-n)\sin^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2},$$

$$I_1=\ln\left|\tan+\frac{x}{2}\right|+c,\quad I_2=-\cot x+c.$$

(5) $$I_{n,m}=\int(\ln x)^m\mathrm{d}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{n+1}\left[x^{n+1}(\ln x)^m-m\int(\ln x)^{m-1}x^n\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{n+1}x^{n+1}(\ln x)^m-\frac{m}{n+1}I_{n,m-1},$$

$$I_{n,0}=\int x^n\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c.$$

(6) $$I_n=x(\arcsin x)^n-n\int(\arcsin x)^{n-1}\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=x(\arcsin x)^n+n\int(\arcsin x)^{n-1}\mathrm{d}\sqrt{1-x^2}$$

$$=x(\arcsin x)^n+n\sqrt{1-x^2}(\arcsin x)^{n-1}$$

$$-n\int(n-1)\arcsin^{n-2}x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$$

$$=n(\arcsin x)^n+n\sqrt{1-x^2}(\arcsin x)^{n-1}$$

$$-n(n-1)I_{n-2}.$$

例 26 用多种方法计算下列不定积分：

(1) $\int\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{4-x^2}}$.

解 同一个积分，求积的方法有很多，只要多动脑筋，定能找出一种简便的方法.

(1) **解法 1**　令 $\cot x = t, \mathrm{d}x = \dfrac{-\mathrm{d}t}{1+t^2}$，则

$$I = -\int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)(1+t^2)} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{t-1}{1+t^2} - \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{4}\ln|1+t^2| - \frac{1}{2}\arctan t - \frac{1}{2}\ln|1+t| + c.$$

解法 2　分子分母同乘以 $\cos x - \sin x$，得

$$I = \int \frac{\sin x(\cos x - \sin x)}{\cos^2 x - \sin^2 x}\mathrm{d}x = \int\left(\frac{\sin 2x}{2\cos 2x} - \frac{1-\cos 2x}{2\cos 2x}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(1 + \frac{\sin 2x}{\cos 2x} - \frac{1}{\cos 2x}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\ln|\cos 2x| - \frac{1}{4}\ln|\sec 2x + \tan 2x| + c.$$

解法 3　$I = \displaystyle\int \frac{\sin x(\cos x - \sin x)}{\cos^2 x - \sin^2 x}\mathrm{d}x$

$$= \int\left(\frac{\sin x\cos x}{2\cos^2 x - 1} - \frac{1-\cos 2x}{2\cos 2x}\right)\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}(2\cos^2 x - 1)}{2\cos^2 x - 1} - \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos 2x} + \frac{1}{2}\int\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|2\cos^2 x - 1| - \frac{1}{4}\ln|\sec 2x + \tan 2x| + \frac{x}{2} + c.$$

解法 4　$I = \displaystyle\int \frac{\sin x - \cos x + \cos x}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}x$

$$= \int \frac{-\mathrm{d}(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} + \int \frac{(\cos x + \sin x) - \sin x}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}x$$

$$= -\ln|\sin x + \cos x| + x - I,$$

移项即得.

解法 5　$I = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\displaystyle\int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}\left(令\ x - \frac{\pi}{4} = t\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\sin(t+\pi/4)}{\cos t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{\sin t + \cos t}{\cos t}\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|\cos t| + \frac{t}{2} + c.$$

解法 6 $I = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{\sin(x+\pi/4-\pi/4)\mathrm{d}x}{\sin x\cos(\pi/4)+\cos x\sin(\pi/4)}$

$$= \int \frac{\sin(x+\pi/4)-\cos(x+\pi/4)}{2\sin(x+\pi/4)}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int\left[1-\frac{\cos(x+\pi/4)}{\sin(x+\pi/4)}\right]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln|\sin(x+\pi/4)| + c.$$

解法 7 令 $\tan\frac{x}{2} = t, \mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$，则

$$I = \int\left(\frac{1+t}{1+t^2} - \frac{1-t}{1+2t-t^2}\right)\mathrm{d}t,$$

解法 8 令 $\tan x = t, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$，则

$$I = \int \frac{\tan x}{\tan x + 1}\mathrm{d}x = \int \frac{t\mathrm{d}t}{(t+1)(t^2+1)}$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(\frac{t+1}{t^2+1} - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t.$$

(2) **解法 1** 令 $x = 2\sin t, \mathrm{d}x = 2\cos t\mathrm{d}t$，则

$$I = \int \frac{2\cos t\mathrm{d}t}{2\sin t \cdot 2\cos t} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sin t} = \frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right| + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\tan\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{x}{2}\right)\right| + c.$$

解法 2 令 $\sqrt{4-x^2} = t, \mathrm{d}x = \frac{-t}{\sqrt{4-t^2}}\mathrm{d}t$，则

$$I = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-4} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + c = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{4-x^2}-2}{\sqrt{4-x^2}+2}\right| + c.$$

解法 3 令 $\sqrt{\frac{2+x}{2-x}} = t, \mathrm{d}x = \frac{8t\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}$，则

$$I=\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+c$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}\right|+c.$$

解法 4 令 $x^2=\frac{1}{t},\frac{\mathrm{d}x}{x}=-\frac{\mathrm{d}t}{2t}$，则

$$I=-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{4\sqrt{4-1/t}}=-\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2-t/4}}$$
$$=\frac{-1}{4}\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t-1/8)^2-(1/8)^2}}$$
$$=-\frac{1}{4}\ln\left|\left(t-\frac{1}{8}\right)+\sqrt{t^2-1/4}\right|+c$$
$$=-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1}{x^2}-\frac{1}{8}+\frac{\sqrt{4-x^2}}{2x^2}\right|+c.$$

解法 5 令 $\sqrt{4-x^2}=tx,2\frac{\mathrm{d}x}{x}=-\frac{2t}{1+t^2}\mathrm{d}t$，则

$$I=-\int\frac{t\mathrm{d}t}{(1+t^2)2t/\sqrt{1+t^2}}=-\frac{1}{2}\ln|t+\sqrt{1+t^2}|+c$$
$$=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}\right|+c.$$

解法 6 令 $x=\frac{1}{t}$，见例 12 题(2).

以上两个例题各有多种解法，它们的形式虽然各不相同，但可验证，其结果是同一函数的原函数. 有的解法没有完整写出，请读者自行补全.

下面介绍分段函数求不定积分的例子.

例 27 计算下列不定积分：

(1) $\int|x|\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$；　　(2) $\int\max\{1,x^2\}\mathrm{d}x$.

解 由于被积函数为分段函数，应分段计算. 再利用连续性确定任意常数与分段函数分界点的原函数.

(1) 当 $x \geqslant 0$ 时，$I = \int x e^x dx = (x-1)e^x + c_1$，

当 $x < 0$ 时，$I = \int -x e^x dx = (1-x)e^x + c_2$.

因为 $|x|e^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续，其原函数在 $(-\infty, +\infty)$ 上存在且连续，所以

$$\lim_{x \to 0^+} [(x-1)e^x + c_1] = \lim_{x \to 0^-} [(1-x)e^x + c_2],$$

即
$$-1 + c_1 = 1 + c_2 \Longrightarrow c_1 = 2 + c_2.$$

于是
$$\int |x| e^x dx = \begin{cases} (x-1)e^x + 2 + c, & x \geqslant 0, \\ (1-x)e^x + c, & x < 0. \end{cases}$$

(2) 当 $|x| \leqslant 1$ 时，$I = \int dx = x + c_1$，

当 $x > 1$ 时，$I = \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + c_2$，

当 $x < -1$ 时，$I = \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + c_3$.

因为 $\max\{1, x^2\}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续，其原函数在 $(-\infty, +\infty)$ 上存在且连续，所以

$$\lim_{x \to -1^-} \left(-\frac{1}{3}x^2 + c_3\right) = \lim_{x \to -1^+} (x + c_1),$$

$$\lim_{x \to 1^-} (x + c_1) = \lim_{x \to 1^+} \left(\frac{1}{3}x^3 + c_2\right).$$

得
$$\begin{cases} -\frac{1}{3} + c_3 = -1 + c_1, \\ \frac{1}{3} + c_2 = 1 + c_1, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_2 = \frac{2}{3} + c_1, \\ c_3 = -\frac{2}{3} + c_1. \end{cases}$$

所以
$$\int \max\{1, x^2\} dx = \begin{cases} x + c, & |x| \leqslant 1, \\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3} + c, & x < -1, \\ \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3} + c, & x > 1. \end{cases}$$

例 28 利用化二次三项式为正则型来计算下列不定积分：

(1) $\int \frac{dx}{a+bx^2}$ $(ab \neq 0)$；　　(2) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+2}}$；

(3) $\int \frac{dx}{3x^2-2x-1}$；　　(4) $\int \frac{xdx}{x^4-2x^2-1}$；

(5) $\int \frac{xdx}{x^2-2x\cos\alpha+1}$；

(6) $\int \frac{dx}{3\sin^2x-8\sin x\cos x+5\cos^2x}$.

解 (1) 当 $ab>0$ 时，有

$$\int \frac{dx}{a+bx^2} = \operatorname{sgn}a \frac{1}{\sqrt{|b|}}\int \frac{d(\sqrt{|b|}x)}{(\sqrt{|a|})^2+(\sqrt{|b|}x)^2}$$

$$= \operatorname{sgn}a \frac{1}{\sqrt{ab}}\arctan\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right)+c;$$

当 $ab<0$ 时，有

$$\int \frac{dx}{a+bx^2} = \operatorname{sgn}a\int \frac{dx}{|a|-|b|x^2}$$

$$= \operatorname{sgn}a \frac{1}{\sqrt{|b|}}\int \frac{d(\sqrt{|b|}x)}{(\sqrt{|a|})^2-(\sqrt{|b|}x)^2}$$

$$= \frac{\operatorname{sgn}a}{\sqrt{-ab}}\ln\left|\frac{\sqrt{|a|}+x\sqrt{|b|}}{\sqrt{|a|}-x\sqrt{|b|}}\right|+c.$$

(2) $$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1/4)^2+(\sqrt{15}/4)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(x-\frac{1}{4}+\sqrt{x^2-x/2+1}\right)+c.$$

(3) $$\int \frac{dx}{3x^2-2x-1} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2-2x/3-1/3}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{d(x-1/3)}{(x-1/3)^2-(2/3)^2}$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\ln\left|\frac{2/3+(x-1/3)}{2/3-(x-1/3)}\right|+c_1$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{3x+1}\right| + c.$$

(4) $$\int \frac{x\mathrm{d}x}{x^4 - 2x^2 - 1} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2-1)}{(x^2-1)^2 - (\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-(\sqrt{2}+1)}{x^2+(\sqrt{2}-1)}\right| + c.$$

(5) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 2x\cos a + 1} = \int \frac{x - \cos a + \cos a}{(x-\cos a)^2 + \sin^2 a}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}[(x-\cos a)^2 + \sin^2 a]}{(x-\cos a)^2 + \sin^2 a}$$

$$+ \cos a\int \frac{\mathrm{d}(x-\cos a)}{(x-\cos a)^2+\sin^2 a}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2 - 2x\cos a + 1) + \cot a\arctan\left(\frac{x-\cos a}{\sin a}\right) + c,$$

$$a \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

(6) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{3\sin^2 x - 8\sin x\cos x + 5\cos^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}(\tan x)}{3\tan^2 x - 8\tan x + 5}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}(\tan x - 4/3)}{(\tan x - 4/3)^2 - (1/3)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1/3 - (\tan x - 4/3)}{1/3 + (\tan x - 4/3)}\right| + c_1$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{3\sin x - 5\cos x}{\sin x - \cos x}\right| + c.$$

第三节　有理函数与无理函数的不定积分

主要内容

1. 由两个多项式函数的商所表示的函数称为有理函数，其一般表示形式为

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m},$$
其中 n,m 为正整数，$a_0,a_1,\cdots,a_n$ 和 $b_0,b_1,\cdots,b_m$ 为常数，$a_0\neq 0,b_0\neq 0$.

可以用待定系数法或赋值法将有理真分式分解为部分分式.有理真分式的积分可归结为两种形式的积分：

(1) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^n}=\begin{cases}\ln|x-a|+c, & n=1,\\ \dfrac{1}{(1-n)(x-a)^{n-1}}+c, & n>1;\end{cases}$

(2) $\displaystyle\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x=A\int\frac{t\mathrm{d}t}{(t^2+r^2)^n}+B\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+r^2)^n},$

其中 $t=x+\dfrac{p}{2}$.

当 $n=1$ 时，有
$$\begin{cases}\displaystyle\int\frac{t}{t^2+r^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\ln(t^2+r^2)+c,\\ \displaystyle\int\frac{1}{t^2+r^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{r}\arctan\frac{t}{r}+c.\end{cases}$$

当 $n>1$ 时，有
$$\begin{cases}\displaystyle\int\frac{t\mathrm{d}t}{(t^2+r^2)^n}=\frac{1}{2(1-n)(t^2+r^2)^{n-1}}+c,\\ \displaystyle\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+r^2)^n}=\frac{2n-3}{2r^2(n-1)}I_{n-1}+\frac{t}{2r^2(n-1)(t^2+r^2)^{n-1}}.\end{cases}$$

2. 关于 $\sin x,\cos x$ 的有理式的不定积分 $\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$ 称为三角函数有理式的不定积分.

(1) 常用代换有万能代换(半角代换). 令 $\tan\dfrac{x}{2}=t$，则
$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \mathrm{d}x=\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

(2) 若等式 $R(-\sin x,\cos x)\equiv -R(\sin x,\cos x)$

或 $R(\sin x,-\cos x)\equiv -R(\sin x,\cos x)$

成立，可利用代换 $\cos x=t$ 或 $\sin x=t$ 计算积分.

(3) 若等式 $R(-\sin x, -\cos x) \equiv R(\sin x, \cos x)$ 成立，可利用代换 $\tan x = t$ 计算积分.

但有时利用三角函数关系式和换元积分法过程可能更加简捷. 因此，在选择解题方法时，务须认真思考.

3. 无理函数的积分

(1) $\int R\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x$ 型积分，其中 $n > 1, ad - bc \neq 0$. 一般令 $t = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ 即可化为 t 的有理函数的积分，利用有理函数积分法计算积分.

(2) $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\mathrm{d}x$ 型积分，其中 a,b,c 满足条件：$a > 0$ 时，$b^2 - 4ac \neq 0$；$a < 0$ 时，$b^2 - 4ac > 0$. 一般令 $u = x + \dfrac{b}{2a}$，$k = \sqrt{|(4ac-b^2)/(4a^2)|}$，则二次三项式 ax^2+bx+c 化为 $|a|(u^2+k^2)$，$|a|(u^2-k^2)$，$|a|(k^2-u^2)$. 积分化为

$$\int R(u, \sqrt{u^2+k^2})\mathrm{d}u,\quad \int R(u, \sqrt{u^2-k^2})\mathrm{d}u,$$

$$\int R(u, \sqrt{k^2-u^2})\mathrm{d}u,$$

分别令 $u = k\tan t, u = k\sec t, u = k\sin t$，代换后化为三角函数有理式的积分来计算.

(3) 欧拉代换　对二次三项式 ax^2+bx+c，有三种类型的欧拉代换.

第一种类型：若 $a > 0$，令 $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}\,x + z$；

第二种类型：若 $c > 0$，令 $\sqrt{ax^2+bx+c} = xz \pm \sqrt{c}$；

第三种类型：$\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = z(x-x_1)$.

4. 二项微分式 $\int x^m(a+bx^n)^p\mathrm{d}x$，在以下三种情形可化为有理函数的积分（契比雪夫定理）：

(1) p 为整数，令 $x = z^N$，其中 N 为分数 m 和 n 的公分母；

(2) $\dfrac{m+1}{n}$ 为整数，令 $a + bx^n = z^N$，其中 N 为分数 p 的分母；

(3) $\dfrac{m+1}{n} + p$ 为整数，令 $ax^{-n} + b = z^N$，其中 N 为分数 p 的分母.

还有其它一些代换，依具体情形确定.

疑 难 解 析

1. 在分解真分式为部分分式时，如何选择分解的方法？

答 分解真分式为部分分式常用待定系数法和赋值法. 一般来说，待定系数法比较麻烦，费时间，又容易出错，但适合一切形式的真分式. 如

$$R(x) = \frac{3x^4 + x^3 + 4x^2 + 1}{x^5 + 2x^3 + x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 1)^2}.$$

其中 A, B, C, D, E 为待定常数.

将上式右边通分后，得一恒等式

$$3x^4 + x^3 + 4x^2 + 1$$
$$= (A + B)x^4 + Cx^3 + (2A + B + D)x^2 + (C + E)x + A$$

比较同次幂系数建立方程组，解方程组得

$$A = 1, \quad B = 2, \quad C = 1, \quad D = 0, \quad E = -1,$$

于是
$$R(x) = \frac{3x^4 + x^3 + 4x^2 + 1}{x^5 + 2x^3 + x} = \frac{1}{x} + \frac{2x + 1}{x^2 + 1} - \frac{1}{(x^2 + 1)^2}.$$

赋值法比较简单，但有一定条件限制. 当有理分式分母有实根或者分母有虚根(但是为重根)时，可用赋值法.

上例的分母有实根 $x = 0$，有二重虚根 $\pm \mathrm{i}$，恒等式可写为

$$3x^4 + x^3 + 4x^2 + 1$$
$$= A(x^2+1)^2 + x(Bx+C)(x^2+1) + x(Dx+E).$$

令 $x = 0$，得 $1 = A$；

令 $x = \mathrm{i}$，得 $-\mathrm{i} = -D + E\mathrm{i} \Rightarrow D = 0, E = -1$；

令 $x = 1$，得 $9 = 2(B+C) - 3 \Rightarrow B + C = 3$；

令 $x = -1$，得 $7 = 2(B-C) + 5 \Rightarrow B - C = 1$.

解得
$$\begin{cases} B + C = 3, \\ B - C = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 2, \\ C = 1, \end{cases}$$
与待定系数法有相同结果，但运算相对简单.

2. 初等函数的原函数是否还是初等函数？

答　否. 初等函数的原函数不一定是初等函数. 如 $\int \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$，$\int \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$，$\int \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 等都不表示初等函数，不能用有限形式写出.

方法、技巧与典型例题分析

一、有理函数的不定积分

形如 $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_m x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} + \cdots + b_0}$ 的函数称为有理函数，其中 m,n 为正整数或零，$a_i, b_j (i = 1,2,\cdots,n; j = 1, 2,\cdots,m)$ 为常数，且 a_m, b_m 不等于零. 有理函数为真分式时，直接用待定系数法或赋值法（见疑难解析 1）分解为部分分式，然后用前面讲过的方法计算不定积分；有理函数为假分式时，要先变形为一个多项式和一个真分式之和，再进行分解与积分. 有理真分式的积分可归结为两种形式的积分（见主要内容 1），读者应熟悉并记住它们的计算公式.

有理函数积分中的某些情形，采用换元积分法或分部积分法可能会更简便，这要由具体情形确定，请读者通过例题细细体会.

例 1　计算下列不定积分：

(1) $\int \frac{4x^3 - 13x^2 + 3x + 8}{(x+1)(x-2)(x-1)^2}dx$； (2) $\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x}dx$；

(3) $\int \frac{3x^4 + x^3 + 4x^2 + 1}{x^5 + 3x^3 + x}dx$； (4) $\int \frac{x^2}{(x^2 - 3x + 2)^2}dx$.

解 在分解真分式为部分分式时，能用赋值法分解的就不要用待定系数法. 为节省篇幅，我们将不写出分解过程.

(1) $\int \frac{4x^3 - 13x^2 + 3x + 8}{(x+1)(x-2)(x-1)^2}dx$ (用赋值法，令 $x = -1, 2, 1, 0$)

$$= \int \left[\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x-2} + \frac{5}{x-1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right]dx$$

$$= \ln\left|\frac{(x+1)(x-1)^5}{(x-2)^2}\right| + \frac{1}{x-1} + c.$$

(2) 被积函数为假分式，需先变形为

$$\frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} = x^2 + x + 4 + \frac{4x^2 - 16x - 8}{x^3 - 4x},$$

$\frac{4x^2 - 16x - 8}{x^3 - 4x} = \frac{2}{x} + \frac{5}{x-2} - \frac{3}{x+2}$ (赋值法，令 $x = 0, 2, -2$).

$$\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x}dx = \int \left(x^2 + x + 4 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x-2} - \frac{3}{x+2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4x + 2\ln|x| + 5\ln|x-2|$$

$$- 3\ln|x+2| + c.$$

(3) 因为 $\frac{3x^4 + x^3 + 4x^2 + 1}{x^5 + 2x^3 + x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 1)^2}$.

先令 $x = 0 \Longrightarrow A = 1$，再用待定系数法计算，得

$$\int \frac{3x^4 + x^3 + 4x^2 + 1}{x^5 + 2x^2 + x}dx = \int \left[\frac{1}{x} + \frac{2x + 1}{x^2 + 1} - \frac{1}{(x^2 + 1)^2}\right]dx$$

$$= \ln|x| + \ln|x^2 + 1| + \arctan x - \int \frac{x^2 + 1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}dx$$

$$= \ln|x(x^2 + 1)| + \arctan x - \left[\arctan x - \int \frac{x\,d(x^2 + 1)}{2(x^2 + 1)^2}\right]$$

$$= \ln|x(x^2 + 1)| - \frac{x}{2(x^2 + 1)} + \frac{1}{2}\arctan x + c.$$

注意 解题过程中要结合其它方法(换元积分法、分部积分

法）一起使用.

（4）注意(x^2-3x+2)不是二次质因式，故

$$\frac{x^2}{(x^2-3x+2)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-2}+\frac{D}{(x-2)^2}$$

（赋值法，令 $x=1,2,0,3$，解方程组）.

$$\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{(x^2-3x+2)^2}$$

$$=\int\left[\frac{4}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{4}{x-2}+\frac{4}{(x-2)^2}\right]\mathrm{d}x$$

$$=4\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}-4\ln|x-2|-\frac{4}{x-2}+c$$

$$=\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^4-\frac{1}{x-1}-\frac{4}{x-2}+c.$$

例 2 计算下列不定积分：

（1）$\int\frac{x-5}{x^3-3x^2-4}\mathrm{d}x$；　　（2）$\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)^2}$；

（3）$\int\frac{x\mathrm{d}x}{(x-1)(x^2+1)}$；　　（4）$\int\frac{x^2+1}{(x^2-1)(x+1)}\mathrm{d}x$.

解 （1）$\frac{x-5}{x^3-3x^2-4}=\frac{-2/3}{x+1}+\frac{2/3}{x-2}-\frac{1}{(x-2)^2}$

（令 $x=2,-1,0$）.

$$\int\frac{x-5}{x^3-3x^2-4}\mathrm{d}x=\int\left[-\frac{2/3}{x+1}+\frac{2/3}{x-2}-\frac{1}{(x-2)^2}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|-\frac{1}{x-2}+c.$$

（2）$\frac{1}{x(1+x^2)^2}=\frac{(1+x^2)-x^2}{x(1+x^2)^2}=\frac{1}{x(1+x)^2}-\frac{x}{(1+x^2)^2}$

$$=\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}-\frac{x}{(1+x^2)^2}.$$

$$\int\frac{1}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x=\int\left[\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}-\frac{x}{(1+x^2)^2}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|1+x^2|+\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}+c.$$

能以拼凑方式达到分解部分分式是一种技巧的展现，多做练

习将有助于这种技巧的掌握.

(3) $x=[(x^2+1)-(x-1)^2]/2$.

$$\int\frac{x\mathrm{d}x}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1)-(x-1)^2}{(x-1)(x^2+1)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{x-1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x-1|\int\frac{\mathrm{d}x^2}{1+x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|1+x^2|-\frac{1}{2}\arctan x+c.$$

(4) $x^2+1=x^2-x+x+1=(x-1)x+(x+1)$.

$$\int\frac{x^2+1}{(x^2-1)(x+1)}\mathrm{d}x=\int\frac{(x-1)x+(x+1)}{(x^2-1)(x+1)}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{x\mathrm{d}x}{(x+1)^2}+\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}$$

$$=\int\frac{x+1-1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$$

$$=\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x-1}\right|+c$$

$$=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\ln|x^2-1|+c.$$

例 3 计算下列不定积分:

(1) $\int\frac{(x^2+1)\mathrm{d}x}{x^4+2x^3+3x^2-2x+1}$; (2) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^3)^2}$;

(3) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$; (4) $\int\frac{x^3}{3+x}\mathrm{d}x$.

解 将被积函数变形后,用换元积分法或分部积分法计算.

(1) $\int\frac{(x^2+1)\mathrm{d}x}{x^4+2x^3+3x^2-2x+1}$

$$\xlongequal{\text{同除以 }x^2}\int\frac{(1+1/x^2)\mathrm{d}x}{x^2+2x-3-2/x+1/x^2}$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}(x-1/x)}{(x-1/x)^2+2(x-1/x)+5}$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}(x-1/x)}{(x-1/x+1)^2+4}=\frac{1}{2}\arctan\frac{x^2+x+1}{2x}+c.$$

(2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^3)^2} = \int \frac{x^2\mathrm{d}x}{x^3(1+x^3)^2}$ (令 $1+x^3=t$)

$$= \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{(t-1)t^2} = \frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{3}\left(\ln|t-1| - \ln|t| - \frac{1}{t}\right) + c$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^3}{x^3+1}\right| + \frac{1}{3(1+x^3)} + c.$$

(3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1} = \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2-1}{x^4+1}\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1+1/x^2}{x^2+1/x^2}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x+1/x)}{(x+1/x)^2-2}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x-1/x)}{(x-1/x)^2+2} - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x+1/x)}{(x+1/x)^2-2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1} + c.$$

(4) $\int \frac{x^3}{3+x}\mathrm{d}x = \int \frac{x^3+27+21}{x+3}\mathrm{d}x$

$$= \int (x^2-3x+9)\mathrm{d}x - 27\int \frac{\mathrm{d}(x+3)}{x+3}$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 9x - 27\ln|x+3| + c.$$

例 4 计算下列不定积分：

(1) $\int \frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2}\mathrm{d}x$；

(2) $\int \frac{3x^2-9}{(x^2-x-2)(x^2-2x+5)^2}\mathrm{d}x$；

(3) $\int \frac{x+5}{x^2-6x+13}\mathrm{d}x$； (4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+8)^2}$.

解 (1) $\int \frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int \frac{(2x+2)+4/3}{(x^2+2x+2)^2}\mathrm{d}x$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+2x+2)}{(x^2+2x+2)^2} + 2\int \frac{\mathrm{d}(x+1)}{[(x+1)^2+1]^2}$$

$$= -\frac{3}{2}\,\frac{1}{x^2+2x+2}$$

$$+2\left[\frac{x+1}{2(x^2+2x+2)}+\frac{1}{2}\arctan(x+1)\right]+c$$

$$=\frac{2x-1}{2(x^2+2x+2)}+\arctan(x+1)+c.$$

(2) $\displaystyle\int\frac{(3x^2-9)dx}{(x^2-x-2)(x^2-2x+5)^2}$

$$=\int\frac{(3x^2-9)dx}{(x+1)(x-2)(x^2-2x+5)^2}$$

$$=\int\left[\frac{1}{32(x+1)}+\frac{1}{25(x-2)}-\frac{57x-75}{800(x^2-2x+5)}-\frac{9x-75}{20(x^2-2x+5)^2}\right]dx,$$

其中 $\displaystyle\int\frac{57x-75}{x^2-2x+5}dx=\int\frac{57(x-1)-18}{(x-1)^2+4}dx$

$$=\frac{57}{2}\ln|x^2-2x+5|-9\arctan\frac{x-1}{2}+c_1,$$

$$\int\frac{9x-75}{(x^2-2x+5)^2}dx$$

$$=\frac{9}{2}\int\frac{d(x^2-2x+5)}{(x^2-2x+5)^2}-66\int\frac{d(x-1)}{[(x-1)^2+4]^2}$$

$$=-\frac{9}{2}\frac{1}{x^2-2x+5}-\frac{33}{4}\left[\frac{x-1}{x^2-2x+5}+\int\frac{d(x-1)}{(x-1)^2+4}\right]$$

$$=\frac{15-33x}{4(x^2-2x+5)}-\frac{33}{8}\arctan\frac{x-1}{2}+c_2,$$

故 $\displaystyle\int\frac{(3x^2-9)dx}{(x^2-x-2)(x^2-2x+5)^2}$

$$=\frac{1}{32}\ln|x+1|+\frac{1}{25}\ln|x-2|-\frac{57}{1600}\ln|x^2-2x+5|$$

$$+\frac{33x-15}{80(x^2-2x+5)}+\frac{87}{400}\text{atctan}\frac{x-1}{2}+c.$$

(3) $\displaystyle\int\frac{x+5}{x^2-6x+13}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(2x-6)+16}{x^2-6x+13}dx$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2-6x+13)}{x^2-6x+13}+8\int\frac{d(x+3)}{(x-3)^2+2^2}$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x^2-6x+13|+4\arctan\frac{x-3}{2}+c.$$

(4) $\dfrac{1}{(x^2+6x+8)^2}=\left[\dfrac{(x+4)-(x+2)}{2(x+4)(x+2)}\right]^2$

$=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+4}\right)^2$

$=\dfrac{1}{4}\left[\dfrac{1}{(x+2)^2}+\dfrac{1}{(x+4)^2}-\dfrac{1}{(x+2)(x+4)}\right]$

$=\dfrac{1}{4}\left[\dfrac{1}{(x+2)^2}+\dfrac{1}{(x+4)^2}+\dfrac{1}{x+4}-\dfrac{1}{x-2}\right],$

故 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+6x+8)^2}$

$\displaystyle=\frac{1}{4}\int\left[\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{(x+4)^2}+\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x-2}\right]\mathrm{d}x$

$\displaystyle=\frac{1}{4}\left[\ln\left|\frac{x+4}{x+2}\right|-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}\right]+c.$

例 5 计算下列不定积分：

(1) $\displaystyle\int\frac{x^{11}\mathrm{d}x}{x^8+3x^4+2}$；　　(2) $\displaystyle\int\frac{x^7}{(1-x^2)^5}\mathrm{d}x$；

(3) $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x$；　　(4) $\displaystyle\int\frac{x^2-1}{x^4+x^3+x^2+x+1}\mathrm{d}x$.

解 利用变形和代换求解更为简便.

(1) 令 $x^4=t$,则

$$\int\frac{x^{11}\mathrm{d}x}{x^8+3x^4+2}=\int\frac{x^8\mathrm{d}x^4}{4(x^8+3x^4+2)}$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{t^2\mathrm{d}t}{t^2+3t+2}=\frac{1}{4}\int\left[1+\frac{1}{t+1}-\frac{4}{t+2}\right]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{4}[t+\ln|t+1|-4\ln|t+2|]+c$$

$$=\frac{1}{4}[x^4+\ln|1+x^4|-4\ln|2+x^4|]+c.$$

(2) 令 $1-x^2=t, x^2=1-t$,则

$$\int\frac{x^7\mathrm{d}x}{(1-x^2)^5}=-\frac{1}{2}\int\frac{(1-t)^3}{t^5}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t^2}-\frac{3}{t^3}+\frac{3}{t^4}-\frac{1}{t^5}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{(1-x^2)}+\frac{3}{2(1-x^2)^2}-\frac{1}{(1-x^2)^3}+\frac{1}{4(1-x^2)^4}\right]+c.$$

(3) $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = \int \frac{1+1/x^2}{x^2+1/x^2}dx = \int \frac{d(x-1/x)}{(x-1/x)^2+2}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x} + c.$

(4) $\int \frac{(x^2-1)dx}{x^4+x^3+x^2+x+1} = \int \frac{(1-1/x^2)dx}{(x^2+1/x^2)+(x+1/x)+1}$

$= \int \frac{d(x+1/x)}{(x+1/x)^2+(x+1/x)-1}$

$= \int \frac{d(x+1/x+1/2)}{[(x+1/x)+1/2]^2-5/4}$

$= \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\frac{x+1/x+1/2-\sqrt{5}/2}{x+1/x+1/2+\sqrt{5}/2} + c$

$= \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\frac{2x^2+(1-\sqrt{5})x+2}{2x^2+(1+\sqrt{5})x+2} + c.$

二、三角函数有理式的不定积分

三角函数有理式的不定积分也有多种不同的计算方法.一般来说,若能利用三角函数的关系式或凑微分法来计算,会相对简单一些.而用万能代换、正切代换时,计算相对麻烦一些.因此,要逐步掌握选取计算量最小的方法,尽量少用万能代换来计算.

例 6 用万能代换计算下列不定积分:

(1) $\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx$; (2) $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$;

(3) $\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}dx$; (4) $\int \frac{\sin^3 x dx}{(1+\cos x-\sin x)^4}$.

解 万能代换即半角代换,令 $\tan\frac{x}{2}=t$, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$.

(1) $\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx = 4\int \frac{t}{(1+t)^2}\frac{1}{1+t^2}dt$

$= 4\int\left[-\frac{1}{2(1+t)^2}+\frac{1}{2(1+t)^2}\right]dt$

$= \frac{2}{1+t} + \arctan t + c$

$$= \frac{2}{1 + \tan x/2} + 2\arctan\left(\tan\frac{x}{2}\right) + c$$

$$= \frac{2}{1 + \tan x/2} + x + c.$$

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \cos x + \sin x} = \int \frac{2dt/(1+t^2)}{1 + 2t/(1+t^2) + (1-t^2)/(1+t^2)}$

$$= \int \frac{dt}{1+t} = \ln|1+t| + c = \ln\left|1 + \tan\frac{x}{2}\right| + c.$$

(3) $\displaystyle\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}dx = \int \frac{2\sin^2(x/2)}{2\cos^2(x/2)}dx = \int \tan^2\frac{x}{2}dx$

$$= \int\left(\sec^2\frac{x}{2} - 1\right)dx = 2\tan\frac{x}{2} - x + c.$$

上述解法实际上并未用万能代换. 若令 $\tan\frac{x}{2} = t$,则

$$\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}dx = \int \frac{2t^2}{1+t^2}dt = 2\int \frac{t^2+1-1}{1+t^2}dt$$

$$= 2\int\left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt = 2t - 2\arctan t + c$$

$$= 2\tan\frac{x}{2} - 2\arctan\left(\tan\frac{x}{2}\right) + c = 2\tan\frac{x}{2} - x + c.$$

(4) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x dx}{(1 + \cos x - \sin x)^4}$

$$= \int \frac{[2\sin(x/2)\cdot\cos(x/2)]^3 dx}{[2\cos^2(x/2) - 2\sin(x/2)\cos(x/2)]}$$

$$= \int \frac{\tan^3(x/2)dx}{2[1 - \tan(x/2)]^4\cos^2(x/2)}\left(令 \tan\frac{x}{2} = t\right)$$

$$= \int \frac{t^3 dt}{(1-t)^4} = \int \frac{[(t-1)+1]^3}{(t-1)^4}dt$$

$$= \int\left[\frac{1}{t-1} + \frac{3}{(t-1)^2} + \frac{3}{(t-1)^3} + \frac{1}{(t-1)^4}\right]dt$$

$$= \ln|t-1| - \frac{3}{t-1} - \frac{3}{2(t-1)^2} - \frac{1}{3(t-1)^3} + c$$

$$= \ln\left|\tan\frac{x}{2} - 1\right| - \frac{3}{\tan(x/2) - 1} - \frac{3}{2[\tan(x/2) - 1]^2}$$

$$- \frac{1}{3[\tan(x/2) - 1]^3} + c.$$

例 7 计算下列不定积分：

(1) $\int \frac{dx}{1+\cos x+\sin x}$；　　(2) $\int \sqrt{1+\sin x}dx$；

(3) $\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^4 x}$；　　(4) $\int \frac{\tan x dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$.

解 (1) 此题即例 6 题(2)，利用三角函数关系式，有

$$\int \frac{dx}{1+\cos x+\sin x}=\int \frac{dx}{2\sin(x/2)\cos(x/2)+2\cos^2(x/2)}$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos^2(x/2)[1+\tan(x/2)]}=\int \frac{d\tan(x/2)}{1+\tan(x/2)}$$

$$=\ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|+c.$$

(2) $\int \sqrt{1+\sin x}dx$

$$=\int \sqrt{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx$$

$$=\int \sqrt{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2}dx=\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)dx$$

$$=-2\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}+c.$$

(3) $\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^4 x}=16\int \csc^2 2x\left(-\frac{1}{2}\right)d\cot 2x$

$$=-8\int(1+\cot^2 2x)d\cot 2x$$

$$=-\cot 2x-\frac{8}{3}(\cot 2x)^3+c.$$

(4) $\int \frac{\tan x dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}=\int \frac{\tan x}{a^2\tan^2 x+b^2}d\tan x$

$$=\frac{1}{2a^2}\int \frac{d(a^2\tan^2 x+b^2)}{a^2\tan^2 x+b^2}=\frac{1}{2a^2}\ln(a^2\tan^2 x+b^2)+c.$$

例 8 计算下列不定积分：

(1) $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}}$；　　(2) $\int \frac{\cos^2 x-\sin x}{\cos x(1+\cos x e^{\sin x})}dx$；

(3) $\int \frac{\sin x}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx$；　　(4) $\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$.

解 (1) 因为

$$(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x)' = a^2 2\cos x(-\sin x) + 2b^2\sin x\cos x$$
$$= (b^2 - a^2)\sin 2x,$$

所以 $$\int \frac{\sin 2x\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}} = \int \frac{1}{b^2 - a^2} \frac{\mathrm{d}(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x)}{\sqrt{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}}$$
$$= \frac{1}{b^2 - a^2} \sqrt{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} + c.$$

(2) 因为

$$(\cos x\mathrm{e}^{\sin x})' = -\sin x\mathrm{e}^{\sin x} + \cos^2 x\mathrm{e}^{\sin x} = \mathrm{e}^{\sin x}(\cos^2 x - \sin x),$$

再将分子、分母同乘以 $\mathrm{e}^{\sin x}$,得

$$\int \frac{\cos^2 x - \sin x}{\cos x(1 + \cos x\mathrm{e}^{\sin x})}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(\cos x\mathrm{e}^{\sin x})}{\cos x\mathrm{e}^{\sin x}(1 + \cos x\mathrm{e}^{\sin x})}$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}t}{t(1 + t)} = \int\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1 + t}\right)\mathrm{d}t = \ln\left|\frac{t}{1 + t}\right| + c$$
$$= \ln\left|\frac{\cos x\mathrm{e}^{\sin x}}{1 + \cos x\mathrm{e}^{\sin x}}\right| + c.$$

(3) $$\int \frac{\sin x\mathrm{d}x}{\sin^3 x + \cos^3 x} = \int \frac{\tan x\mathrm{d}x}{(1 + \tan^3 x)\cos^2 x} = \int \frac{\tan x\mathrm{d}\tan x}{1 + \tan^3 x}$$
$$\xlongequal{\tan x = t} \int \frac{t}{1 + t^3}\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int \frac{(t + 1)^2 - (t^2 - t + 1)}{(t + 1)(t^2 - t + 1)}\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{3}\int \frac{t + 1}{t^2 - t + 1}\mathrm{d}t - \frac{1}{3}\int \frac{1}{t + 1}\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{6}\int \frac{2t - 1 + 3}{t^2 - t + 1} + \frac{3}{3}\int \frac{\mathrm{d}(t - 1/2)}{(t - 1/2)^2 + 3/4}$$
$$- \frac{1}{3}\ln|t + 1|$$
$$= \frac{1}{6}\ln|t^2 - t + 1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t - 1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\ln|t + 1|$$
$$= \frac{1}{6}\ln|\tan^2 x - \tan x + 1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan x - 1}{\sqrt{3}}$$
$$- \frac{1}{3}\ln|\tan x + 1| + c.$$

(4) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{(2 + \cos x)\sin x} = \frac{1}{3}\int\left[\frac{\sin x}{2 + \cos x} - \frac{2 - \cos x}{\sin x}\right]\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}\cos x}{2+\cos x} + \frac{2}{3}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x} - \frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}\sin x}{\sin x}$$

$$= \frac{1}{3}[\ln|2+\cos x| + 2\ln|\csc x - \cot x| - \ln|\sin x|] + c.$$

例 9 计算下列不定积分：

(1) $\int\frac{\mathrm{d}x}{2+\tan^2 x}$；　　(2) $\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$；

(3) $\int\frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}\mathrm{d}x$；　　(4) $\int\frac{\tan x}{\sqrt{\cos x}}\mathrm{d}x$.

解 (1) $\int\frac{\mathrm{d}x}{2+\tan^2 x} = \int\frac{\cos^2 x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int\frac{1+\cos^2 x - 1}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$

$$= x - \int\frac{\mathrm{d}\tan x}{2+\tan^2 x} = x - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}} + c.$$

(2) $\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \int\frac{2\sin(x/2)\cos(x/2)+1}{2\cos^2(x/2)}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

$$= \int\left[\tan\frac{x}{2} + \left(\tan\frac{x}{2}\right)'\right]\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \int\mathrm{d}\left[\mathrm{e}^x\tan\frac{x}{2}\right]$$

$$= \mathrm{e}^x\tan\frac{x}{2} + c.$$

此题使用了在第二节例 4 题(3) 中的方法.

(3) $\int\frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}\mathrm{d}x \xlongequal{\sin x = t} \int\frac{t\mathrm{d}t}{1+t^4} = \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t^2}{1+(t^2)^2}$

$$= \frac{1}{2}\arctan t^2 + c = \frac{1}{2}\arctan(\sin^2 x) + c.$$

(4) $\int\frac{\tan x}{\sqrt{\cos x}}\mathrm{d}x \xlongequal{\cos x = t} \int\frac{\sin x}{(\cos x)^{3/2}}\mathrm{d}x = -\int\frac{\mathrm{d}\cos x}{(\cos x)^{3/2}}$

$$= 2(\cos x)^{1/2} + c = \frac{2}{\sqrt{\cos x}} + c.$$

本例题(3)、题(4) 选择代换 $\sin x = t$，$\cos x = t$ 的理由请阅读本节主要内容 2 中的(2).

例 10 计算下列不定积分：

(1) $\int\sqrt{\sin 2x}\cos x\mathrm{d}x$；　　(2) $\int\sin^2 x\cos^4 x\mathrm{d}x$.

解 (1) 令 $\sqrt{\tan x}=t$. 因为

$$\sqrt{\sin 2x \cos x}=\sqrt{2}\ \sqrt{\sin x}(\cos^3 x)^{3/2},$$

而 $\mathrm{d}t=\mathrm{d}\ \sqrt{\tan x}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\sin x}(\cos x)^{3/2}}$, 所以

$$\sqrt{\sin 2x\cos x}\mathrm{d}x=2\sqrt{2}\ \frac{\sin x}{\cos x}\cos^4 x\mathrm{d}\ \sqrt{\tan x}$$

$$=2\sqrt{2}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)\cdot\frac{1}{\sec^4 x}\mathrm{d}\ \sqrt{\tan x}=2\sqrt{2}\tan^2 x\frac{\mathrm{d}\ \sqrt{\tan x}}{(1+\tan^2 x)^2}.$$

故 $$\int\sqrt{\sin 2x\cos x}\mathrm{d}x=2\sqrt{2}\int\frac{t^2\mathrm{d}t}{(1+t^4)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{4t^3\mathrm{d}t}{t(1+t^4)^2}$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{2}}\int\frac{1}{t}\mathrm{d}\frac{1}{1+t^4}=\frac{-1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{t(1+t^4)}+\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2(1+t^4)}\right]$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{t(1+t^4)}+\int\left(\frac{1}{t^2}-\frac{t^2}{1+t^4}\right)\right]\mathrm{d}t,$$

而 $$\int\frac{t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t=\int\frac{1}{2}\frac{(t^2+1)+(t^2-1)}{1+t^4}\mathrm{d}t\text{(见例 5(3))}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\arctan\frac{t^2-1}{\sqrt{2}t}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t^2-\sqrt{2}t+1}{t^2+\sqrt{2}t+1}\right|\right]+c_1,$$

所以 $$\int\sqrt{\sin 2x\cos x}\mathrm{d}x=\frac{t^3}{\sqrt{2}(1+t^4)}+\frac{1}{4}\arctan\frac{t^2-1}{\sqrt{2}t}$$

$$+\frac{1}{8}\ln\left|\frac{t^2-\sqrt{2}t+1}{t^2+\sqrt{2}t+1}\right|+c$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(\tan x)^{3/2}}{\sec^2 x}+\frac{1}{4}\arctan\frac{\tan x-1}{\sqrt{2\tan x}}$$

$$+\frac{1}{8}\ln\left|\frac{\tan x-\sqrt{2\mathrm{tna} x}+1}{\tan x+\sqrt{2\tan x}+1}\right|+c.$$

(2) 因为

$$\sin^2 x\cos^4 x=\frac{1}{4}(2\sin x\cos x)^2\cos^2 x=\frac{1}{8}\sin^2 2x(1+\cos 2x)$$

$$=\frac{1}{16}(1-\cos 4x)+\frac{1}{8}\sin^2 2x\cos 2x,$$

所以

$$\int \sin^2 x\cos^4 x\mathrm{d}x = \frac{1}{16}\int(1-\cos 4x)\mathrm{d}x + \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\cos 2x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x}{16} - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + c.$$

例 11 建立递推公式 $I_m = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^m x}$ $(m > 2, \in \mathbf{Z}^+)$

解 $I_m = -\int \frac{1}{(\sin x)^{m-2}}\mathrm{d}\cot x$

$$= -\frac{\cot x}{(\sin x)^{m-2}} - (m-2)\int \cot x\,\frac{\cos x}{(\sin x)^{m-1}}\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{\cot x}{(\sin x)^{m-2}} - (m-2)\int \frac{1-\sin^2 x}{(\sin x)^{m}}\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{\cot x}{(\sin x)^{m-2}} - (m-2)\left[\int \frac{\mathrm{d}x}{(\sin x)^m} - \int \frac{\mathrm{d}x}{(\sin x)^{m-2}}\right]$$

$$= -\frac{\cot x}{(\sin x)^{m-2}} - (m-2)I_m + (m-2)I_{m-2},$$

则 $$I_m = -\frac{\cos x}{(m-1)(\sin x)^{m-1}} + \frac{m-2}{m-1}I_{m-2} \quad (m > 2).$$

三、无理函数的不定积分

一般无理函数的根式代换，读者可参看第二节例 9、例 14. 事实上，三角代换、双曲代换也是对无理函数的不定积分的代换形式. 下面再请读者观察、分析一些问题.

例 12 计算下列不定积分：

(1) $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2+x^4}}$；　　(2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^{14}-x^2}}$；

(3) $\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}\mathrm{d}x$；　　(4) $\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

解 (1) 将被积函数变形后进行代换

$$\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2+x^4}}$$

$$= \operatorname{sgn}x\int \frac{(1-1/x^2)\mathrm{d}x}{(x+1/x)\sqrt{(x+1/x)^2-1}}$$

$$= \operatorname{sgn}x \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}} = \operatorname{sgn}x \int \frac{-d(1/t)}{\sqrt{1-(1/t)^2}} \operatorname{sgn}t$$

$$= \int \frac{-d(1/t)}{\sqrt{1-(1/t)^2}} = -\arcsin\frac{1}{t} + c = -\arcsin\frac{x}{1+x^2} + c.$$

(2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^{14}-x^2}} = \int \frac{dx}{x^7\sqrt{1-x^{-12}}} = \frac{-1}{6}\int \frac{d(x^{-6})}{\sqrt{1-(x^{-6})^2}}$

$$= -\frac{1}{6}\arcsin\left(\frac{1}{x^6}\right) + c.$$

(3) $\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}dx = \int \frac{x^{1/2}}{\sqrt{1-x^{3/2}}}dx = \frac{2}{3}\int \frac{dx^{3/2}}{\sqrt{1-x^{3/2}}}$

$$= -\frac{4}{3}\sqrt{1-x^{3/2}} + c = -\frac{4}{3}\sqrt{1-x\sqrt{x}} + c.$$

(4) $\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}dx = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} + \int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{(x^2+2)}}.$

而 $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} = \ln|x+\sqrt{x^2+2}| + c_1,$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}} = \int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{(x^2+1)+1}}$$

$$\xlongequal{x=\sqrt{2}\tan t} \int \frac{\sqrt{2}\sec^2 t dt}{(2\tan^2 t+1)\sqrt{2\tan^2 t+2}} = \int \frac{\cos t}{2\sin^2 t+\cos^2 t}dt$$

$$= \int \frac{d\sin t}{1+\sin^2 t} = \arctan(\sin t) + c_1$$

$$= \arctan\frac{x}{\sqrt{x^2+2}} + c_2,$$

故 $$I = \ln|x+\sqrt{x^2+2}| + \arctan\frac{x}{\sqrt{x^2+2}} + c.$$

例 13 计算下列不定积分：

(1) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}$； (2) $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx$；

(3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}}$； (4) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$.

解 (1) 观察被积函数，提出分母公因式，得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}} = \int \frac{\mathrm{d}(1+x^2)/2}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}$$

$$\xlongequal{\sqrt{1+x^2}=t} \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t^2}{t\sqrt{1+t}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t}} = 2\int \mathrm{d}\sqrt{1+t}$$

$$= 2\sqrt{1+t} + c = \sqrt{1+\sqrt{1+x^2}} + c.$$

(2) 先用分部积分法，再用倒代换，得

$$\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\mathrm{d}x = x \cdot \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} - \int x \cdot \frac{9\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-9}}$$

$$= \sqrt{x^2-9} - \int \frac{9\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-9}} = \sqrt{x^2-9} + 3\int \frac{\mathrm{d}2t}{\sqrt{1-(3t)^2}}$$

$$= \sqrt{x^2-9} + 3\arcsin 3t + c.$$

$$= \sqrt{x^2-9} + 3\left(\frac{\pi}{2} - \arccos 3t\right) + c$$

$$= \sqrt{x^2-9} - 3\arccos\frac{3}{x} + c.$$

(3) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(4-x)}} = 2\int \frac{\mathrm{d}\sqrt{x}}{\sqrt{4-(\sqrt{x})^2}}$$

$$= 2\int \frac{\mathrm{d}(\sqrt{x}/2)}{\sqrt{1-(\sqrt{x}/2)^2}} = 2\arcsin\frac{\sqrt{x}}{2} + c.$$

(4) 令 $x = \frac{1}{t}$，$\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$，则

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}} = -\int \frac{|t|}{\sqrt{t^2+1}}\mathrm{d}t.$$

当 $x > 0$ 时，有

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(1+t^2)}{\sqrt{1+t^2}} = -\sqrt{1-t^2} + c$$

$$= -\frac{1}{x}\sqrt{1+x^2} + c,$$

当 $x < 0$ 时，有

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(1+t^2)}{\sqrt{1+t^2}} = \sqrt{1+t^2}+c$$

$$= \frac{1}{|x|}\sqrt{1+t^2}+c = -\frac{1}{x}\sqrt{1+t^2}+c.$$

所以
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{x}\sqrt{1+t^2}+c.$$

例 14 用欧拉代换计算下列不定积分：

(1) $\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2x+5}}$； (2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x-\sqrt{x^2+2x-8}}$；

(3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$； (4) $\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\mathrm{d}x$.

解 (1) 用第一类型欧拉代换. 令 $\sqrt{x^2+2x+5}=x-z$，则

$$x=\frac{z^2-5}{2(z+1)},\quad \mathrm{d}x=\frac{z^2+2z+5}{2(z+1)^2}\mathrm{d}z.$$

于是

$$\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2x+5}} = -\frac{1}{4}\int \frac{(z^2-5)^2}{(z+1)^3}\mathrm{d}z$$

$$= -\frac{1}{4}\int\left[\frac{16}{(z+1)^3}+\frac{16}{(z+1)^2}-\frac{4}{z+1}-4+(z+1)\right]\mathrm{d}t$$

$$= \frac{2}{(z+1)^2}+\frac{4}{z+1}+\ln|z+1|-\frac{z^2}{8}+\frac{3}{4}z+c$$

$$= \frac{x-3}{2}\sqrt{x^2+2x+5}+\ln|x+1-\sqrt{x^2+2x+5}|+c.$$

(2) 用第三类型欧拉代换. 令 $\sqrt{x^2+2x-8}=z(x+4)$，则

$$x=\frac{4z^2+2}{1-z^2},\quad \mathrm{d}x=\frac{12z}{(1-z^2)^2}\mathrm{d}z,$$

于是

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x-\sqrt{x^2+2x-8}} = \int \frac{z+1}{2(1-2z)}\cdot\frac{12z}{(1-z^2)^2}\mathrm{d}z$$

$$= \int \frac{6z\mathrm{d}z}{(1-2z)(z+1)(z-1)^2}$$

$$= \int\left[\frac{9}{2(z-1)}-\frac{1}{2(z+1)}-\frac{8}{2z-1}-\frac{3}{(z-1)^2}\right]\mathrm{d}z$$

$$= \frac{9}{2}\ln|z-1| - \frac{1}{2}\ln|z+1| - 4\ln|z-1| + \frac{3}{z-1} + c_1$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x+1-\sqrt{x^2+2x-8}|$$

$$+ 4\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2x-8}-x+8}{x-4}\right|$$

$$- \frac{1}{2}\ln|\sqrt{x^2+2x-8}+x| + c.$$

(3) 用第二类型欧拉代换. 令 $\sqrt{1-2x-x^2} = xz-1$,则

$$x = \frac{2(z-1)}{z^2+1}, \quad dx = \frac{2(1+2z-z^2)}{(z^2+1)^2}dz,$$

于是

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}} = \int \frac{1+2z-z^2}{z(z-1)(z^2+1)}dz$$

$$= \int\left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2+1}\right]dz = \ln\left|\frac{z-1}{z}\right| - \arctan z + c$$

$$= \ln\left|\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}-x}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}\right|$$

$$- 2\arctan(1+\sqrt{1-2x-x^2}) + c.$$

(4) 用第三类型欧拉代换. 令 $\sqrt{x^2+3x+2} = z(x+1)$,则

$$x = \frac{2-z^2}{z^2-1}, \quad dx = -\frac{2z}{(z^2-1)^2}dz,$$

于是

$$\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx = \int \frac{2z(2-z-z^2)}{(z^2-z-2)(z^2-1)^2}dz$$

$$= \int\left[\frac{-17}{108(z-1)} + \frac{5}{18(z+1)^2} + \frac{1}{3(z+1)^3} + \frac{3}{4(z-1)}\right.$$

$$\left. - \frac{16}{27(z-2)}\right]dz$$

$$= -\frac{17}{108}\ln|z+1| - \frac{5}{18}\frac{1}{(z+1)} - \frac{1}{6}\frac{1}{(z+1)^2} + \frac{3}{4}\ln|z-1|$$

$$- \frac{16}{27}\ln|z-2| + c \left(z = \frac{1}{x+1}\sqrt{x^2+3x+2}\right).$$

例 15 计算下列不定积分：

(1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}$；(2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^4+2x^2-1}}$.

解 (1) 分子分母同乘以 $-\sqrt{2}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}$，得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}$$

$$=\int \frac{\sqrt{2}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin x+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+c.$$

(2) 设 $x>0$，令 $\frac{1}{x}=\sqrt{t}$（若设 $x<0$，则令 $\frac{1}{x}=-\sqrt{t}$，结果相同），得

$$x=-\frac{\mathrm{d}t}{2t\sqrt{t}},\qquad \sqrt{x^4+2x^2-1}=\frac{\sqrt{1+2t-t^2}}{t},$$

于是 $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^4+2x^2-1}}=-\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+2t-t^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(1-t)}{\sqrt{2-(1-t)^2}}=\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1-t}{\sqrt{2}}\right)+c$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{x^2-1}{x^2\sqrt{2}}\right)+c\ \left(|x|>\sqrt{\sqrt{2}-1}\right).$$

二项微分式 $\int x^m(a+bx^n)^p\mathrm{d}x$（$m,n,p$ 为有理数）在下列三种情形可化为有理函数的积分（契比雪夫定理）：

(1) $p\in\mathbf{Z}$. 设 $x=z^N$，N 为分数 m 和 n 的公分母.

(2) $\frac{m+1}{n}\in\mathbf{Z}$. 设 $a+bx^n=z^N$，N 为分数 p 的分母.

(3) $\left(\frac{m+1}{n}+p\right)\in\mathbf{Z}$. 利用代换 $ax^{-n}+b=z^N$，N 为分数 p 的分母.

例 16 计算下列不定积分：

(1) $\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x1+\sqrt[3]{x^2}}}$；　　(2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1+x^4}}$；

(3) $\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}\mathrm{d}x$.

解 (1) $\frac{x}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}=x(1+x^{2/3})^{-1}$, $m=1$, $m=\frac{2}{3}$, $p=-\frac{1}{2}$, $\frac{m+1}{n}=3$，是二项微分式的情形(2). 可令 $1+x^{2/3}=z^2$，则有 $x=(z^2-1)^{3/2}$, $\mathrm{d}x=3z(z^2-1)^{1/2}\mathrm{d}z$，得

$$\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}=2\int(z^2-1)^2\mathrm{d}z=\frac{3}{5}z^5-2z^3+3z+c$$

$$=\frac{3}{5}\left(\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}\right)^5-2\left(\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}\right)^3+3\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}+c.$$

(2) $\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}=x^0(1+x^4)^{-1/4}$, $m=0$, $n=4$, $p=-\frac{1}{4}$, $\frac{m+1}{n}+p=0$，是二项微分式的情形(3). 可令 $x^{-4}+1=z^4$，则有 $z=\frac{1}{x}\sqrt[4]{1+x^4}$ $(z>0,x>0)$, $x=(z^4-1)^{-1/4}$, $\mathrm{d}x=-z^3$, $(z^4-1)^{-5/4}\mathrm{d}z$，得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1+x^4}}=-\int \frac{z^2}{z^4-1}\mathrm{d}z$$

$$=\int\left[\frac{1}{4(z+1)}-\frac{1}{4(z-1)}-\frac{1}{2(z^2+1)}\right]\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right|-\frac{1}{2}\arctan z+c.$$

将 $z=\frac{1}{x}\sqrt[4]{1+x^4}$ 代入即得结果.

(3) $\frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}=x^{1/2}(1+x^{1/3})^{-2}$, $m=\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{3}$, $p=-2$, p 为整数，是二项微分式的情形(1). 可令 $x=z^6$，则有 $\mathrm{d}x=$

$6z^5\mathrm{d}z$，$\sqrt{x} = z^3$，$\sqrt[3]{x} = z^2$，得

$$\int \frac{\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{(1+\sqrt[3]{x})^2} = 6\int \frac{z^3}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z$$

$$= 6\int\left[z^4 - 2z^2 + 3 + \frac{1}{(z^2-1)} - \frac{1}{z^2+1}\right]\mathrm{d}z$$

$$= \frac{6}{5}z^5 - 4z^3 + 18z - 24\arctan z + \frac{3z}{z^2+1} + 3\arctan z + c$$

$$= \frac{6}{5}x^{5/6} - 4x^{1/2} + 18x^{1/6} - 24\arctan(x^{1/6}) + \frac{3x^{1/6}}{1+x^{1/3}} + c.$$

计算$\int \frac{\mathrm{d}z}{(z^2-1)^2}$时，要用到积分

$$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^n}\quad (a \neq 0)$$

的递推公式.

由于 $4a(ax^2+bx+c) = (2ax+b)^2 + 4ac - b^2$，

即 $$b^2 - 4ac = (2ax+b)^2 - 4a(ax^2+bx+c),$$

故 $$I_n = \frac{1}{b^2-4ac}\left[\int \frac{(2ax+b)^2\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^n} - \int \frac{4a\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}\right]$$

$$= \frac{1}{b^2-4ac}\left[(2ax+b)\cdot\frac{-1}{(n-1)(ax^2+bx+c)^{n-1}}\right.$$

$$\left.+\frac{2a}{n-1}\int\frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}\right]$$

$$-\frac{4a}{b^2-4ac}\int\frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}$$

$$= \frac{2ax+b}{(n-1)(4ac-b^2)(ax^2+bx+c)^{n-1}}$$

$$-\frac{2(2n-3)a}{(n-1)(b^2-4ac)}I_{n-2}.$$

第六章　定积分及其应用

第一节　定积分概念与可积条件

主要内容

1. 分割　在闭区间$[a,b]$内任取$n-1$个点

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_m=b,$$

把$[a,b]$分为n个小的闭区间$[x_{i-1},x_i]$,小区间长度

$$\Delta x_i=x_i-x_{i-1},\ i=1,2,\cdots,n.$$

称这些分点或这些闭子区间构成对区间$[a,b]$的一个分割,用记号T表示.

$\|T\|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\Delta x_i)$称为分割$T$的细度.

在分割T的各个小区间上各任取一点

$$\xi_i\in[x_i,x_{i-1}]\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

对定义在$[a,b]$上的函数f和$[a,b]$上的一个分割T,作和式

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i,$$

和式称为f在$[a,b]$上属于分割T的一个积分和,又称为黎曼和,记作$\sum(T)$.

2. 定积分定义　设f是定义在$[a,b]$上的一个有界函数,I是一个确定的常数.若$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ \delta>0$,使得对于$[a,b]$上的任何分割T,只要它的细度$\|T\|<\delta$,就有分割T的所有积分和$\sum(T)$都满足

$$\left|\sum(T)-I\right|<\varepsilon,$$

则称函数 f 在区间$[a,b]$上黎曼可积. 数 I 称为 f 在$[a,b]$上的定积分(黎曼积分),记作

$$I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

a 和 b 称为定积分的下限和上限.

3. 可积的必要条件 若函数 f 在$[a,b]$上可积,则 f 在$[a,b]$上有界.

4. 达布和 设函数 f 在$[a,b]$上有界,设

$$M=\sup_{x\in[a,b]}\{f(x)\},\qquad m=\inf_{x\in[a,b]}\{f(x)\}.$$

对$[a,b]$上的任一分割 T,$\Delta_i=[x_i,x_{i-1}]$,$i=1,2,\cdots,n$,有

$$M_i=\sup_{x\in\Delta_i}\{f(x)\},\qquad m_i=\inf_{x\in\Delta_i}\{f(x)\},$$

则称和数 $\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i$ 和 $\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i$ 分别为函数 f 关于分割 T 的达布上和与达布下和,统称为达布和. 即

$$S(T)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i,\quad s(T)=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i.$$

5. 达布和的性质

(1) 对同一分割 T,$S(T)$ 是所有积分和 $\sum(T)$ 的上确界,$s(T)$ 是所有积分和 $\sum(T)$ 的下确界. 即

$$s(T)=\inf_{\xi_i}\left\{\sum(T)\right\},\quad S(T)=\sup_{\xi_i}\left\{\sum(T)\right\},$$

且 $$m(b-a)\leqslant s(T)\leqslant\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\leqslant S(T)\leqslant M(b-a).$$

(2) 对分割 T 添加新的分点(称分点加密)后的分割 T',上和不增,下和不减. 即

$$s(T)\leqslant s(T')\leqslant s(T)+p(M-m)\|T\|,$$
$$S(T)\geqslant S'(T')\geqslant S(T)-p(M-m)\|T\|.$$

(3) 对任意两个分割 T' 与 T'' 叠加而成的分割 $T = T' + T''$(重复的分点只取一次),有

$$s(T) \geqslant s(T'), \quad s(T) \geqslant s(T'');$$

$$S(T) \leqslant S(T'), \quad S(T) \leqslant S(T'').$$

(4) 对任意两个分割 T 与 T',恒有

$$s(T) < S(T').$$

并记 $s = \sup_T \{s(T)\}$,$S = \inf_T \{S(T)\}$,称 s 为 f 在 $[a,b]$ 上的下积分,S 为 f 在 $[a,b]$ 上的上积分.

(5) $m(b-a) \leqslant s \leqslant S \leqslant M(b-a)$.

6. 达布定理　对任意有界函数 f,有

$$\lim_{\|T\| \to 0} S(T) = S, \quad \lim_{\|T\| \to 0} s(T) = s.$$

7. 黎曼可积的充分必要条件

(1) 可积的第一充要条件　定义在 $[a,b]$ 上的有界函数 f 可积的充要条件是:$s = S$.

(2) 可积的第二充要条件　定义在 $[a,b]$ 上的有界函数 f 可积的充要条件是:$\forall\ \varepsilon > 0$,$\exists$ 某一分割 T,使得

$$\lim_{\|T\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = 0.$$

(3) 第二充要条件的另一形式　定义在 $[a,b]$ 上的有界函数 f 可积的充要条件是:$\exists\ \varepsilon > 0$,$\exists$ 某一分割 T,使得

$$S(T) - s(T) < \varepsilon.$$

称 $\omega_i = M_i - m_i$ 为 f 在 Δ_j 上的振幅.

8. 可积函数类

(1) 若 f 为闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数,则 f 在 $[a,b]$ 上可积.

(2) 若 f 是闭区间 $[a,b]$ 上只有有限个间断点的有界函数,则 f 在 $[a,b]$ 上可积.

(3) 若 f 是闭区间 $[a,b]$ 上的单调函数,则 f 在 $[a,b]$ 上可积.

疑难解析

1. 怎样理解定积分定义与它的几何意义?

答　定积分定义强调了分割的任意性和对于所有积分和 $\sum(T)$ 都满足 $\left|\sum(T)-I\right|<\varepsilon$,使积分和的极限比一般的极限要求更高,因为不仅分割是任意的,而且在一种确定分割下,ξ_i 的取法也是任意的.

定积分只与被积函数和积分区间有关,而与积分变量无关.但在同一问题中,不可随意更改积分变量符号.

极限记号下 $\|T\|\to 0$ 表示分割越来越细的极限过程,但不能用 $n\to\infty$ 代替.因为 $n\to\infty$ 不能保证 $\|T\|\to 0$.

当 $f(x)\geqslant 0$ 时,定积分的几何意义是以 $y=f(x)$ 为曲边,直线 $x=a$,$x=b$ 和 x 轴为边的曲边梯形面积;当 $f(x)\leqslant 0$,则定积分的几何意义是曲边梯形面积的负值.一般情况下,定积分的几何意义是 x 轴上方面积与下方面积负值的代数和.

2. 引入达布上和与达布下和有什么意义?

答　积分和 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 在函数 f 和区间 $[a,b]$ 确定的情况下仍然有很多的变化,因为分割 T 是任意的,ξ_i 的选取是任意的.

而达布上和 $S(T)$ 与达布下和 $s(T)$ 只与分割 T 有关,与 ξ_i 的取法无关,使得存在

$$s(T)\leqslant\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\leqslant S(T),$$

因而可以利用迫敛性(夹逼准则)来讨论积分和的极限.即若

$$\lim_{\|T\|\to 0}S(T)=\lim_{\|\Delta\|\to 0}s(T)=I,$$

则
$$\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

3. 有界函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的上、下积分与 f 在 $[a,b]$ 上的

定积分存在什么关系？

答　通常称 $s=\sup\limits_{T}\{s(T)\}$ 和 $S=\inf\limits_{T}\{S(T)\}$ 为 f 在 $[a,b]$ 上的上积分与上积分. 即

$$s=\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x=\sup_{T}\{s(T)\},\quad S=\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x=\inf_{T}\{S(T)\}.$$

如同序列的上、下极限与序列的极限间关系一样，我们有

$$f \text{ 在 } [a,b] \text{ 上可积} \Longleftrightarrow \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x=\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x.$$

用上、下积分定义定积分有助于：

(1) 回避对积分和与积分和极限的讨论，易直接讨论分割 T 的上、下确界.

(2) 在证明定积分性质和函数可积性时，过程可以更为简捷.

(3) 上、下积分具有"外测度"与"内测度"的思想，有利于与后续课程(如《实变函数》)的衔接.

方法、技巧与典型例题分析

一、定积分的概念

例 1　将区间 $[a,b]$ n 等分，并取 ξ_i 为小区间的中点，求下列函数 $f(x)$ 在给定区间上的积分和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$：

(1) $f(x)=1+x,[-1,4]$；　(2) $f(x)=x^2,[0,4]$.

解　(1) $\Delta x_i=\dfrac{5}{n},\xi_i=-1+\left(i-\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{5}{n}$，则

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\left\{1+\left[-1+\left(i-\frac{1}{2}\right)\frac{5}{n}\right]\right\}\frac{5}{n}$$

$$=\frac{25}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\left(i-\frac{1}{2}\right)=12\frac{1}{2}.$$

(2) $\Delta x_i=\dfrac{4}{n},\xi_i=\dfrac{4(i-1)}{n}+\dfrac{2}{n}$，则

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{4(i-1)}{n}+\frac{2}{n}\right)^2\cdot\frac{4}{n} = \sum_{i=1}^{n}\frac{4^2}{n^3}(2i-1)^2$$
$$= \frac{4^2}{n^3}\,\frac{n}{3}(4n^2-1) = \frac{16}{3}\,\frac{4n^2-1}{n^2}.$$

例 2 将区间 $[a,b]$ n 等分，求下列函数在指定区间上达布下和与达布上和：

(1) $f(x)=x^3,[-2,3]$； (2) $f(x)=\sqrt{x},[0,1]$；

(3) $f(x)=2^x,[0,10]$.

解 (1) 因为 $\Delta x_i=\frac{5}{n}$，$f(x)$ 在 $[-2,3]$ 上严格单调增加，所以

$$m_i=\left[-2+(i-1)\frac{5}{n}\right]^3,\quad M_i=\left[-2+i\frac{5}{n}\right]^3.$$

则
$$s=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\left[-2+(i-1)\frac{5}{n}\right]^3\cdot\frac{5}{n}$$
$$=\frac{65}{4}-\frac{175}{2n}+\frac{125}{4n^2},$$
$$S=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\left[-2+i\frac{5}{n}\right]^3\cdot\frac{5}{n}$$
$$=\frac{65}{4}+\frac{175}{2n}+\frac{125}{4n^2}.$$

(2) 因为 $\Delta x_i=\frac{1}{n}$，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上严格单调增加，所以

$$m_i=\sqrt{\frac{i-1}{n}},\quad M_i=\sqrt{\frac{i}{n}}.$$

则
$$s=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i-1}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i-1}{n}},$$
$$S=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}.$$

(3) 因为 $\Delta x_i=\frac{10}{n}$，$f(x)$ 在 $[0,10]$ 上严格单调增加，所以

$$m_i=2^{10(i-1)/n},\quad M=2^{10i/n}.$$

则 $$s = \sum_{i=1}^{n} 2^{10(i-1)/n} \cdot \frac{1}{n} = 10230/[n(2^{10/n} - 1)],$$

$$S = \sum_{i=1}^{n} 2^{10i/n} \cdot \frac{10}{n} = 10230 \cdot 2^{10/n}/[n(2^{10/n} - 1)].$$

例 3 用定积分定义计算下列积分：

(1) $\int_0^1 a^x \mathrm{d}x$； (2) $\int_0^{\pi/2} \sin x \mathrm{d}x$；

(3) $\int_0^x \cos t \mathrm{d}t$； (4) $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ $(0 < a < b)$.

解 设将区间 n 等分，并取 ξ_i 为 Δ_i 右端点.

(1) $$\int_0^1 a^x \mathrm{d}x = \lim_{\|T\| \to 0} \sum_{i=1}^{n-1} a^{\xi_i} \Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} a^{i/n} \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \frac{a-1}{a^{1/n}-1} = (a-1) \Big/ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^{1/n}-1}{1/n}\right) = \frac{a-1}{\ln a}.$$

(2) $$\int_0^{\pi/2} \sin x \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n} \sum_{i=1}^{n} \sin \frac{i\pi}{2n},$$ 而

$$\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \left(\sin \frac{nx}{2} \cdot \sin \frac{n+1}{2} x\right) \Big/ \sin \frac{x}{2},$$

故 $$\int_0^{\pi/2} \sin x \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n} \cdot \left(\sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{n+1}{4n}\pi)/\right) \Big/ \sin \frac{\pi}{4n}$$

$$= \sin \frac{\pi}{4} \lim_{n\to\infty} \sin \frac{(n+1)}{4n}\pi \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n} \Big/ \sin \frac{\pi}{4n}$$

$$= \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{4} \cdot 2 = 1.$$

(3) $$\int_0^x \cos t \mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \cos \frac{ix}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} \left(\sin \frac{x}{2} \cos \frac{(n-1)}{2n} x\right) \Big/ \sin \frac{x}{2n}$$

$$= \sin \frac{x}{2} \lim_{n\to\infty} \cos \frac{n-1}{2n} x \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} \Big/ \sin \frac{x}{2n}$$

$$= \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \cdot 2 = \sin x.$$

(4) $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x}$ 的解法稍有不同. 对 $[a,b]$ n 等分，$\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$，令

$$\xi_i = \sqrt{x_i \cdot x_{i+1}} \quad (i = 0,1,\cdots,n-1),$$

则 $$\sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{x_i x_{i+1}}(x_{i+1} - x_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_{i+1}}\right) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b},$$

即 $$\int_a^b \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

例 4 证明:若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界,则函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不可积.

证 用反证法.设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,则 $\exists\, I \in \mathbf{R}$,对 $\varepsilon = 1 > 0$,$\exists\, \delta > 0$,且 $\forall\, T$,只要 $\|T\| < \delta$,就有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| < 1 \quad \text{或} \quad \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right| < |I| + 1.$$

由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界,则对某一分割 T_0,$f(x)$ 必在某 $[x_{i-1},x_i]$ 上无界,即 $|f(\xi_i)| > M$.则

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\left[f(\xi_1)\Delta x_1 + \sum_{i=2}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right] = \infty$$

(为简单计,不妨设 $|f(\xi_1)| > M$),

而 $f(x)$ 可积时,积分和的极限为常数.推出矛盾.

故,若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界,$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定不可积.

例 5 设 $f(x)$,$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且当 $a < x < b$ 时,$F'(x) = f(x)$.用定义证明:$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

证 由题意,要证 $\forall\, \varepsilon > 0$,成立

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - (F(b) - F(a))\right| < \varepsilon.$$

$\forall$ 分割 T,$F(b) - F(a)$ 可写为

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n}[F(x_i) - F(x_i - 1)] \quad \text{(拉格朗日中值定理)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} F'(\eta_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum f(\eta_i)\Delta x_i,$$

则
$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - (F(b) - F(a))\right|$$
$$= \left|\sum_{i=1}^{n} [(f(\xi_i) - f(\eta_i))]\Delta x_i\right|$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i) - f(\eta_i)|\Delta x_i \quad (\xi_i, \eta_i \in [x_{i-1}, x_i]).$$

$f(x)$ 在$[a,b]$上连续，必一致连续. 故$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0$，当$\xi_i$，$\eta_i \in [a,b]$，且$|\xi_i - \eta_i| < \delta$时，有$|f(\xi_i) - f(\eta_i)| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$，故只要$\|T\| < \delta$，就有

$$\sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i) - f(\eta_i)|\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a}\Delta x_i = \varepsilon.$$

所以，命题成立.

二、函数的可积性

这部分问题理论性较强，叙述也要求十分严密，但讨论的方式是可以多样的. 应注意选择适当的方法，使问题简洁明了. 一般证明函数$f(x)$在$[a,b]$上的可积性时，常用：$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0$，使$\forall\ T$，只要$\|T\| < \delta$，就有$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i < \varepsilon$. 这里，$\omega_i = M_i - m_i$（也可以用别的形式）. 而证明$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i$常从两个方面着手：

(1) 证明在任一Δ_i上，ω_i一致地小于ε；

(2) 证明所有小区间长Δx_i一致地小于ε.

也可将$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i$分成两部分，以上两种情形各占一部分（如例10）.

例 6 设f在$[a,b]$上连续，试说明任意改变f在有限个点上的值不影响它的可积性和积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$的值.

解 设f改变有限个点上的值后的函数为f^*，则f^*在$[a,b]$

上有有限个第一类可去间断点，所以 f^* 在$[a,b]$上可积. 又在一点处函数的积分为零，由于间断点个数有限，从而积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$的值不变.

例 7 设$f(x)$在$[a,b]$上单调，但有无限多个不连续点，f是否可积?

解 可能可积. 例如

$$f(x)=\begin{cases}1/2^{n-1}, & x\in(1/2^n,1/2^{n-1}), \quad n\in\mathbf{N},\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在$[0,1]$上严格递增且有界，是可积的. 但在$[0,1]$上有无限个不连续点：$\{1/2^n\}$，$n=1,2,\cdots$.

又如 $f(x)=\begin{cases}\operatorname{sgn}(\sin(\pi/x)), & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 也在$[0,1]$上可积，但有无穷多个不连续点：$\left\{\frac{1}{n}\right\}$，$n=1,2,\cdots$.

例 8 若函数$f(y)$与$y=\varphi(x)$都可积，它们的复合函数$f[\varphi(x)]$是否可积?

解 不一定可积. 例如函数

$$f(y)=\begin{cases}0, & y=0,\\ 1, & y\neq 0\end{cases}$$

在$[0,1]$上可积. 黎曼函数

$$y=\varphi(x)=\begin{cases}0, & x\text{ 是无理数},\\ 1, & x=0,\\ 1/n, & x=\dfrac{m}{n},\end{cases}\qquad m\text{ 与 }n\text{ 是互质整数}$$

在$[0,1]$上也可积. 但它们的复合函数

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}0, & x\text{ 是无理数},\\ 1, & x\text{ 是有理数}\end{cases}$$

在$[0,1]$上都不可积.

例 9 讨论在区间$[0,1]$上的狄利克雷(Dirichlet)函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

的可积性.

解 由无理数与有理数在实数域上的稠密性知，不论用何种分割 T，在 Δ_i 中总是既有有理数又有无理数. 因此，当所有 ξ_i 均为无理数时，有

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}D(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{\|T\|\to 0}0\cdot\sum_{i=1}^{n}D(\xi_i)\Delta x_i=0,$$

而当所有 ξ_i 均为有理数时，有

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}D(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{\|T\|\to 0}1\sum_{i=1}^{n}D(\xi_i)\Delta x_i=1,$$

由于两个极限分别存在但不相等，故狄利克雷函数不可积.

例 10 证明：黎曼函数

$$R(x)=\begin{cases}1/q, & x=p/q\text{ 为既约分数},\\ 0, & x\text{ 为 }0,1\text{ 及无理数}\end{cases}$$

在[0,1]上可积.

证 用第二充要条件证. $\forall\,\varepsilon>0$，取充分大的 q，使 $\dfrac{1}{q}<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 则在[0,1]内使 $R(x)=\dfrac{1}{q}\geqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$ 的点只有有限个，设为 $0\leqslant r_1<r_2<\cdots<r_k\leqslant 1$.

对[0,1]作分割 T，使细度 $\|T\|<\dfrac{\varepsilon}{2k}$. 将 T 的小区间分为两类，其中 $\{\Delta_{i'}\}$ 为含有 $\{r_i\}$ 中点的小区间，$\{\Delta_{i''}\}$ 为不含 $\{r_i\}$ 中点的小区间，则在 $\Delta_{i'}$（至多 $m\leqslant 2k$ 个）上 $f(x)$ 的振幅 $\omega_{i'}$ 满足

$$\frac{\varepsilon}{2}\leqslant\omega_{i'}\leqslant\frac{1}{2},$$

而 $\sum\limits_{i'}\omega_{i'}\Delta x_{i'}\leqslant\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i'}\Delta x_{i'}<\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\varepsilon}{2k}=\dfrac{\varepsilon}{2}$. 在 $\Delta_{i''}$ 上 $f(x)$ 的振幅 $\omega_{i''}\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$，而 $\sum\limits_{i''}\omega_{i''}\Delta x_{i''}\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}\leqslant\sum\limits_{i''}\Delta x_{i''}\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$. 所以

$$\sum_i \omega_i \Delta x_i = \sum_{i'} \omega_{i'} \Delta x_{i'} + \sum_{i''} \omega_{i''} \Delta x_{i''} < \varepsilon.$$

故 $f(x)$ 在$[0,1]$上黎曼可积，且$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$.

例 11　证明：若 $f(x)$ 在$[a,b]$上黎曼可积，则 $f(x)$ 在$[a,b]$上有无穷多个连续点.

证　由$f(x)$在$[a,b]$上黎曼可积，则$\forall\ [\alpha,\beta]\subset[a,b]$，$f(x)$在$[\alpha,\beta]$上也黎曼可积. 于是$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ [a_1,b_1]\subset[a,b]$，$b_1-a_1<\dfrac{b-a}{2}$，使$f(x)$在$[a_1,b_1]$上的振幅$\omega_1<\varepsilon$(否则，可推出$f(x)$在$[a,b]$上不可积). 而$\forall\ \dfrac{\varepsilon}{2}$，$\exists\ [a_2,b_2]\subset[a_1,b_1]$，${}_2-a_2<\dfrac{b-a}{2^2}$，使 $f(x)$ 在$[a_2,b_2]$上的振幅 $\omega_2<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 如此等等，可得一闭区间列$\{[a_n,b_n]\}$，构成一个闭区间套. 于是，由闭区间套定理知，有 $\xi_i\in[a_i,b_i]$ $(i=1,2,\cdots)$，ξ_i 是$[a_i,b_i]$内点，所以 $f(x)$ 在 ξ_i 连续，从而 $f(x)$ 有无穷多个连续点. 即在(a,b)内任何子区间上，都有 $f(x)$ 的连续点.

例 12　证明：若 $f(x)$ 在$[a,b]$上黎曼可积，且$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$，则$\exists$ 区间$[\alpha,\beta]\subset[a,b]$，在$[\alpha,\beta]$上 $f(x)>0$.

证　用反证法. 若对任何$[\alpha,\beta]\subset[a,b]$，都有 $\xi\in[\alpha,\beta]$，使 $f(\xi)\leqslant 0$，则对$[a,b]$的任一分割 T，在每个 Δ_i 上都可找到 ξ_i，使 $f(\xi_i)\leqslant 0$，从而

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^n \xi_i \Delta x_i \leqslant 0.$$

这与$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$ 矛盾.

例 13　证明：若 $f(x)$ 在$[a,b]$上黎曼可积，则$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x = 0 \Longleftrightarrow$ 对 $f(x)$ 在$[a,b]$上的一切连续点，有 $f(x)=0$.

证　**必要性**　用反证法. 设 $f(x)$ 在某点 x_0 连续，且 $f(x_0)\neq 0$，则存在 $\delta>0$，有$[x_0-\delta,x_0+\delta]\subset[a,b]$(若 x_0 为端点，可考虑

左或右邻域)，使当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|>\frac{1}{2}|f(x_0)|$. 于是

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f^2(x)\mathrm{d}x > \delta f^2(x_0) > 0.$$

从而与题设矛盾.

充分性 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则由例 11 知，在 (a,b) 内任一闭子区间上，都有 $f(x)$ 的连续点. 对 $[a,b]$ 上的任一分割 T，均可选到 $\xi_i \in \Delta_i$，使 $f(\xi_i)=0$. 于是 $\sum_{i=1}^{n} f^2(\xi_i)\Delta x_i = 0$，即

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x = \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f^2(\xi_i)\Delta x_i = 0.$$

同样可得，若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积，且 $f(x)\geqslant 0$，则

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow f(x)\equiv 0,\quad x\in[a,b]\quad (x \text{ 为连续点}).$$

例 14 证明：有界函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积的充要条件(可积的第三充要条件)是：$\forall\ \varepsilon>0$ 与 $\eta>0$，$\exists\ \delta>0$，$\forall\ T$，当 $\|T\|<\delta$ 时，振幅 $\omega_{i'}\geqslant\eta$ 的小区间 $\Delta_{i'}$ 的总长 $\sum_{i'}\Delta x_{i'}<\varepsilon$.

证 **必要性** 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $\forall\ \varepsilon>0$ 和 $\eta>0$，$\exists\ \delta>0$，$\forall\ T$，当 $\|T\|<\delta$ 时，$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon\eta$. 设 $\omega_i'\geqslant\eta$，则有

$$\eta\sum_{i'}\Delta x_{i'} \leqslant \sum_{i'}\omega_{i'}\Delta x_{i'} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i < \varepsilon\eta.$$

所以

$$\sum_{i'}\Delta x_{i'} < \varepsilon.$$

充分性 以 ω 记 f 在 $[a,b]$ 上的振幅.

当 $\omega_i\geqslant\eta$ 时，表示 $\omega_i=\omega_{i'}$ 对应小区间的长度是 $\Delta x_{i'}$，

当 $\omega_i<\eta$ 时，表示 $\omega_i=\omega_{i''}$，对应小区间的长是 $\Delta x_{i''}$，

则 $\forall\ \varepsilon>0$ 与 $\eta>0$(令 $\eta\leqslant\varepsilon$)，$\exists\ \delta>0$，$\forall\ T$，当 $\|T\|<\delta$ 时，有 $\omega_{i'}\geqslant\eta$，$\sum_{i'}\Delta x_{i'}<\varepsilon$. 有

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i = \sum_{i'}\omega_{i'}\Delta x_{i'} + \sum_{i''}\omega_{i''}\Delta x_{i''}$$
$$< \omega\sum_{i'}\omega_{i'}\Delta x_{i'} + \eta\sum_{i}\omega_{i''}\Delta x_{i''}$$
$$< \omega\varepsilon + \eta(b-a) \leqslant (\omega + b - a)\varepsilon.$$

所以，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

例 15 设 $f(x)$ 在 $[A,B]$ 上连续，$\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且当 $x\in[a,b]$ 时，$A\leqslant\varphi(x)\leqslant B$，证明：复合函数 $f[\varphi(x)]$ 可积.

证 因为 $f(x)$ 在 $[A,B]$ 上连续，则由康托尔定理知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内一致连续. 即 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，对 $[A,B]$ 内任意两点 x' 和 x''，只要 $|x'-x''|<\delta$，必有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

又 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则对任一分割 T，只要 $\|T\|<\eta$，就有 $\sum_i\omega_i(\varphi)\Delta x_i<\delta\varepsilon$.

把 $\sum_i\omega_i(\varphi)\Delta x_i$ 分为两部分. 一部分为 $\omega_i(\varphi)\geqslant\delta$ 的各项组成的，记作 $\sum_i{}'\omega_i(\varphi)\Delta x_i$；另一部分为 $\omega_i(\varphi)<\delta$ 的各项组成的，记作 $\sum_i{}''\omega_i(\varphi)\Delta x_i$. 显然，$\delta\sum_i{}'\Delta x_i\leqslant\sum_i{}'\omega_i(\varphi)\Delta x_i\leqslant\sum_i\omega_i(\varphi)\Delta x_i<\delta\varepsilon$，故 $\sum_i{}'\Delta x_i<\varepsilon$.

由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以 $f(x)$ 有界，即 $|f(x)|\leqslant M$. 故当 $\omega_i(\varphi)\geqslant\delta$ 时，$\omega_i(f(\varphi))\leqslant 2M$；当 $\omega_i(\varphi)<\delta$ 时，$\omega_i(f(\varphi))\leqslant\varepsilon$. 于是

$$\sum\omega_i(f(\varphi))\Delta x_i = \sum_i{}'\omega_i(f(\varphi))\Delta x_i + \sum_i{}''\omega_i(f(\varphi))\Delta x_i$$
$$= 2M\sum_i{}'\Delta x_i + \varepsilon\sum_i{}''\Delta x_i$$
$$< 2M\varepsilon + \varepsilon(b-a) = (2M+b-a)\varepsilon,$$

即 $f[\varphi(x)]$ 在 $[a,b]$ 上可积.

例 16 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $\int_a^b f(x)x^n\mathrm{d}x = 0\ (n=0,$

$1,\cdots,n-1$)，证明：$f(x)\equiv 0$ 或在 (a,b) 内至少 n 次改变符号.

证 若 $f(x)\equiv 0$，则 $\int_a^b f(x)x^n\mathrm{d}=0$ 是显然的. 若 $f(x)\equiv 0$，用反证法证明：$f(x)$ 在 (a,b) 内至少 n 次变号.

因为，若 $f(x)$ 在 (a,b) 内至多 $n-1$ 次变号，则必存在 k 个分点 $\{x_k\}(1\leqslant k\leqslant n-1)$，使 $f(x)$ 在每个区间 $(a,x_1),(x_1,x_2),\cdots,(x_{k-1},x_k),(x_k,b)$ 内不恒为零且不变号，但在相邻两区间上不同号，从而

$$f(x)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_k)$$

在 (a,b) 内符号一致. 从而，由题设知

$$\int_a^b f(x)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)\mathrm{d}x=0.$$

根据保号性定理，$f(x)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_k)\equiv 0$，即 $f(x)\equiv 0$，与 $f(x)\not\equiv 0$ 矛盾.

例 17 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且 $f(x)>0$，证明：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0.$$

证 用反证法. 因为 $f(x)>0$，若 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$ 不成立，则必有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$，现在来推出矛盾.

取 $\varepsilon_i=\frac{1}{i}\ (i=1,2,\cdots,n)$. 再取一分割 T，使对任何 $\xi_i\in\Delta_i$，都有 $0<\sum f(\xi_i)\Delta x_i<\varepsilon_1(b-a)$，则有不等式 $0<S(T)\leqslant\varepsilon_1(b-a)$ 成立. 从而知，至少有一个 $M_i=\sup\limits_{x\in\Delta_i}|f(x)|\leqslant\varepsilon_1$(不妨设为 M_{i0})(否则一切 $M_i>\varepsilon_1$，则 $\sum M_i\Delta x_i>\varepsilon_1(b-a)$，推出矛盾). 于是在 Δ_{i0} 上，有 $f(x)\leqslant\varepsilon_1$.

再在 Δ_{i_0} 上取区间 $[a_1,b_1]$(使 $b_1-a_1<\varepsilon_1$)，则在 $[a_1,b_1]$ 上，恒有 $0<f(x)\leqslant\varepsilon_1$. 由

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_b^{a_1}+\int_{a_1}^{b_1}+\int_{b_1}^{b}=0,$$

而$\int_a^{a_1}$，$\int_{a_1}^{b_1}$，$\int_{b_1}^{b}$ 均不小于零，知$\int_{a_1}^{b_1} f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$.

再对$[a_1,b_1]$重复以上论证，可以得到区间$[a_2,b_2] \subset [a_1,b_1] \subset [a,b]$，$(b_2 - a_2 < \varepsilon_2)$，且在$[a_2,b_2]$上，恒有 $0 < f(x) \leqslant \varepsilon_2$.

不断重复以上论证，就可得到一个闭区间套$\{[a_n,b_n]\}$，满足

$$[a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset \cdots \supset [a_n,b_n], b_n - a_n < \varepsilon_n = \frac{1}{n},$$

$$0 < f(x) \leqslant \varepsilon_n \quad (x \in [a_n,b_n]).$$

由闭区间套定理，必存在惟一的$\xi \in [a_n,b_n]$ $(n = 1,2,\cdots)$(即$\xi \in [a,b]$)，使得 $f(\xi) \leqslant \varepsilon_n = \dfrac{1}{n}$ $(n = 1,2,\cdots)$. 故 $f(\xi) \leqslant 0$，与原假设 $f(x) > 0$ 矛盾.

所以，若 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积，且 $f(x) > 0$，必有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0.$$

此命题的逆命题不成立，但例 12 所述命题成立.

例 18 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积，证明：$e^{f(x)}$ 在$[a,b]$上可积.

证 对$[a,b]$作分割 T，在 Δ_i 内取两点 x' 和 x''. 由微分中值定理，有

$$|e^{f(x')} - e^{f(x'')}| = e^{\xi}|f(x') - f(x'')|,$$

ξ 在 x',x'' 之间. 因为可积函数必有界，故设 $|f(x)| < M$，则

$$|e^{f(x')} - e^{f(x'')}| = e^{M}|f(x') - f(x')|.$$

以 ω_i 与 ω_i' 分别记 $f(x)$ 和 $e^{f(x)}$ 为在 Δ_i 上的振幅，则对 Δ_i 内任意 x' 和 x''，对上述不等式取上确界，得

$$\omega_i' \leqslant e^{M}\omega_i \quad (i = 0,1,\cdots,n-1).$$

由此可知

$$\sum_{i=1}^{n-1}\omega_i'\Delta x_i \leqslant e^{M}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i.$$

由可积的第二充要条件知，$\lim\limits_{\|T\| \to 0}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i = 0$. 因此

$$0 \leqslant \lim_{\|T\| \to 0} \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i' \Delta x_i \leqslant \mathrm{e}^M \lim_{\|T\| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0,$$

即 $\lim\limits_{\|T\| \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n-1} \omega_i' \Delta x_i = 0$，$\mathrm{e}^{f(x)}$ 在$[a,b]$上可积.

第二节　定积分的性质

主要内容

定积分有如下性质：

1. 若 f 在$[a,b]$上可积，则 kf 在$[a,b]$上可积，且

$$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

2. 若 f,g 在$[a,b]$上可积，则 $f \pm g$ 在$[a,b]$上也可积，且

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

3. 若 f,g 在$[a,b]$上可积，则 fg 在$[a,b]$上也可积. 一般地，

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \neq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

4. 有界函数 f 在$[a,c]$，$[c,b]$上都可积的充要条件是：f 在$[a,b]$上可积，并有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

此性质称为定积分的区间可加性，且有

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0, \quad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x.$$

5. 设 f 与 g 均在$[a,b]$上可积，且对 $x \in [a,b]$，有 $f(x) \leqslant g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.\text{（保序性）}$$

6. 若 f 在 $[a,b]$ 上可积，则 $|f|$ 在 $[a,b]$ 上也可积，且

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.\text{（绝对可积性）}$$

7.（积分第一中值定理） 若 f 在 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

8.（推广的积分第一中值定理） 若 f 与 g 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号，则在 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

9.（积分第二中值定理） 若在区间 $[a,b]$ 上 f 为非负的单调减少函数，而 g 是可积函数，则至少存在一点 $\xi \in [a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(a)\int_a^{\xi} g(x)\mathrm{d}x.$$

推论 1 若在 $[a,b]$ 上 f 为非负的单调增加函数，g 为可积函数，则至少存在一点 $\xi \in [a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(b)\int_{\xi}^b g(x)\mathrm{d}x.$$

推论 2 若在 $[a,b]$ 上 f 为单调函数，g 为可积函数，则至少存在一点 $\xi \in [a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(a)\int_a^{\xi} g(x)\mathrm{d}x + f(b)\int_{\xi}^b g(x)\mathrm{d}x.$$

定理与两个推论统称为积分第二中值定理.

疑难解析

1. 为什么要规定

$$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = 0 \text{ 和 } \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x?$$

答　定积分定义强调了函数 $f(x)$ 定义在区间$[a,b]$上，而 a 只是一点，为了运算方便与一致性，规定$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$. 又定义中要求 $b > a$，所以$\int_b^a$ 无实际意义，也是运算上的要求和统一，令 Δx_i 为负值，规定$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$. 这样对积分上限和积分下限的大小不再有要求，从而给计算和论证带来极大的便利.

2. 积分中值的意义是什么？

答　积分中值也叫积分均值，是有限个数的算术平均值概念对连续函数的推广.

若函数 f 在$[a,b]$上连续，当对分割 T 进行 n 等分时，$\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$，取 ξ_i 为 Δ_i 的右端点 x_i，则对应的 n 个函数值 $f(\xi_i)$ 的算术平均值.

$$\overline{y_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) = \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\frac{b-a}{n}$$
$$= \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

当 $n \to \infty$ 时，$\overline{y_n}$ 的极限值定义为 f 在$[a,b]$上的平均值 $\overline{y}$，即

$$\overline{y} = \lim_{n\to\infty}\overline{y_n} = \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$
$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

通常称$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x(= f(\xi))$ 为函数 f 在$[a,b]$上的积分中值，连续函数 $y = f(x)$ 在区间$[a,b]$上的平均值就等于该函数在$[a,b]$上的积分中值.

3. 试说明积分第二中值定理的几何意义.

答　当 $f(x) \geqslant 0, g(x) \geqslant 0$ 时，第二中值定理等式左边 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 表示一个空间曲顶柱体的体积(见图 6.1). 该曲顶

柱体的底是 xoy 平面的曲边梯形：$0 \leqslant y \leqslant g(x), a \leqslant x \leqslant b$. 曲顶是空间柱面 $z = f(x)$，被积函数 $A(x) = g(x)f(x)$ 恰为正交于 x 轴的长方形截面的面积. 而等式右边也可以认为是一个柱体的体积，其底面是 xoy 平面上的曲边梯形：$0 \leqslant y \leqslant g(x), a \leqslant x \leqslant \xi$，其高为 $f(a)$. 这时等式表示存在某一 $\xi \in [a,b]$，使得上述两个柱体的体积相等.

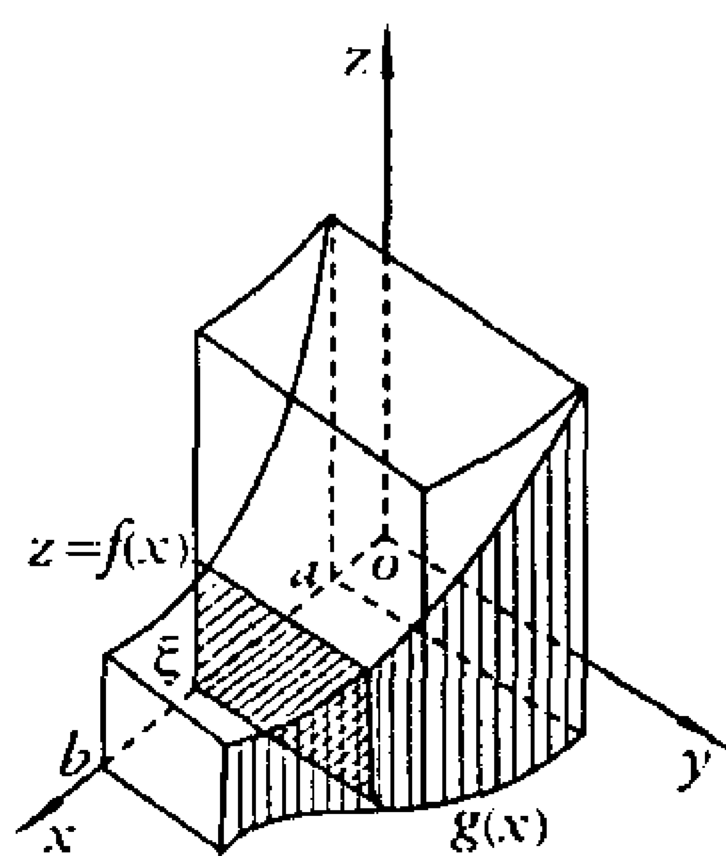


图 6.1

方法、技巧与典型例题分析

一、利用定积分求极限

利用定积分求极限，一般要将极限式化为积分和式 $\sum f(\xi_i)\Delta x_i$，从中确定被积函数 $f(x)$，而由 $\sum \Delta x_i$ 确定积分区间，从而得到定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. 计算定积分即得极限值.

例 1 利用定积分求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}\ (p>0)$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\sqrt{1+1/n}+\sqrt{1+2/n}+\cdots+\sqrt{1+n/n}\right)$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\tan\dfrac{\pi}{4n}+\tan\dfrac{2\pi}{4n}+\cdots+\tan\dfrac{n-1}{4n}\pi\right)$；

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin a+\sin(a+b/n)+\cdots+\sin[a+(n-1)/n\cdot b]}{n}$；

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n^{3/2}}$；

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left[\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2-2^2}+\cdots+\sqrt{n^2-(n-1)^2}\right]$.

解 (1) 原式 $=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1+i/n}\cdot\dfrac{1}{n}$,

知
$$f(\xi_i)=\frac{1}{1+i/n},\ \Delta x_i=\frac{1}{n},$$

所以
$$原式=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}=\ln|1+x|\Big|_0^1=\ln 2.$$

(2) 原式 $=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{1+(i/n)^2}}\cdot\dfrac{1}{n}$,

知
$$f(\xi_i)=\frac{1}{\sqrt{1+(i/n)^2}},\ \Delta x_i=\frac{1}{n},$$

所以原式 $=\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}=\ln(x+\sqrt{1+x^2})\Big|_0^1=\ln(1+\sqrt{2})$.

(3) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[\left(\dfrac{1}{n}\right)^p+\left(\dfrac{2}{n}\right)^p+\cdots+\left(\dfrac{n}{n}\right)^p\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^p\cdot\frac{1}{n},$$

知
$$f(\xi_i)=\left(\frac{i}{n}\right)^p,\ \Delta x_i=\frac{1}{n},$$

所以
$$原式=\int_0^1(x)^p\mathrm{d}x=\frac{1}{p+1}x^{p+1}\Big|_0^1=\frac{1}{p+1}.$$

(4) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sqrt{1+i/n}\cdot\dfrac{1}{n}=\int_0^1\sqrt{1+x}\mathrm{d}x$

$$=\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}\Big|_0^1=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

(5) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\tan\dfrac{i\pi}{4n}\cdot\dfrac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\tan\dfrac{i\pi}{4n}\cdot\dfrac{\pi}{4n}$

$$=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/4}\tan x\mathrm{d}x=-\frac{4}{\pi}\ln|\cos x|\Big|_0^{\pi/4}$$

$$=\frac{4}{\pi}\ln\sqrt{2}=\frac{2}{\pi}\ln 2.$$

(6) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\left(a+\dfrac{ib}{n}\right)\cdot\dfrac{1}{n}$

$$= \int_0^1 \sin(a + bx)\mathrm{d}x = -\frac{1}{b}\cos(a + bx)\Big|_0^1$$

$$= -\frac{1}{b}[\cos(a + b) - \cos a].$$

(7) 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{i/n}\cdot\frac{1}{n} = \int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$

(8) 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{n}\sqrt{1-(i/n)^2}\cdot\frac{1}{n} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

$$= \left[\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x\right]\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

例 2 利用定积分求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)}$，其中 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x) > 0$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)\right]^{1/n}$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{\sin(\pi/n)}{n+1} + \frac{\sin(2\pi/n)}{n+1/2} + \cdots + \frac{\sin\pi}{n+1/n}\right].$

解 由于题(1)、题(2)、题(3)的通项是积的形式，要先取对数，化积为和，再利用定积分求出极限.

(1) 令 $a_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+n)}$，则

$$\ln a_n = \ln\frac{1}{n} + \frac{1}{n}[\ln(n+1) + \ln(n+2) + \cdots + \ln(n+n)]$$

$$= \frac{1}{n}[\ln(n+1) + \cdots + \ln(n+n) - n\ln n]$$

$$= \frac{1}{n}\{[\ln(n+1) - \ln n] + [\ln(n+2) - \ln n] + \cdots + [\ln(n+n) - \ln n]\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}[\ln(n+i) - \ln n]\frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n}\ln\frac{n+i}{n}\cdot\frac{1}{n},$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\ln a_n = \int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x$$
$$= [x\ln(1+x) - x + \ln(1+x)]\Big|_0^1$$
$$= 2\ln 2 - 1 = \ln\frac{4}{\mathrm{e}},$$
所以
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e}^{\ln\frac{4}{\mathrm{e}}} = \frac{4}{\mathrm{e}}.$$

(2) 令 $a_n = \sqrt[n]{f(1/n)f(2/n)\cdots f(n/n)}$,则
$$\ln a_n = \frac{1}{n}\left[\ln f\left(\frac{1}{n}\right) + \ln f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + \ln f\left(\frac{n}{n}\right)\right]$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\ln f\left(\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n},$$
故
$$\lim_{n\to\infty}\ln a_n = \int_0^1 \ln f(x)\mathrm{d}x,$$
所以
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e}^{\int_0^1 \ln f(x)\mathrm{d}x}.$$

(3) 令 $a_n = \left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)+\cdots\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)\right]^{1/n}$,则
$$\ln a_n = \frac{1}{n}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) + \ln\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right) + \cdots + \ln\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)\right]$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i^2}{n^2}\right)\cdot\frac{1}{n},$$
故
$$\lim_{n\to\infty}\ln a_n = \int_0^1 \ln(1+x^2)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} + \ln 2 - 2,$$
所以
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e}^{\int_0^1 \ln(1+x^2)\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{\ln 2+\pi/4-2} = 2\mathrm{e}^{\pi/4-2}.$$

(4) 令 $a_n = \frac{\sin(\pi/n)}{n+1} + \frac{\sin(2\pi/n)}{n+1/2} + \cdots + \frac{\sin\pi}{n+1/n}$,

则有
$$\frac{1}{n+1}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin\pi\right) < a_n$$
$$< \frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin\pi\right).$$
而
$$\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin\pi\right) = \sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}\cdot\frac{1}{n},$$

$$\frac{1}{n+1}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\pi\right)=\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}\cdot\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right),$$

有 $$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}\cdot\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$=\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi},$$

所以,由夹逼准则得

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sin(\pi/n)}{n+1}+\frac{\sin(2\pi/n)}{n+1/2}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+1/n}\right]=\frac{2}{\pi}.$$

例 3 用定积分求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}2^{i/n}\dfrac{1}{n+1/i}$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{\pi}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{2+\cos(k\pi/n)}$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{(nx+k)(nx+k+1)}$ $(x>0)$.

解 (1) 因为

$$\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}2^{i/n}<\sum_{i=1}^{n}2^{i/n}\frac{1}{n+1/i}<\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}2^{i/n},$$

即 $$\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}2^{i/n}<\sum_{i=1}^{n}2^{i/n}\frac{1}{n+1/i}<\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}2^{i/n},$$

而 $$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}2^{i/n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}2^{i/n}=\int_0^1 2^x\mathrm{d}x=\left[2^x\frac{1}{\ln 2}\right]\Big|_0^1=\frac{1}{\ln 2},$$

故 $$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}2^{i/n}\frac{1}{n+1/i}=\frac{1}{\ln 2}.$$

(2) 因为 $$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\mathrm{e}^{\ln(\sqrt[n]{n!}/n)}=\mathrm{e}^{[\ln(n!/n^n)]/n}$$

$$=\mathrm{e}^{[\ln(1/n)+\ln(2/n)+\cdots+\ln(n/n)]/n},$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}[\ln(1/n)+\ln(2/n)+\cdots+\ln(n/n)]/n}$

$$=e^{\int_0^1\ln x\mathrm{d}x}=e^{\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1\ln x\mathrm{d}x}=e^{\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}[x\ln x-x]_\varepsilon^1}=e^{-1}.$$

以下两题要用弃掉高阶无穷小的方法来做.

(3) 因为 $\sin\dfrac{\pi}{n}=\dfrac{\pi}{n}(1+\alpha_n)$ $(\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0)$,所以

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2+\cos(k\pi/n)}=\lim_{n\to\infty}(1+\alpha_n)\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2+\cos(k\pi/n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2+\cos(k\pi/n)}\cdot\lim_{n\to\infty}(1+\alpha_n)$$

$$=\pi\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{2+\cos\pi x}=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left[\left(\tan\frac{\pi x}{2}\right)\Big/\sqrt{3}\right]\Big|_0^1=\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

(4) 因为 $\sqrt{\left(x+\dfrac{k}{n}\right)\left(x+\dfrac{k+1}{n}\right)}\sim x+\dfrac{1}{n}\left(k+\dfrac{1}{2}\right)$,所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(nx+k)(nx+k+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[x+\frac{1}{n}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$=\int_0^1(x+t)\mathrm{d}t=x+\frac{1}{2}\quad(x>0).$$

例 4 利用定积分定义求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[1^\alpha+3^\alpha+\cdots+(2n+1)^\alpha]^{\beta+1}}{[2^\beta+4^\beta+\cdots+(2n)^\beta]^{\alpha+1}}$ $(\alpha,\beta\neq-1)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a^{1/n}-1)\sum\limits_{i=0}^{n-1}b^{i/n}\sin b^{(2i+1)/2n}$ $(a>1)$.

解 (1) 将分子、分母化为两个定积分来处理.

$$\frac{[1^\alpha+3^\alpha+\cdots+(2n+1)^\alpha]^{\beta+1}}{[2^\beta+4^\beta+\cdots+(2n)^\beta]^{\alpha+1}}$$

$$=2^{\alpha-\beta}\frac{\left\{\dfrac{2}{n}\left[\left(\dfrac{1}{n}\right)^\alpha+\left(\dfrac{3}{n}\right)^\alpha+\cdots+\left(\dfrac{2n+1}{n}\right)^\alpha\right]\right\}^{\beta+1}}{\left\{\dfrac{2}{n}\left[\left(\dfrac{2}{n}\right)^\beta+\left(\dfrac{4}{n}\right)^\beta+\cdots+\left(\dfrac{2n}{n}\right)^\beta\right]\right\}^{\alpha+1}}$$

$$= 2^{\alpha-\beta} \frac{\left\{\sum_{i=1}^{n}[(2i-1)/n]^2 \cdot 2/n + [(2n+1)/n]^{\alpha} \cdot 2/n\right\}^{\beta+1}}{\left[\sum_{i=1}^{n}(2i/n)^{\beta} \cdot 2/n\right]^{\alpha+1}},$$

所以 原式 $= 2^{\alpha-\beta} \frac{\left(\int_0^2 t^{\alpha}\mathrm{d}t\right)^{\beta+1}}{\left(\int_1^0 t^{\beta}\mathrm{d}t\right)^{\alpha+1}} = 2^{\alpha+\beta}\frac{(\beta+1)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\beta+1}}.$

(2) 因为原式 $= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\sin b^{\frac{2i+1}{2n}}\right)\left(b^{\frac{i+1}{n}} - b^{\frac{i}{n}}\right)$ 可看作函数 $\sin x$ 在 $[1,b]$ 上按分割 $1 = b^{0/n} < b^{1/n} < \cdots < b^{n/n} = b$ 所作的积分和，小区间长 $\Delta x_i = b^{\frac{i+1}{n}} - b^{\frac{i}{n}}, 0 \leqslant \lambda = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta x_i \leqslant b(b^{1/n}-1) \to 0 \cdot \xi_i = b^{2i+1}$ 是小区间 $[b^{i/n}, b^{(i+1)/n}]$ 两端点的比例中项. 所以

$$原式 = \int_1^b \sin x\mathrm{d}x = \cos 1 - \cos b.$$

二、定积分的估值与比较

简单的定积分估值可以直接由不等式

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$$

得出，而较精密的估值可用推广的积分中值定理和第二积分中值定理来估计.

例 5 估计下列各积分的值：

(1) $\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x\arctan x\mathrm{d}x$； (2) $\int_0^2 \mathrm{e}^{x^2-x}\mathrm{d}x$.

解 可先求 $f(x)$ 在积分区间上的最大值与最小值，再考虑区间长度，即得.

(1) 因为

$$f'(x) = \arctan x + \frac{x}{x+x^2} > 0, \quad x \in [1/\sqrt{3}, \sqrt{3}],$$

所以 $f(x)$ 严格单调增加，最小值 $m = f(1/\sqrt{3}) = \pi/(6\sqrt{3})$，最大值 $M = f(\sqrt{3}) = \pi/\sqrt{3}$. 因此

$$\frac{\pi}{6\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\leqslant\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}x\arctan x\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\frac{\pi}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

即
$$\frac{\pi}{9}\leqslant\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}x\arctan x\mathrm{d}x\leqslant\frac{2\pi}{3}.$$

(2) 因为 $f'(x)=\mathrm{e}^{x^2-x}(2x-1)$，有惟一驻点 $x=\frac{1}{2}$，当 $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$ 时，$f'(x)>0$，故有最小值 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\mathrm{e}^{-1/2}$. 而由 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 与 $\left[\frac{1}{2},2\right]$ 上的单调性，比较 $f(0)$ 与 $f(2)$，得最大值 $M=f(2)=\mathrm{e}^2$. 所以

$$2\mathrm{e}^{-1/2}\leqslant\int_0^2\mathrm{e}^{x^2-x}\mathrm{d}x\leqslant 2\mathrm{e}^2.$$

例 6 利用第一积分中值定理估计下列定积分：

(1) $\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+(\cos x)/2}$；　　(2) $\int_0^1\frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x$.

解 (1) 因为 $\frac{1}{1+1/2}\leqslant\frac{1}{1+(\cos x)/2}\leqslant\frac{1}{1-1/2}$，即

$$\frac{2}{3}\leqslant\frac{1}{1+(\cos x)/2}\leqslant 2,$$

则
$$\frac{2}{3}\cdot 2\pi\leqslant\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+(\cos x)/2}\leqslant 2\cdot 2\pi,$$

即
$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+(\cos x)/2}=\frac{4\pi}{3}(2\theta),\ |\theta|<1.$$

(2) 因为 $\frac{x^9}{\sqrt{2}}\leqslant\frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\leqslant x^9\quad(0\leqslant x\leqslant 1)$，所以

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 x^9\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1\frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 x^9\mathrm{d}x,$$

即
$$\frac{1}{10\sqrt{2}}\leqslant\int_0^1\frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{10}.$$

例 7 利用第二积分中值定理估计下列定积分：

(1) $\int_{100\pi}^{200\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$； (2) $\int_{a}^{b}\sin x^2\mathrm{d}x$ $(0<a<b)$.

解 (1) 设 $f(x)=\sin x, g(x)=\frac{1}{x}$, $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在 $[100\pi,200\pi]$ 上有界且可积，$g(x)$ 为单调减少函数且非负，则依第二积分中值定理，有

$$I=g(100\pi)\int_{100\pi}^{\xi}\sin x\mathrm{d}x=\frac{1}{100\pi}\int_{100\pi}^{\xi}\sin x\mathrm{d}x.$$

又
$$0<\int_{100\pi}^{\xi}\sin x\mathrm{d}x<2,$$

故
$$\int_{100\pi}^{200\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{2\theta}{100\pi}=\frac{\theta}{100\pi}\ (0<\theta<1).$$

(2) 令 $f(x)=x\sin x^2, g(x)=\frac{1}{x}$，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上可积，且 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 内严格单调减少，故依第二积分中值定理，有

$$\begin{aligned}I&=\int_{b}^{a}\frac{1}{x}x\sin x^2\mathrm{d}x=g(a)\int_{a}^{\xi}\frac{1}{2}\sin x^2\mathrm{d}x^2\\&=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{2}(-\cos x^2)\Big|_{a}^{\xi}=\frac{1}{2a}(\cos a^2-\cos\xi^2)\\&=\frac{1}{a}\sin\frac{\xi^2+a^2}{2}\sin\frac{\xi^2-a^2}{2}=\frac{\theta}{a}\quad(|\theta|\leqslant 1).\end{aligned}$$

例 8 比较下列定积分值的大小：

(1) $\int_0^1\frac{x}{1+x}\mathrm{d}x$ 和 $\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x$；

(2) $\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-x^2}\cos^2x\mathrm{d}x$ 和 $\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-x^2}\cos^2x\mathrm{d}x$.

解 (1) 作辅助函数 $\varphi(x)=\frac{x}{1+x}-\ln(1+x), x\in[0,1]$，则

$$f'(x)=\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{1+x}=-\frac{x}{(1+x)^2}\leqslant 0,$$

即 $f(x)$ 在积分区间上严格单调减少，所以

$$\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)\leqslant 0,\quad \frac{x}{1+x}\leqslant \ln(1+x).$$

由定积分性质，有$\int_0^1 \frac{x}{1+x}dx \leqslant \int_0^1 \ln(1+x)dx$.

若$\int_0^1 \frac{x}{1+x}dx = \int_0^1 \ln(1+x)dx$，则在$[0,1]$上恒有$\frac{x}{1+x}=\ln(1+x)$，但这是不可能的，故必有

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x}dx < \int_0^1 \ln(1+x)dx.$$

（2）对积分$\int_0^{2\pi} e^{-x^2}\cos x^2 dx$ 作代换 $x=\pi+u$，则

$$\int_\pi^{2\pi} e^{-x^2}\cos^2 x dx = \int_0^{2\pi} e^{-(\pi+u)^2}\cos^2(\pi+u)du$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{-(\pi+u)^2}\cos^2 u du = \int_0^{2\pi} e^{-(\pi+u)^2}\cos^2 x dx.$$

当 $0\leqslant x\leqslant \pi$ 时，$e^{-x^2}\leqslant e^{-(\pi+u)^2}$，故

$$\int_0^{\pi} e^{-x^2}\cos^2 x dx \geqslant \int_\pi^{2\pi} e^{-x^2}\cos^2 x dx.$$

例 9 确定下列定积分的符号：

（1）$\int_0^{2\pi}\sin x dx$；（2）$\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{x}dx$；（3）$\int_{-2}^{2}x^3 2^x dx$.

解 将积分变形后，讨论积分区间内被积函数的符号，确定定积分的符号.

（1）
$$\int_0^{2\pi}x\sin x dx = \int_0^{\pi}x\sin x dx + \int_\pi^{2\pi}x\sin x dx\ (x=t+\pi)$$

$$= \int_0^{\pi}x\sin x dx - \int_0^{\pi}(t+\pi)\sin t dt$$

$$= \int_0^{\pi}(x-x-\pi)\sin x dx = -\pi\int_0^{\pi}\sin x dx.$$

因为在$[0,\pi]$上，$\sin x\geqslant 0$，所以

$$\int_0^{2\pi}x\sin x dx < 0.$$

（2）
$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{x}dx = \int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx + \int_\pi^{2\pi}\frac{\sin x}{x}dx\ (x=t+\pi)$$

$$= \int_0^\pi \frac{\sin x}{x}dx - \int_0^\pi \frac{\sin t}{t+\pi}dt = \pi\int_0^\pi \frac{\sin x}{x(x+\pi)}dx.$$

由积分第一中值定理知

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi^2\sin\xi}{\xi(\xi+\pi)} > 0,\ 0 < \xi < \pi.$$

(3) $\int_{-2}^2 x^3 2^x dx = \int_{-2}^0 x^3 e^x dx + \int_0^2 x^3 e^x dx\ (x = -t)$

$$= \int_2^0 t^3 e^{-t}dt + \int_0^2 x^3 e^x dx = \int_0^2 x^3(e^x - e^{-x})dx.$$

同上题,有 $\int_{-2}^2 x^3 2^x dx = 2\xi^3(e^\xi - e^{-\xi}) > 0.$

例 10 设 $x > 0$,证明:存在 $0 < \theta < 1$,使

$$\int_0^x e^t dt = xe^{\theta x},\quad 且\quad \lim_{x\to+\infty}\theta = 1.$$

证 由积分中值定理知,存在 $0 < \theta < 1$,使$\int_0^x e^t dt = xe^{\theta x}$. 又由定积分计算得$\int_0^x e^t dt = e^x - 1$,故有

$$xe^{\theta x} = e^x - 1 \Rightarrow \theta = \frac{1}{x}\ln\frac{e^x-1}{x},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\theta = \lim_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{e^x-1}{x}\right)\Big/x \xlongequal{L'} \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x-1}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)'$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{e^x-1} - \frac{1}{x}\right) = 1.$$

例 11 令$\int_0^x f(t)dt = xf(\theta x)$,求 θ. 设

(1) $f(t) = t^n (n > -1)$; (2) $f(t) = \ln t$.

解 (1) 因为$\int_0^x t^n dt = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$,所以

$$\frac{1}{n+1}x^{n+1} = x^{n+1}\theta^n \Rightarrow \theta = \sqrt[n]{1/(n+1)}.$$

(2) 因为$\int_0^x \ln t dt = x(\ln x - 1)$,所以

$$x(\ln x - 1) = x\ln\theta x \Rightarrow \theta = \frac{1}{e}.$$

三、求定积分的极限

例 12　证明下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = 0$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x}dx = 0$.

证　(1) 由积分第一中值定理，$\exists\, \xi_n \in (0,1)$，使

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = \frac{1}{1+\xi_n}\int_0^1 x^n dx \leqslant \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0.$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = 0\ (\xi_n \text{ 与 } n \text{ 有关}).$$

(2) 由积分第一中值定理，$\exists\, \xi_n \in (n, n+p)$ 使

$$0 \leqslant \int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{1}{\xi_n}\int_n^{n+p} \sin x dx \leqslant \frac{\sin\xi_n}{\xi_n}\cdot p \longrightarrow 0$$

所以
$$\lim_{x\to+\infty}\int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x}dx = 0.$$

例 13　证明：若 $f(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 上的连续函数，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$，则有

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = A.$$

证　因为 $f(x)$ 连续，所以 $|f(x)| \leqslant M, x \in [0, +\infty)$

又
$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{x}\int_0^{\sqrt{x}} f(t)dt + \frac{1}{x}\int_{\sqrt{x}}^x f(t)dt.$$

其中
$$\left|\frac{1}{x}\int_0^{\sqrt{x}} f(t)dx\right| \leqslant \frac{1}{x}\int_0^{\sqrt{x}} |f(t)|dt \leqslant \frac{M}{x}\sqrt{x} \longrightarrow 0$$
$$(x \longrightarrow +\infty);$$

又第二个积分使用积分第一中值定理，得

$$\frac{1}{x}\int_{\sqrt{x}}^x f(t)dt = \frac{1}{x}(x - \sqrt{x})f(\xi_x),\ \xi_x \in (\sqrt{x}, x).$$

因为 $x \longrightarrow +\infty$，$\sqrt{x} \longrightarrow +\infty$，所以 $\xi_x \longrightarrow +\infty$，于是

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_{\sqrt{x}}^x f(t)dt = \lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)f(\xi_x) = A.$$

故
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = 0 + A = A.$$

此极限可以理解为 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的平均值. 本例的条件即平均值存在的条件.

例 14 证明下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\int_0^x\sqrt{t}\sin t\mathrm{d}t=0$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\sin^n x\mathrm{d}x=0$.

证 (1) 本题可由积分第二中值定理来证，设 $f(t)=\sqrt{t}$，$g(t)=\sin t$，$\exists\ \xi_x\in(0,x)$，使

$$0<\left|\frac{1}{x}\int_0^x\sqrt{t}\sin t\mathrm{d}t\right|=\frac{\sqrt{x}}{x}\left|\int_{\xi_x}^x\sin t\mathrm{d}t\right|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x}}|\cos\xi_x-\cos x|\leqslant\frac{2}{\sqrt{x}}\longrightarrow 0\quad(x\longrightarrow+\infty).$$

本例也说明例 13 的命题一般并不可逆.

(2) 设 ε 为任意小的正数，令

$$\int_0^{\pi/2}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2-\varepsilon}\sin^n x\mathrm{d}x+\int_{\pi/2-\varepsilon}^{\pi/2}\sin^n x\mathrm{d}x.$$

由积分第一中值定理，$\exists\ \xi\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}-\xi\right]$，使

$$0<\int_0^{\pi/2-\xi}\sin^n x\mathrm{d}x=\sin^n\xi\int_0^{\pi/2-\xi}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\frac{\pi}{2}\sin^n\xi\longrightarrow 0\quad(n\longrightarrow\infty).$$

又
$$0<\int_{\pi/2-\xi}^{\pi/2}\sin^n x\mathrm{d}x\leqslant\int_{\pi/2-\xi}^{\pi/2}\mathrm{d}x=\xi,$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\sin^n x\mathrm{d}x=0.$$

例 15 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$x_0\in[a,b]$，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int_{nx_0}^{nx_0+1}f\left(\frac{x}{n}\right)\mathrm{d}x=f(x_0).$$

证 由积分第一中值定理，$\exists\ \xi_n\in[nx_0,nx_0+1]$，作代换 $t=x/n$，使

$$I=n\int_{x_0}^{x_0+1/n}f(t)\mathrm{d}t=n\cdot f(\xi_n)\cdot\frac{1}{n}=f(\xi_n).$$

又$\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n = x_0$，由 $f(x)$ 的连续性知

$$\lim_{n\to\infty}\int_{nx_0}^{nx_0+1} f\left(\frac{x}{n}\right)\mathrm{d}x = f(x_0).$$

例 16 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上非负连续，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x} = \max_{a\leqslant x\leqslant b} f(x).$$

证 设 $M = \int \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x) > 0$（否则 $M = 0$），则 $f(x)\equiv 0$，上式显然成立. 由保号性知，$\exists\ [\alpha,\beta]\subset[a,b]$，使

$$0 < M - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant M,\ x\in[\alpha,\beta],$$

于是 $$(M-\varepsilon)^n \leqslant f^n(x) \leqslant M^n,\ x\in[\alpha,\beta].$$

$$(M-\varepsilon)^n(\beta-\alpha) \leqslant \int_\alpha^\beta f^n(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f^n\mathrm{d}x \leqslant M^n(b-a),$$

即 $$(M-\varepsilon)\ \sqrt[n]{\beta-\alpha} \leqslant \sqrt[n]{\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x} \leqslant M\ \sqrt[n]{(b-a)}.$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\ \sqrt[n]{\beta-\alpha} = \lim\limits_{n\to\infty}\ \sqrt[n]{b-a} = 1$，所以由 ε 的任意性，有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x} = M = \max_{a\leqslant x\leqslant b} f(x).$$

例 17 设 $f(x)\in$ 在$[1,\mathrm{e}]$上可积，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\int_1^{1+/n} f(x^n)\mathrm{d}x\right] = \int_1^{\mathrm{e}}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t.$$

证 令 $x^n = t$，$\mathrm{d}x = \dfrac{1}{n}\ \sqrt[n]{t}\ /t\mathrm{d}t$，则由积分第一中值定理得知 $\exists\ \xi_n\in\left[1,\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right]$，使

$$\text{原式} = \lim_{n\to\infty}\int_1^{(1+1/n)^n}\frac{\sqrt[n]{t}}{t}\cdot f(t)\mathrm{d}t$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\xi_n}\int_1^{(1+1/n)^n}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t = \int_1^{\mathrm{e}}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t.$$

例 18 证明：若 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积，则有（黎曼引理）

$$\lim_{\lambda\to 0}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x = 0,\quad \lim_{\lambda\to 0}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x = 0.$$

证　$\forall\ \varepsilon > 0, \exists$ 对$[a,b]$的分割T，使$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}$. 记$m_i = \inf_{\Delta x_i} f(x)$，$i = 1,2,\cdots,n$，于是

$$\int_a^b f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x.$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}[f(x) - m_i]\sin\lambda x\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{n}m_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}\sin\lambda x\mathrm{d}x.$$

而 $|f(x) - m_i| \leqslant \omega_i, x\in\Delta_i, i = 1,2,\cdots,n$，且

$$\left|\int_{t_1}^{t_2}\sin\lambda(x)\mathrm{d}x\right| = \frac{1}{\lambda}|\cos t_1\lambda - \cos t_2\lambda| \leqslant \frac{2}{\lambda}.$$

故又有　$$\left|\int_a^b f(x)\sin\lambda x\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i + \frac{2}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}|m_i|,$$

当分割T随ε确定后，$\sum_{i=1}^{n}|m_i|$为一常值. 故当$\lambda > \frac{4}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}|m_i|$时，$\frac{2}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}|m_i| < \frac{\varepsilon}{2}$，从而知

$$\lim_{\lambda\to 0}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x = 0\ \left(\left|\int_a^b f(x)\sin\lambda x\right|\mathrm{d}x < \varepsilon\right).$$

请读者用同样方法自己证出第二个等式. 实际上也可以用分部积分法计算定积分后，再用估值性得出：

$$\int_a^b f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\lambda}\int_a^b f(x)\mathrm{d}\sin\lambda x = \frac{1}{\lambda}[f(x)\sin\lambda x]\Big|_a^b - \frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\lambda}[f(b)\sin(\lambda b) - f(a)\sin(\lambda a)] - \frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x,$$

显然　$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}[f(b)\sin(\lambda b) - f(a)\sin(\lambda a)] = 0.$$

又$f'(x)$在$[a,b]$上连续，则$|f'(x)| \leqslant M, x\in[a,b]$，故

$$\frac{1}{\lambda}\left|\int_a^b f'(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{\lambda}\int_a^b |f'(x)\sin\lambda x|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \frac{1}{\lambda}\int_a^b |f'(x)|\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{\lambda}m(b-a) \to 0 \ (\lambda \to \infty).$$

所以
$$\lim_{\lambda\to 0}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x = 0.$$

这里，$f(x)$ 应在$[a,b]$上有连续导数.

例 19 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\int_0^{2\pi}\sin^{2n}x\mathrm{d}x\right)\Big/\left(\int_0^{2\pi}\sin^{2n+1}x\mathrm{d}x\right) = 1.$

证 用迫敛性证明. 因为当 $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ 时，$0 \leqslant \sin x \leqslant 1$，故

$$0 \leqslant \sin^{2n+1}x \leqslant \sin^{2n}x \leqslant \sin^{2n-1}x,$$

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}x\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\pi/2}\sin^{2n}x\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\pi/2}\sin^{2n-1}x\mathrm{d}x.$$

不等式各项同除以第一项，有

$$1 \leqslant \frac{\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}x\mathrm{d}x}{\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}x\mathrm{d}x} \leqslant \frac{\int_0^{\pi/2}\sin^{2n-1}x\mathrm{d}x}{\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}x\mathrm{d}x}.$$

又由定积分的瓦里士(Wallis)公式，知

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2n-1}x\mathrm{d}x = \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}, \quad \int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}x\mathrm{d}x = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!},$$

所以上述不等式的后项等于$\frac{2n+1}{2n} \to 1 \ (n \to \infty)$. 在上述不等式两边取极限，由夹逼准则得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}x\mathrm{d}x\right)\Big/\left(\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}x\mathrm{d}x\right) = 1.$$

例 20 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^x\cos nx = 0.$

证 $\forall\ \varepsilon > 0$，取 $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$，由$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\arctan\frac{1}{n} = 0$，知$\exists\ N_1 > 0$，使当 $n > N_1$ 时，$0 < x_n < \delta$，则在$[0,\delta]$上有

$$f(x) = \mathrm{e}^x\cos^n x \leqslant \mathrm{e}^{x_n}\cos^n x_n = M_n.$$

因为当 $f'(x) = \mathrm{e}^x\cos^{n-1}x(\cos x - n\sin x) = 0$ 且 $n \geqslant 2$ 时，x

$= \frac{\pi}{2}$, $\arctan\frac{1}{n} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$，有

$$\max f(x) = e^{\arctan(1/n)}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\right)^n \longrightarrow 1\ (n \longrightarrow \infty),$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = 1$，所以 $\exists N_2 > 0$，当 $n > N_2$ 时，有 $0 < M_n < 2$. 取 $n > \max\{N_1, N_2\}$ 有

$$0 < \int_0^{\delta} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\delta} M_n \mathrm{d}x = M_n \cdot \frac{\varepsilon}{4} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

而在 $n > N_1$ 时，$f(x)$ 在 $\left[\delta, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调减少，只需

$$n > N_3 = \ln\left(\frac{2\varepsilon}{2\pi - \varepsilon}e^{-\pi/4}\right)\Big/\ln\cos\frac{\varepsilon}{4},$$

就有 $$0 < \int_{\delta}^{\pi/2} f(x)\mathrm{d}x < e^{\delta}\cos^{b}\delta \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)$$

$$= \frac{1}{4}e^{\varepsilon/4}\left(\cos\frac{\varepsilon}{4}\right)^n (2\pi - \varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$$

或 $$\left(\cos\frac{\varepsilon}{4}\right)^n < \frac{2\varepsilon}{(2\pi - \varepsilon)e^{\varepsilon/4}}.$$

所以，当 $n > N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$ 时，有

$$0 < \int_0^{\pi/2} f(x)\mathrm{d}x < \int_0^{\delta} f(x)\mathrm{d}x + \int_{\delta}^{\pi/2} f(x)\mathrm{d}x < \varepsilon,$$

即 $$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2} e^x\cos^n x\mathrm{d}x = 0.$$

例 21 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_{n^2}^{n^2+n} \frac{1}{\sqrt{x}}e^{-1/x}\mathrm{d}x = 1$.

证 由积分中值定理，$\exists\, n^2 \leqslant \xi_n \leqslant n^2 + n$，使

$$\int_{n^2}^{n^2+n} \frac{1}{\sqrt{x}}e^{-1/x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\xi_n}}e^{-1/\xi_n} \cdot n.$$

又 $$f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}e^{-1/x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) < 0\ (x > 2),$$

所以，当 $x > 2$ 时 $f(x)$ 严格单调减少，即

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\mathrm{e}^{-1/(n^2+n)} \leqslant \frac{n}{\sqrt{\xi_n}}\mathrm{e}^{-1/\xi_n} \leqslant \frac{n}{\sqrt{n^2}}\mathrm{e}^{-1/n^2} = \mathrm{e}^{-1/n^2x}.$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\mathrm{e}^{-1/(n^2+n)} = \lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{-1/n^2} = 1$，故依迫敛性，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{n^2}^{n^2+n}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-1/x}\mathrm{d}x = 1.$$

例 22 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，证明：

$$\lim_{h\to 0^+}\int_0^1\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}f(0).$$

证 $$\int_0^1\frac{hf(x)}{h^2+x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{h^{1/4}}\frac{hf(x)}{h^2fx^2}\mathrm{d}x + \int_{h^{1/4}}^1\frac{hf(x)}{h^2+x^2}\mathrm{d}x = I_1 + I_2.$$

而由积分中值定理，得

$$I_1 = f(\xi)\int_0^{h^{1/4}}\frac{h}{h^2+x^2}\mathrm{d}x = f(\xi)\arctan\frac{x}{h}\Big|_0^{h^{1/4}}$$

$$= f(\xi)\arctan(1/h^{1/4}) \longrightarrow f(0)\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$(\xi\in(0,h^{1/4}),h\longrightarrow 0^+),$$

$$|I_2| = \left|\int_{h^{1/4}}^1\frac{hf(x)}{h^2+x^2}\mathrm{d}x\right| \leqslant M\int_{h^{1/4}}^1\frac{h}{h^2+x^2}\mathrm{d}x \quad (|f(x)|\leqslant M)$$

$$= M[\arctan(1/h) - \arctan(1/h^{3/4})]h \longrightarrow 0 \quad (h\longrightarrow 0^+).$$

所以 $$\lim_{x\to 0^+}\int_0^1\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x = 0 + \frac{\pi}{2}f(0) = \frac{\pi}{2}f(0).$$

例 23 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续且严格单调减少，$f(0)=1$，$f(1)=0$. 证明：$\forall\ \delta\in(0,1)$，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_\delta^1(f(x))^n\mathrm{d}x}{\int_0^\delta(f(x))^n\mathrm{d}x} = 0.$$

证 因为 $f(x)$ 严格单调减少，$0 < f(\delta) < f(\delta/2)$，$\left[f(\delta)/f\left(\frac{\delta}{2}\right)\right]^n \longrightarrow 0\ (n\longrightarrow\infty)$. 由迫敛性，$\forall\ \delta\in(0,1)$，有

$$0 \leqslant \frac{\int_\delta^1 [f(x)]^n \mathrm{d}x}{\int_0^\delta [f(x)]^n \mathrm{d}x} \leqslant \frac{\int_\delta^1 [f(x)]^n \mathrm{d}x}{\int_0^{\delta/2} [f(x)]^n \mathrm{d}x} \leqslant \frac{\int_\delta^1 [f(x)]^n \mathrm{d}x}{\int_0^{\delta/2} \left[f\left(\frac{\delta}{2}\right)\right]^n \mathrm{d}x}$$

$$\leqslant \left[f(\delta)/f\left(\frac{\delta}{2}\right)\right]^n \cdot \frac{1-\delta}{\delta/2} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty),$$

所以，原式 $= 0$.

例 24 已知 $f(t)$ 可微，$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$，求

$$\lim_{x \to +\infty} \int_x^{x+2} t\left(\sin \frac{3}{t}\right) f(t) \mathrm{d}t.$$

解 依积分中值定理，$\exists\ \xi \in [x, x+2]$，使得

$$\lim_{x \to +\infty} \int_x^{x+2} t\left(\sin \frac{3}{t}\right) f(t) \mathrm{d}x = \lim_{x \to +\infty} \xi \sin\left(\frac{3}{\xi}\right) f(\xi) \cdot 2$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 6\left(\sin \frac{3}{\xi} \bigg/ \frac{3}{\xi}\right) \cdot f(\xi) = 6.$$

例 25 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n \to \infty} \int_n^{n+1} x^2 \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x$；　　(2) $\lim\limits_{n \to \infty} \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} \mathrm{d}x$.

解 (1) 因为 $f'(x) = 2x\mathrm{e}^{-x^2} - 2x^3\mathrm{e}^{-x^2} = 2x\mathrm{e}^{-x^2}(1 - x^2) < 0$，所以在 $[n, n+1]$ 上，由估值性，得

$$(n+1)^2 \mathrm{e}^{-(n+1)^2} \leqslant \int_n^{n+1} x^2 \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x \leqslant n^2 \mathrm{e}^{-n^2}.$$

而
$$\lim_{n \to \infty} (n+1)^2 \mathrm{e}^{-(n+1)^2} = \lim_{n \to \infty} n^2 \mathrm{e}^{-n^2} = 0$$

（由洛必达法则 $x^2/\mathrm{e}^{x^2} \longrightarrow 0$），

故
$$\lim_{n \to \infty} \int_n^{n+1} x^2 \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x = 0.$$

(2) 因为 $n > 0$ 时，$1/x^n$ 在 $[n, n+1]$ 上连续，$\mathrm{e}^x > 0$，所以由推广的积分中值定理，$\exists\ \xi \in [n, n+1]$，使得

$$\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} \mathrm{d}x = \frac{1}{\xi^n} \int_n^{n+1} \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^n}{\xi_n}(\mathrm{e} - 1).$$

又 $$0 \leqslant \frac{e^n}{\xi^n}(e-1) \leqslant \frac{2e^n}{n^n} = 2\left(\frac{e}{n}\right)^n < \left(\frac{e}{3}\right)^n \to 0 \quad (n \to \infty),$$

故 $$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+1} \frac{e^x}{x^n}dx = 0.$$

四、关于定积分的等式和不等式的证明

关于定积分有许多著名的和常用的等式和不等式，几乎每个等式和不等式都有很多种证明方法. 可以用定义、可积条件、定积分性质、定理，借助已知等式或不等式，计算定积分以及借助各种技巧来证明. 做证明题首先要熟悉概念，其次是熟悉技巧，要了解命题的条件，依据条件选择证明的方法和提出证明的依据，使证明清晰严密，无懈可击.

例 26 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，且单调增加，证明：

$$\int_a^b xf(x)dx \geqslant \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx.$$

证法 1 用定积分性质证. 由 $f(x)$ 的单调性，有

$$\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left[f(x)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] \geqslant 0,$$

故 $$\int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left[f(x)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]dx \geqslant 0.$$

又 $$\int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)f\left(\frac{a+b}{2}\right)dx$$

$$\xlongequal{t=x-(a+b)/2} f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} tdt = 0,$$

解上式两边积分式，即得

$$\int_a^b xf(x)dx \geqslant \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx.$$

证法 2 用积分第一中值定理证.

$$\int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)dx$$

$$= \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)dx.$$

依积分第一中值定理，$\exists\ \xi_1 \in \left[0, \frac{a+b}{2}\right], \xi_2 \in \left[\frac{a+b}{2} b\right]$，使

$$I = f(\xi_1)\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x + f(\xi_2)\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= - f(\xi_1)\frac{(b-a)^2}{2} + f(\xi_2)\frac{(b-a)^2}{2} \quad (\text{由 } f(x) \text{ 的单调性})$$

$$= \frac{(b-a)^2}{2}[f(\xi_2) - f(\xi_1)] \geqslant 0.$$

证法 3　用积分第二中值定理证. 因为 $f(x)$ 单调增加，所以 $\exists\ \xi \in [a,b]$，使

$$I = f(a)\int_a^{\xi}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x + f(b)\int_{\xi}^b\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= f(a)\int_a^b\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x + [f(b) - f(a)]\int_{\xi}^b\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= [f(b) - f(a)]\left[\frac{b^2 - \xi^2}{2} - \frac{a+b}{2}(b - \xi)\right]$$

$$= [f(b) - f(a)]\frac{b-\xi}{2}(\xi - a) \geqslant 0.$$

证法 4　由 $f(x)$ 的单调性知，$\forall\ t, x \in [a,b]$，有

$$(t - x)[f(t) - f(x)] \geqslant 0.$$

在上式中固定 x，对 t 从 a 到 b 积分，得

$$\int_a^b tf(t)\mathrm{d}t - x\int_a^b f(t)\mathrm{d}t + xf(x)(b-a) - f(x)\frac{b^2 - a^2}{2} \geqslant 0.$$

再将上式对 x 从 a 到 b 积分，得

$$(b-a)\int_a^b tf(t)\mathrm{d}t - \frac{b^2 - a^2}{2}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t + (b-a)\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$$

$$- \frac{b^2 - a^2}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

将上式中变量 t 改为 x，即可化简得

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

证法 5　用变上限积分(下节内容) 证. 令

$$F(x) \triangleq \int_a^x tf(t)\mathrm{d}t - \frac{a+x}{2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,$$

显然 $F(a)=0$. 而对 $x\in(a,b]$，有

$$F'(x)=xf(x)-\frac{1}{2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-\frac{a+x}{2}f(x)$$
$$=\frac{x-a}{2}f(x)-\frac{1}{2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{2}\int_a^x[f(x)-f(t)]\mathrm{d}t\geqslant 0.$$

即 $F(x)$ 单调增加，$F(x)\geqslant 0$，$F(b)\geqslant 0$. 因此

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

本例的物理意义是：如果曲线 $y=f(x)$ 单调上升，则密度均匀的曲边梯形 $\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,0\leqslant y\leqslant f(x)\}$ 的质心不可能落在直线 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 的左边.

因为篇幅的关系，我们在以后的每例中仍然只选讲一种证明方法，读者可尝试其它方法.

例 27 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 $f'(x)\geqslant m\geqslant 0$，$|f(x)|\leqslant\pi$，证明：$\left|\int_a^b\sin f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\dfrac{2}{m}$.

证 因为 $f(x)$ 严格单调增加，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上至多有一零点 c，从而

$$\int_a^b\sin f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{1}{f'(x)}\sin f(x)f'(x)\mathrm{d}x=\int_a^c+\int_c^b.$$

由积分第一中值定理和分部积分法

$$I=\frac{1}{f'(\xi)}\int_a^c\sin f(x)\mathrm{d}f(x)+\frac{1}{f'(\eta)}\int_c^b\sin f(x)\mathrm{d}f(x)$$
$$=\frac{1}{f'(\eta)}[1-\cos f(b)]-\frac{1}{f'(\xi)}[1-\cos f(a)],$$

所以

$$\left|\int_a^b\sin f(x)\mathrm{d}x\right|\geqslant\frac{2}{m}.$$

例 28 设 $b>a>0$，$\theta>0$，证明：$\exists\ |\xi|<1$，使

$$\int_a^b\frac{\mathrm{e}^{-\theta x}\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{2\xi}{a}.$$

证 令 $f(x)=\frac{e^{-\theta x}}{x}$，$g(x)=\sin x$，则 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，又 $f'(x)=\frac{1+\theta x}{x^2}e^{\theta x}<0$，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调减少非负. 于是，由积分第二中值定理知，$\exists\ \eta\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b \frac{e^{-\theta x}\sin x}{x}dx=f(a)\int_a^\eta g(x)dx=\frac{e^{-\theta a}}{a}(\cos a-\cos\eta),$$

即
$$\left|\int_a^b e^{-\theta x}x^{\sin x}dx\right|<\frac{2}{a}.$$

令 $\xi=\frac{a}{2}\int_a^b \frac{e^{-\theta}\sin x}{x}dx$，则有 $|\xi|<1$，且

$$\int_a^b \frac{e^{-\theta x}\sin x}{x}dx=\frac{2\xi}{a}.$$

例 29 设 $f(x)$ 在 $[2,4]$ 上连续且可导，且 $f(2)=f(4)=0$，证明：$\max\limits_{x\in[2,4]}|f'(x)|\geqslant\left|\int_2^4 f(x)dx\right|$.

证 取 $x\in[2,4]$，在 $[2,x]$ 和 $[x,4]$ 上分别对 $f(x)$ 使用拉格朗日中值定理，则 $\exists\ \xi_1\in[2,x]$，$\xi_2\in[x,4]$，使得

$$f(x)-f(2)=f'(\xi_1)(x-2)\Rightarrow f(x)=f'(\xi_1)(x-2),$$
$$f(4)-f(x)=f'(\xi_2)(4-x)\Rightarrow f(x)=f'(\xi_2)(x-4),$$

令 $M=\max\limits_{x\in[2,4]}|f'(x)|$，则

$$|f(x)|\leqslant M(x-2),\ |f(x)|\leqslant M(4-x).$$

故
$$\left|\int_2^4 f(x)dx\right|\leqslant\int_2^4|f(x)|dx$$
$$\leqslant\int_2^3 M(x-2)dx+\int_3^4 M(4-x)dx=\frac{M}{2}+\frac{M}{2}=M,$$

即
$$\max_{x\in[2,4]}|f'(x)|\geqslant\left|\int_2^4 f(x)dx\right|.$$

例 30 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续的二阶导数，证明：$\exists\ \xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{24}(b-a)^3f''(\xi).$$

证 设$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,则$F'(x)=f(x)$,$F''(x)=f'(x)$,
$F'''(x)=f''(x)$. 将$F(x)$在$x_0=\frac{1}{2}(a+b)$展为二阶泰勒公式,得

$$F(b)=F(x_0)+F'(x_0)(b-x_0)+\frac{F''(x_0)}{2!}(b-x_0)^2$$
$$+\frac{F'''(\xi_1)}{3!}(b-x_0)^3(x_0<\xi_1<b),$$
$$F(a)=F(x_0)+F'(x_0)(a-x_0)+\frac{F''(x_0)}{2!}(a-x_0)^2$$
$$+\frac{F'''(\xi_2)}{3!}(a-x_0)^3(a<\xi_2<x_0).$$

将上面两式相减,由于$b-x_0=\frac{1}{2}(b-a)=-(a-x_0)$,故

$$F(b)-F(a)=2F'(x_0)\frac{1}{2}(b-a)$$
$$+\frac{1}{48}(b-a)[F'''(\xi_1)-F'''(\xi_2)].$$

因为$f''(x)$连续,由介值定理,∃$\xi_1\in[\xi_1,\eta_2]$,使

$$F'''(\xi_1)+F'''(\xi_2)=f''(\xi_1)+f''(\xi_2)=2f''(\xi),$$
$$F'(x_0)=f(x_0)=f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

所以 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$ (牛顿-莱布尼茨公式)

$$=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{24}(b-a)^3f''(\xi).$$

例29与例30的证明是用微分学的中值定理完成的.

例31 证明:若函数$f(x)$与$g(x)$在[0,1]上有相同的单调性,则

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

证 因为$f(x)$,$g(x)$在[0,1]上可积,所以$f(x)\cdot g(x)$在[0,1]上也可积. 现将[0,1]n等分,$\Delta_i=\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]$,取$\xi_i=\frac{i}{n}$, i

$=1,2,\cdots,n$. 由于 $f(x),g(x)$ 有相同的单调性，所以

$$\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}g\left(\frac{i}{n}\right)\leqslant n\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)g\left(\frac{i}{n}\right),$$

即
$$\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}g\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}\leqslant\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)g\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}.$$

故由定积分定义，对不等式取 $n\to\infty$ 的极限，得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

例 32 证明：若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负连续，且 $p>1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则有不等式

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_a^b[f(x)]^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\left(\int_a^b[g(x)]^q\mathrm{d}x\right)^{1/q}$$

成立. 不等式称赫尔德积分不等式.

当 $p=q=2$ 时，不等式称施瓦兹积分不等式.

证 赫尔德积分不等式可用定积分定义和不等式 $AB\leqslant\frac{A^p}{p}+\frac{B^q}{q}$ $(A\geqslant 0,B\geqslant 0)$（见第四章第四节例 18）证，也可以用定积分的单调性与上述不等式来证. 本例利用定积分定义与赫尔德积分不等式（见第一章第三节例 11）来证.

对 $[a,b]$ 作等分 $T,\Delta_i=[x_{i-1},x_i]$，取 $\xi_i=x_i,i=1,2,\cdots,n$. 由赫尔德积分不等式，有

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)g(\xi_i)\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}[f(\xi_i)]^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}[g(\xi_i)]^q\right)^{1/q},$$

其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,p>1$. 上式两边乘以 $\frac{b-a}{n}$，得

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)g(\xi_i)\frac{b-a}{n}$$
$$\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}[f(\xi_i)]^p\frac{b-a}{n}\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}[g(\xi_i)]^q\frac{b-a}{n}\right)^{1/q}.$$

由于 $[f(x)]^p,[g(x)]^q,f(x)g(x)$ 均连续，故在 $[a,b]$ 上可积，取 n

$\to\infty$ 的极限,依定积分定义,有

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_a^b [f(x)]^p\right)^{1/p}\left(\int_a^b [g(x)]^q\right)^{1/q}.$$

例 33 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,证明:施瓦兹积分不等式

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

证 除当作赫尔德积分不等式特例外,还可以用实二次三项式的判别式来证.

设 $\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x \neq 0$,则对实变量 λ 的二次三项式,有

$$\int_a^b [f(x)+\lambda g(x)]^2\mathrm{d}x$$

$$=\lambda^2\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x + 2\lambda\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x + \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \geqslant 0,$$

其判别式非正,即

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 - \left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right) \leqslant 0,$$

故 $$\left|\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

例 34 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有一阶连续导数,且 $f(a)=0$,证明:

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b [f'(x)]^2\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_a^b [f'(x)]^2(x-a)^2\mathrm{d}x.$$

证 由题设知 $f(x)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t\ (a\leqslant x\leqslant b)$.

依赫尔德积分不等式,得

$$f^2(x) = \left[\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t\right]^2 \leqslant \int_a^x [f'(t)]^2\mathrm{d}t \cdot \int_a^x 1^2\mathrm{d}x$$

$$=(x-a)\int_a^x [f'(t)]\mathrm{d}x.$$

对上式两边从 a 到 b 积分,用分部积分法,可得

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b\left[(x-a)\int_a^x [f'(t)]^2\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b [f'(x)]^2\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_a^b [f'(x)]^2(x-a)^2\mathrm{d}x.$$

例 35 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的导函数，且 $f(a)=0$，证明：

$$\int_a^b |f(x)f'(x)|\mathrm{d}x \leqslant \frac{b-a}{2}\int_a^b [f'(x)]^2\mathrm{d}x.$$

证 令 $g(x)=\int_0^x |f'(t)|\mathrm{d}t\ (a\leqslant x\leqslant b)$，则 $g'(x)=|f'(x)|$，由 $f(a)=0$ 知

$$|f(x)| = |f(x)-f(a)| = \left|\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant \int_a^x |f'(t)|\mathrm{d}t = g(x).$$

故 $$\int_a^b |f(x)f'(x)|\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)g'(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}g(x)$$

$$= \frac{1}{2}g^2(x)\Big|_a^b = \frac{1}{2}\left(\int_a^b |f'(t)|\mathrm{d}t\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\int_a^b 1\cdot|f'(t)|\mathrm{d}t\right)^2.$$

由施瓦兹积分不等式，有

$$\int_a^b |f(x)f'(x)|\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}\int_a^b 1^2\mathrm{d}x\int_a^b |f'(t)|^2\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \frac{b-a}{2}\int_a^b [f'(x)]^2\mathrm{d}x.$$

例 36 证明：若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负连续，且 $p>1$，则有不等式

$$\left(\int_a^b [f(x)+g(x)]^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}$$

$$\leqslant \left(\int_a^b [f(x)]^p\mathrm{d}x\right)^{1/p} + \left(\int_a^b [g(x)]^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}$$

成立. 不等式称为闵可夫斯基积分不等式.

证 利用赫尔德积分不等式和 $q(p-1)=p$，有

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]^p\mathrm{d}x = \int_a^b [f(x)+g(x)][f(x)+g(x)]^{p-1}\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b f(x)[f(x)+g(x)]^{p-1}\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)[f(x)+g(x)]^{p-1}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \left(\int_a^b [f(x)]^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\left(\int_a^b [f(x)+g(x)]^{q(p-1)}\mathrm{d}x\right)^{1/q}$$

$$+ \left(\int_a^b [g(x)]^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\left(\int_a^b [f(x)+g(x)]^{q(p-1)}\mathrm{d}x\right)^{1/q}$$

$$= \left\{\left(\int_a^b [f(x)]^p dx\right)^{1/p} + \left(\int_a^b [g(x)]^p dx\right)^{1/p}\right\}$$

$$\cdot \left(\int_a^b [f(x)+g(x)]^p dx\right)^{1/p},$$

或
$$\left(\int_a^b [f(x)+g(x)]^p dx\right)^{1-1/q}$$
$$\leqslant \left(\int_a^b [f(x)]^p dx\right)^{1/p} + \left(\int_a^b [g(x)]^p dx\right)^{1/p},$$

即
$$\left(\int_a^b [f(x)+g(x)]^p dx\right)^{1/p}$$
$$\leqslant \left(\int_a^b [f(x)]^p dx\right)^{1/p} + \left(\int_a^b [g(x)]^p dx\right)^{1/p}.$$

例 37 证明:若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调减少,则 $\forall a \in (0,1)$,不等式 $a\int_0^1 f(x)dx \leqslant \int_0^a f(x)dx$ 成立.

证 因为,所证不等式可化为

$$a\int_0^1 f(x)dx = a\int_0^a f(x)dx + a\int_a^1 f(x)dx \leqslant \int_0^a f(x)dx,$$

故只需证
$$\frac{1}{1-a}\int_a^1 f(x)dx \leqslant \frac{1}{a}\int_0^a f(x)dx.$$

又 $f(x)$ 单调单调减少,所以

$$\frac{1}{1-a}\int_a^1 f(x)dx \leqslant \frac{1}{1-a}\int_a^1 f(a)dx = f(a),$$

而
$$\frac{1}{a}\int_0^a f(x)dx \geqslant \frac{1}{a}\int_0^a f(a)dx = f(a),$$

故
$$\frac{1}{1-a}\int_a^1 f(x)dx \leqslant \frac{1}{a}\int_0^a f(x)dx.$$

例 38 设 $a>0$,$f'(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续,证明:

$$|f(0)| \leqslant \frac{1}{a}\int_0^a |f(x)|dx + \int_0^a |f'(x)|dx.$$

证 由积分第一中值定理知,$\exists\, \xi \in [0,a]$,使

$$\int_0^a |f(x)|dx = af(\xi).$$

而
$$f(\xi) - f(0) = \int_0^\xi f'(x)dx,$$

即 $$f(0)=f(\xi)-\int_0^{\xi}f'(x)\mathrm{d}x,$$

故 $$|f(0)|=\left|f(\xi)-\int_0^{\xi}f'(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant|f(\xi)|\left|\int_0^{\xi}f'(x)\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant|f(\xi)|+\int_0^{\xi}|f'(x)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\frac{1}{a}\int_0^{a}|f(x)|\mathrm{d}x+\int_0^{a}|f'(x)|\mathrm{d}x.$$

例 39 设 $\varphi(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$E=\varphi([a,b])$，$f(x)$ 在 E 上为可微凸函数，证明：

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f[\varphi(t)]\mathrm{d}t>f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b\varphi(t)\mathrm{d}t\right).$$

证 令 $c=\frac{1}{b-a}\int_a^b\varphi(t)\mathrm{d}t$，则命题转化为证

$$\int_a^b f[\varphi(x)]\mathrm{d}t\geqslant(b-a)f(c).$$

由题设知，$f(x)$ 为可微凸函数，故 $\forall\, x\in E$，有

$$f(x)\geqslant f(c)+f'(c)(x-c).$$

于是 $$f[\varphi(t)]\geqslant f(c)+f'(c)[\varphi(t-c)],$$

$$\int_a^b f[\varphi(t)]\mathrm{d}t\geqslant(b-a)f(c)+f'(c)\int_a^b\varphi(t)\mathrm{d}t-f'(c)c(b-a)$$

$$=(b-a)f(c),$$

故 $$\frac{1}{b-a}\int_a^b f[\varphi(t)]\mathrm{d}t>f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b\varphi(t)\mathrm{d}t\right).$$

例 40 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=0$，$|f'(x)|\leqslant k$，证明：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{(b-a)^2}{2}k.$$

证 依拉格朗日中值定理，有

$$f(x)-f(a)=f'(\xi)(x-a),\ \xi\in(a,x)\subset(a,b).$$

对上式两边在 $[a,b]$ 上积分，得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(a)\mathrm{d}x+\int_a^b(x-a)f'(\xi)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant f(a)(b-a)+\int_a^b |(x-a)f'(\xi)|\mathrm{d}x$$

$$=f(a)(b-a)+\int_a^b (x-a)|f'(\xi)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant f(a)(b-a)+k\int_a^b (x-a)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant k\int_a^b (x-a)\mathrm{d}x=\frac{(b-a)^2}{2}k.$$

例 41 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上二次可导，且 $f''(x)>0$，证明：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

证 利用泰勒公式，将 $f(x)$ 在 $x_0=\frac{1}{2}(a+b)$ 处展为一阶泰勒公式，因为 $f''(x)>0$，故

$$f(x)\geqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right).$$

对上式两边在$[a,b]$上积分，得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x+\int_a^b f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x.$$

而 $$\int_a^b f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x=f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{1}{2}\left[\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right]_a^b$$

$$=\frac{1}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right]=0,$$

故 $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

例 42 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上非负连续，证明：

$$\mathrm{e}^{\int_0^1 \ln f(x)\mathrm{d}x}\leqslant \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

证 由题设知 $f(x)$ 和 $\ln f(x)$ 在$[0,1]$上可积，将$[0,1]$ n 等分，作积分和

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right),$$

$$\int_0^1 \ln f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln f\left(\frac{i}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\ln\left[\prod_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\right]^{1/n},$$

所以 $\mathrm{e}^{\int_0^1 \ln f(x)\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\ln\prod\limits_{i=1}^{n}\left[f\left(\frac{i}{n}\right)\right]^{1/n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\prod\limits_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\right]^{1/n}.$

利用不等式 $\sqrt{a_1a_2\cdots a_n} \leqslant \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$，得

$$\left[\prod_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\right]^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right),$$

故
$$\mathrm{e}^{\int_0^1 \ln f(x)\mathrm{d}x} \leqslant \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

五、利用定积分研究函数

利用定积分研究函数的性态，往往要和以前学过的许多知识结合起来，因而具有一定的难度．这就要求我们对概念要理解和融会贯通，对方法和技巧要深知并熟练掌握．只要努力，这是容易做到的．

例 43 设 $F(x) = \int_0^a f(x+y)\mathrm{d}y$, $a > 0$, $f(u)$ 为处处有定义且单调增加的连续函数．讨论 $F(x)$ 的增减性．

解 任取 x_1, x_2，使 $x_1 < x_2$，则 $x_1 + y < x_2 + y$．故

$$f(x_2 + y) - f(x_1 + y) \geqslant 0.$$

于是
$$\begin{aligned} F(x_2) - F(x_1) &= \int_0^a f(x_2 + y)\mathrm{d}y - \int_0^a f(x_1 + y)\mathrm{d}y \\ &= \int_0^a [f(x_2 + y) - f(x_1 + y)]\mathrm{d}y \geqslant 0. \end{aligned}$$

所以，$F(x)$ 是单调增加函数．

例 44 设 $f(x)$ 为奇函数，$f(x)$ 可微，证明：$f'(x)$ 与 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 都是偶函数．

证 奇函数的导数是偶函数，偶函数的导数是奇函数，可以用定义（见第三章第一节例 1）证明 $f'(x)$ 为偶函数．

下面证$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$是偶函数. 令$\varphi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,则

$$\varphi(-x)=\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t \xlongequal{t=-u} -\int_0^x f(-u)\mathrm{d}u$$
$$=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=\varphi(x).$$

所以,$\varphi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$是偶函数.

例 45 设$f(x)$在$[x,+\infty)$连续可导,且

$$f'(x)=\frac{1}{1+f^2(x)}\left[\sqrt{\frac{1}{x}}-\sqrt{\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)}\right],$$

证明:$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在.

证 因为$x\geqslant 1$时,$\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)\leqslant\frac{1}{x}$,所以$f'(x)\geqslant 0$,即$f(x)$在$[1,+\infty)$上单调增加. 又

$$f'(x)\leqslant\sqrt{\frac{1}{x}}-\sqrt{\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)}\leqslant\sqrt{\frac{1}{x}}-\sqrt{\frac{1}{x+1}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\leqslant\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}\ \sqrt{x+1}}$$
$$=\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x(x+1)}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{x^3}}.$$

故
$$\int_1^x f'(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_1^x\frac{1}{2\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x.$$

比较定积分值,得$f(x)-f(1)\leqslant 1-\frac{1}{\sqrt{x}}\leqslant 1$. 知$f(x)\leqslant f(1)+1$,即$f(x)$有上界. 由于函数$f(x)$单调增加且有上界,所以$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在.

例 46 设$f(x)$在$[a,+\infty)$上连续可导,且$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$和$\int_a^{+\infty} f'(x)\mathrm{d}x$均收敛. 证明:$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$.

证 因为$f(x)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t+f(a)$,而$\int_a^{+\infty} f'(x)\mathrm{d}x$收敛,即

$\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$ 存在，因而 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$.

用反证法证 $A \neq 0$. 设 $A > 0$ ($A < 0$ 同样可证)，则对 $A\exists\ M > 0$，使当 $x \geqslant M$ 时，有 $f(x) > \frac{A}{2}$. 此时

$$\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\left[\int_0^M f(t)\mathrm{d}t + \int_M^x f(t)\mathrm{d}t\right]$$

$$> \lim_{x\to+\infty}\left[\int_0^M f(t)\mathrm{d}t + \int_M^x \frac{A}{2}\mathrm{d}t\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{A}{2}(x-M) + \int_a^M f(t)\mathrm{d}t = +\infty,$$

从而推出与假设矛盾，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

例 47 设 $f(x)\begin{cases}\int_0^x \sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t, & x\neq 0,\\ 0, & x = 0,\end{cases}$ 证明：$f'(0) = 0$.

证 先证 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(x)}{x} = 0$（事实上，这里 x 既表示增量，又表示 $U^\circ(0)$ 内点）.

设 $x > 0$ ($x < 0$ 类似可证)，由积分第二中值定理，$\exists\ \xi_x \in \left[\frac{1}{2x},\frac{1}{x}\right]$，使得

$$\left|\frac{f(2x)-f(x)}{x}\right| = \left|\frac{1}{x}\int_x^{2x}\sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t\right| \xlongequal{u=1/t} \frac{1}{x}\left|\int_{1/2x}^{1/x}\frac{\sin 2u}{u^2}\mathrm{d}u\right|$$

$$= \frac{4x^2}{x}\left|\int_{1/2x}^{\xi_x}\sin u\mathrm{d}u\right| = 4x\left|\cos\frac{1}{2x} - \cos\xi_x\right|$$

$$\leqslant 8x \longrightarrow 0\ (x\longrightarrow 0^+).$$

当 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(x)}{x} = A$ 时，有 $f'(0) = A$，故 $f'(0) = 0$.

实际上，若 $f'(0)$ 存在，则由

$$\frac{f(2x)-f(x)}{x} = 2\frac{f(2x)-f(0)}{2x} - \frac{f(x)-f(0)}{x},$$

当 $x\longrightarrow 0$ 时，有 $A = 2f'(0) - f'(0) = f'(0)$.

例 48 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$，$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$

$=0$，证明：至少存在两点 $x_1,x_2\in[a,b]$，使 $f(x_1)=f(x_2)=0$.

证 由于$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$，所以 $f(x)$ 必在$[a,b]$上变号. 由根的存在定理，$\exists\ x_1\in[a,b]$，$f(x_1)=0$.

又设 $f(x)$ 在$[a,b]$上只有惟一零点 x_1，则$(x-x_1)f(x)$ 在$[a,b]$上不变号，从而

$$\int_a^b(x-x_1)f(x)\mathrm{d}x\neq 0\Longrightarrow\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\neq 0$$

与题设矛盾. 因此至少有两点 $x_1,x_2\in[a,b]$，使

$$f(x_1)=f(x_2)=0,$$

例 49 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且满足 $f(1)=k\int_0^{1/k}x\mathrm{e}^{1-x}f(x)\mathrm{d}x\ (k>1)$. 证明：至少存在一点$\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=(1-1/\xi)f(\xi)$.

证 由 $f(1)=k\int_0^{1/k}x\mathrm{e}^{1-x}f(x)\mathrm{d}x$ 及积分中值定理知，至少存在一点 $\xi_1\in[0,1/k]\subset[0,1]$，使得

$$f(1)=k\int_0^{1/k}x\mathrm{e}^{1-x}f(x)\mathrm{d}x=\xi_1\mathrm{e}^{1-\xi_1}f(\xi_1).$$

在$[\xi,1]$上，令 $\varphi(x)=x\mathrm{e}^{1-x}f(x)$，则 $\varphi(x)$ 在$[\xi_1,1]$上连续，在$(\xi_1,1)$内可导，且

$$\varphi(\xi_1)=f(1)=\varphi(1),$$

由罗尔定理知，至少存在一点 $\xi\in(\xi_1,1)\subset(0,1)$，使得

$$\varphi'(\xi)=\mathrm{e}^{1-\xi}[f(\xi)-\xi f(\xi)+\xi f'(\xi)]=0,$$

即
$$f'(\xi)=(1-1/\xi)f(\xi).$$

例 50 设 $f(x)$ 在$[0,2]$上连续，在$(0,2)$内二阶可导，且 $f(0)=f\left(\frac{1}{2}\right)$，$f(2)=2\int_{1/2}^1 f(x)\mathrm{d}x$. 证明：$\exists\ \xi\in(0,2)$，使得 $f''(\xi)=0$.

证 由积分中值定理知，$\exists\ \xi_1\in[1/2,1]$，使

$$f(2)=2\int_{1/2}^{1}f(x)\mathrm{d}x=2\left(1-\frac{1}{2}\right)f(\xi_1)=f(\xi_1).$$

对 $f(x)$ 在 $(\xi_1,2)$ 内使用罗尔定理知，$\exists\ \xi_2\in(\xi_1,2)\subset(1/2,2)$，使 $f(\xi_2)=0$.

又由 $f(0)=f\left(\frac{1}{2}\right)$ 知，依罗尔定理，$\exists\ \xi_3\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，使得 $f'(\xi_3)=0$. 于是，在 (ξ_3,ξ_2) 内再次使用罗尔定理知，$\exists\ \xi\in(\xi_3,\xi_2)\subset(0,2)$，使 $f''(\xi)=0$.

例 51 已知两曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\int_0^{\arctan x}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ 在点 $(0,0)$ 处的切线相同. 写出此切线方程，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}nf\left(\frac{2}{n}\right)$.

解 由题设知 $f(0)=0,f'(0)=\left.\frac{\mathrm{e}^{-(\arctan x)^2}}{1+x^2}\right|_{x=0}=1$，故所求切线方程为

$$y-0=1(x-0)\Rightarrow y=x.$$

而 $$\lim_{n\to\infty}nf\left(\frac{2}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}2\,\frac{f(2/n)-f(0)}{2/n}=2f'(0)=2.$$

例 52 函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，$f'(0)=1$，且满足不等式

$$f'(x)+f(x)-\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0.$$

(1) 求导数 $f'(x)$；

(2) 证明：当 $x\geqslant 0$ 时，有 $\mathrm{e}^{-x}\leqslant f(x)\leqslant 1$.

解 (1) 因为 $(x+1)f'(x)+(x+1)f(x)-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0$，两边对 x 求导，得

$$(x+1)f''(x)=-(x+2)f'(x).$$

设 $u=f'(x)$，则建立微分方程求解之，有

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-\frac{x+2}{x+1}u\Rightarrow f'(x)u=\frac{1}{x+1}c\mathrm{e}^{-x}.$$

由 $f(0)=1,f'(0)+f(0)=0$，知 $f'(0)=-1\Rightarrow c=-1$. 于是

$$f'(x) = -\frac{e^{-x}}{x+1}.$$

证 (2) 由 $\int_0^x f'(t)dt = f(x) - f(0) = f(x) - 1$ 知，$f(x) = 1 - \int_0^x \frac{e^{-t}}{t+1}dt$. 又当 $x \geqslant 0$ 时，有

$$0 \leqslant \int_0^x \frac{e^{-t}}{t+1}dt \leqslant \int_0^x e^{-t}dt = 1 - e^{-x},$$

所以
$$e^{-x} \leqslant f(x) \leqslant 1.$$

第三节　变上限积分与定积分的计算

主要内容

1. 若函数 $f(t)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$\forall\ x \in [a,b]$，定义变动上限积分函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a,b].$$

类似定义变动下限积分函数

$$\Psi(x) = \int_x^b f(t)dt, \quad x \in [a,b].$$

$\Phi(x)$ 和 $\Psi(x)$ 统称为变限积分. 还可定义复合变限积分：

$$\int_a^{u(x)} f(x)dt, \quad \int_{v(x)}^b f(t)dt, \quad \int_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt.$$

2. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $\Phi(x)$ 与 $\Psi(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数.

3. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\Phi(x)$ 与 $\Psi(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且

$$\Phi'(x) = f(x), \quad \Psi'(x) = -f(x),$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\mathrm{d}t = f[u(x)]u'(x) - f[v(x)]v'(x).$$

4. 微积分学基本定理 若函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，则变动上限积分 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t, x \in [a,b]$ 在$[a,b]$上可导，且 $\Phi'(x) = f(x)$.

定理说明：只要 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，则 $f(x)$ 在$[a,b]$上必有原函数，且 $\Phi(x)$ 即为 $f(x)$ 在$[a,b]$上的一个原函数.

5. 牛顿-莱布尼茨公式 设 f 在$[a,b]$上连续，若 F 是 f 在$[a,b]$上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

6. 换元积分定理 若 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，$\varphi(t)$ 满足条件：

(1) $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$，且 $a \leqslant \varphi(t) \leqslant b, \quad t \in [\alpha,\beta]$,

(2) $\varphi(t)$ 在$[\alpha,\beta]$上有连续的导数，

则有定积分换元公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

7. 分部积分定理 若 $u(x), v(x)$ 是$[a,b]$上的两个有连续导数的函数，则有定积分的分部积分公式

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x.$$

若在$[a,b]$上有连续的 $u^{(n+1)}(x)$ 和 $v^{(n+1)}(x)$，则有推广的分部积分公式

$$\int_a^b u \cdot v^{(n+1)}\mathrm{d}x = [u \cdot v^{(n)} - u'v^{(n-1)} + \cdots + (-1)^n u^{(n)}v]\Big|_a^b + (-1)^{n+1}\int_a^b u^{(n+1)}v\mathrm{d}x, \quad n = 1,2,\cdots.$$

8. 一些常用公式

(1) 若 f 在$[-a,a]$上可积，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & f \text{ 为奇函数}, \\ 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x, & f \text{ 为偶函数}. \end{cases}$$

(2) 若 f 是 $(-\infty, +\infty)$ 上以 T 为周期的函数,且在任何区间 $[a, a+T]$ 上可积,则有

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$

即定积分与 a 无关.

(3) 若 $f(t)$ 为连续函数,则有代换公式

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\mathrm{d}x.$$

(4) 若 $f(t)$ 为连续函数,则有瓦里士公式

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\mathrm{d}x$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(2m)!!}{(2m+1)!!}, & n = 2m+1 \text{ (即 } n \text{ 为奇数)}, \\ \dfrac{(2m-1)!!}{(2m)!!}, & n = 2m \text{ (即 } n \text{ 为偶数)}. \end{cases}$$

疑难解析

1. 怎样理解定积分的定义?

答 定积分(或称黎曼积分)是黎曼于 1854 年提出来的. 定积分定义是一个构造性定义,它利用对区间 $[a,b]$ 的一个分割 T,将 $[a,b]$ 分为 n 个小区间 Δ_i,并在 Δ_i 上任取一点 ξ_i,构造一个积分和式 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$,称为黎曼和. 当 $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$,使当 $\forall\ T$,只要 $\|T\| < \delta$,有 $\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| < \varepsilon$,则称 f 在 $[a,b]$ 上可积,

I 即为 f 在$[a,b]$ 上的定积分.

黎曼积分允许被积函数有不连续点，但又不允许有"太多"的不连续点. 黎曼积分的可积函数受到一定限制.

黎曼可积函数的积分运算不完全是微分(求导)运算的逆运算. 即存在那样的黎曼可积函数 $f(x)$(如$[a,b]$上有有限个第一类间断点的函数)，在进行积分运算$\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)$后再进行微分运算$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)$，不能还原为函数 $f(x)$.

在$[a,b]$上的黎曼可积的函数列$\{f_n(x)\}$，它的极限函数 $f(x)$(即$\forall\ x\in[a,b]$，$\{f_n(x)\}$都收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$)在$[a,b]$上不一定仍然黎曼可积.

以上是定积分存在的缺陷. 此缺陷导致了勒贝格积分的产生，从而推广了黎曼积分.

2. 使用换元积分定理要注意哪些问题?

答 换元积分定理即定积分的第二换元法. 因为第一换元法实际上不写出中间变量，所以不考虑积分限的变更与变量间的对应问题. 第二换元积分法则要注意：

(1) 要保证 $\varphi(t)$ 的值域包含在 $f(x)$ 的连续范围内，并在端点有对应 $\varphi(\alpha)=a$ 和 $\varphi(\beta)=b$，但不一定要求 $x=\varphi(t)$ 是单调且一一对应的.

(2) 变换后定积分$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$ 的上限 β 和下限 α 必须与原积分上限 b 和下限 a 相对应，同 α,β 的正、负、大、小无关.

方法、技巧与典型例题分析

本节的内容比较多，特别是变动上限积分函数与定积分计算涉及的面较广. 以下我们逐个问题加以讨论.

一、变动上限积分函数

变动上限积分的特殊性是：它是一个函数，而且还可以是一个复合函数. 因此，研究变动上限积分就要像研究函数的全面性态那样，认真讨论、分析和论证. 还可以利用学过的所有方法并结合定积分概念来考察.

1. 利用变限积分函数求极限和论证极限

利用变限积分函数求极限，可以应用洛必达法则和定积分不等式进行. 在解题中注意验证条件.

例 1 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\int_1^n \ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$； (2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\displaystyle\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\,\mathrm{d}t}{x^3}$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x\right)^2}{\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{2x^2}\mathrm{d}x}$； (4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x}\displaystyle\int_0^x t^2\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\displaystyle\int_0^{\sin x}\sin t^2\mathrm{d}t}{x^3}$.

解 (1) 因为洛必达法则不能直接用于$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n)}{g(n)}$，所以先求出$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$，然后依海涅定理，得$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n)}{g(n)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$，故由

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\displaystyle\int_1^x \ln(1+1/\sqrt{t})\mathrm{d}t}{\sqrt{x}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$\xlongequal{L'}\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln(1+1/\sqrt{x})}{1/\sqrt{x}}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\xlongequal{L'}2\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(-\dfrac{1}{2}x^{-3/2}\right)\Big/(1+1/\sqrt{x})}{-\dfrac{1}{2}x^{-3/2}}=2,$$

得 原极限 $=2$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\,\mathrm{d}t}{x^3}\left(\dfrac{0}{0}\right)\xlongequal{L'}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x\sin x}{3x^2}=\dfrac{2}{3}$.

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\int_0^x \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x\right)^2}{\int_0^x \mathrm{e}^{2x^2}\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)\xlongequal{L'}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x^2}}$

$=2\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{x^2}}\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)\xlongequal{L'}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\mathrm{e}^{x^2}}{2x\mathrm{e}^{x^2}}=0.$

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x}\int_0^x t^2\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)\xlongequal{L'}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\mathrm{e}^{x^2}}{\mathrm{e}^{x^2}+x\mathrm{e}^{x^2}\cdot 2x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{1+2x^2}=\dfrac{1}{2}.$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin x}\sin t^2\mathrm{d}t}{x^3}\left(\dfrac{0}{0}\right)\xlongequal{L'}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin^2x)\cos x}{3x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin^2x)}{\sin^2x}\cdot\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}.$

例 2 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^x(1+\sin 2t)^{1/t}\mathrm{d}t}{x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x(\arctan x)^2\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}t^{3/2}\mathrm{d}t}{\int_0^x t(t-\sin t)\mathrm{d}t}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\tan x}\,\mathrm{d}x}{\int_0^{\tan x}\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x}$.

解 (1) 原极限 $\left(\dfrac{0}{0}\right)\xlongequal{L'}\lim\limits_{x\to 0^+}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sin 2x}\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2}=\mathrm{e}^2.$

(2) 原极限 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{\int_0^x(\arctan t)^2\mathrm{d}t}{x}\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right]$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x(\arctan t)^2\mathrm{d}t}{x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\xlongequal{L'}\lim_{x\to+\infty}(\arctan x)^2=\frac{\pi^2}{4}.$$

(3) 原极限 $\left(\frac{0}{0}\right)\xlongequal{L'}\lim\limits_{x\to0^+}\frac{(x^2)^{3/2}2x}{x(x-\sin x)}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{2x^3}{x-\sin x}$,

依泰勒公式 $x-\sin x=x^3/6+o(x^3)$,则

$$原极限=\lim_{x\to0^+}\frac{2x^3}{x^3/6}=12.$$

(4) 原极限 $\left(\frac{0}{0}\right)\xlongequal{L'}\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\cos x\ \sqrt{\tan(\sin x)}}{\sec^2x\ \sqrt{\sin(\tan x)}}$

$$=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{\tan(\sin x)}{\sin(\tan x)}\right]^{1/2}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{\tan(\sin x)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{\tan x}\cdot\frac{\tan x}{\sin(\tan x)}\right]^{1/2}=1.$$

例 3 确定常数 a,b 的值,使$\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{a}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t\right]$为有限值,并求出极限.

解 利用泰勒公式 $e^{-t^2}=1-t^2+\frac{1}{2}t^4+o(t^5)$,则

$$原极限=\lim_{x\to0}\frac{a}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\frac{b}{x^5}\int_0^x\left(1-t^2+\frac{1}{2}t^4+o(t^5)\right)\mathrm{d}t$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{a}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\frac{b}{x^5}\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{10}+o(x^6)\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\left(a-\frac{b}{3}\right)\frac{1}{x^2}+(1+b)\frac{1}{x^4}+\frac{b}{10}+o(x)\right].$$

要使极限为有限值,应有 $a-\frac{b}{3}=0,1+b=0$,故 $a=-\frac{1}{3},b=-1$,于是

$$原极限=\lim_{x\to0}\left[\frac{b}{10}+o(x)\right]=\frac{1}{10}.$$

例 4 确定 a,b,c,使得

$$\lim_{x\to0}\frac{ax-\sin x}{\int_b^x[\ln(1+t^2)]/t\mathrm{d}t}=c\ (c\neq0).$$

解 因为 $x \longrightarrow 0$ 时，$ax - \sin x \longrightarrow 0$，但 $c \neq 0$，所以

$$\lim_{x\to 0}\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t = 0,$$

故 $b = 0$. 由洛必达法则，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_b^x [\ln(1+t^3)]/t\mathrm{d}t} = \lim_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_0^x [\ln(1+t^3)]/t\mathrm{d}t} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{L'}{=\!=}\lim_{x\to 0}(a-\cos x)\Big/\left[\frac{\ln(1+x^3)}{x}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x(a-\cos x)}{x^3} \quad (\text{无穷小代换})$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{x^2} = c.$$

因分母当 $x \longrightarrow 0$ 时极限为零，故 $\lim\limits_{x\to 0}(a-\cos x) = 0$，解得 $a = 1$.

从而

$$c = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

例 5 讨论以下函数的连续性：

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 2(\mathrm{e}^x - 1)}{\mathrm{e}^x - 1}, & x > 0, \\ 2, & x = 0, \\ \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \cos t^2 \mathrm{d}t, & x < 0. \end{cases}$$

解 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin 2(\mathrm{e}^x-1)}{\mathrm{e}^x-1} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin 2(\mathrm{e}^x-1)}{2(\mathrm{e}^x-1)}\cdot 2 = 2 = f(0)$,

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}\int_0^x \cos t^2\mathrm{d}t \left(\frac{0}{0}\right) \overset{L'}{=\!=} \lim_{x\to 0^-}\cos x^2 = 1 \neq 2.$$

所以，$f(x)$ 在 $x = 0$ 处间断.

2. 求变限积分函数的导数

求变限积分函数的导数，只需用公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t = f[\varphi(x)]\varphi'(x) - f[\psi(x)]\psi'(x).$$

其中 $f(t)$ 为连续函数，$\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 为可导函数.

例 6 求下列变限积分函数的导数：

(1) $\int_{x^2}^{x^3}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}}$；　　(2) $\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)\mathrm{d}t$；

(3) $\int_{2x}^{\cos x}t\sin t^2\mathrm{d}t$；　　(4) $\mathrm{e}^{-\int_0^x\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

解 (1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x^2}^{x^3}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}=\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}}-\frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}$.

(2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)\mathrm{d}t$

$$=-\sin x\cos(\pi\cos^2x)-\cos x\cos(\pi\sin^2x)$$

$$=-\sin x[\cos(\pi-\pi\cos^2x)]-\cos x\cos(\pi\sin^2x)$$

$$=(\sin x-\cos x)\cos(\pi\sin^2x).$$

(3) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{2x}^{\cos x}t\sin t^2\mathrm{d}t$

$$=-\sin x\cdot\cos x\sin(\cos x)^2-2\cdot 2x\cdot\sin 4x^2$$

$$=-\frac{1}{2}[\sin 2x\sin(\cos x)^2+8x\sin 4x^2].$$

(4) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\mathrm{e}^{-\int_0^x\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]$

$$=\mathrm{e}^{-\int_0^x\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t}\cdot(-\mathrm{e}^{-x^2})\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{-\int_0^x\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t}\cdot f(x)$$

$$=\mathrm{e}^{-\int_0^x\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t}\left[f(x)-\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right].$$

例 7 求下列方程确定函数的导数：

(1) $\int_0^y\mathrm{e}^t\mathrm{d}t+\int_0^x\cos t\mathrm{d}t=0$，求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$；

(2) $\int_1^y\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t+\int_{1/x}^1\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=0$，求$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}$.

解 利用隐函数求导方法.

(1) 两边对 x 求导，得

$$e^y \frac{dy}{dx} + \cos x = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\cos x}{e^y}.$$

(2) 两边对 x 求导，得

$$\frac{\sin y}{y}\frac{dy}{dx} - e^{-1/x^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x^2 \sin y} e^{-1/x^2}.$$

由于 $x = 1$ 时，$\int_1^y \frac{\sin t}{t} dt = 0$，故 $y = 1$，代入得

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = -\frac{1}{1 \cdot \sin 1} e^{-1} = -\frac{1}{e \sin 1}.$$

例 8 求下列函数的导数：

(1) $y = y(x)$ 由方程 $\sin x - \int_1^{y-x} e^{-t^2} dt$ 确定，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$；

(2) $x = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^2x}{dy^2}$；

(3) $x = \int_0^t \sin u du, y = \int_0^t \cos u du$，求 $\frac{dy}{dx}$；

(4) $x = \int_0^{t^2} \sin u^2 du, y = \cos t^4$，求 $\frac{dy}{dx}$.

解 题(1)、题(2) 是隐函数求导问题，题(3)、题(4) 是参数方程求导问题.

(1) 两边对 x 求导，得

$$\cos x - e^{(y-x)^2}(y' - 1) = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = e^{(y-x)^2}\cos x + 1,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x e^{(y-x)^2} + 2(y-x)\left(\frac{dy}{dx} - 1\right)e^{(y-x)^2}\cos x$$

$$= e^{(y-x)}[2(y-x)\cos^2 x e^{(y-x)^2} - \sin x].$$

(2) 两边对 x 求导，得

$$1 = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\frac{dy}{dx} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \sqrt{1+y^2},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\sqrt{1+y^2} = y.$$

两边对 y 求导，得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=-\frac{y}{1+y^2}\cdot\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}=-\frac{y}{\sqrt{(1+y^2)^3}}.$$

(3) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y_t'}{x_t'}=\frac{\cos t}{\sin t}=\cot t.$

(4) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y_t'}{x_t'}=\frac{-\sin t^4\cdot 4t^3}{\sin t^4\cdot 2t}=-2t^2.$

例 9 设 $f(x)$ 为定义于 $x\geqslant 1$ 上的如下连续函数，求$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}$.

$$F(x)=\int_0^x\left(\frac{2}{x}+\ln x\right)f(t)\mathrm{d}t.$$

解 将积分号内 x 移到积分号外后求导，得

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}=\left(-\frac{-2}{x^2}+\frac{1}{x}\right)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\left(\frac{2}{x}+\ln x\right)f(x).$$

例 10 设 $f(x)=\int_0^{g(x)}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^3}}$，求 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$，其中

$$g(x)=\int_0^{\cos x}[1+\sin(t^2)]\mathrm{d}t.$$

解 因为

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{g'(x)}{\sqrt{1+g^3(x)}}\\&=\frac{1}{\sqrt{1+g^3(x)}}[1+\sin(\cos^2x)](-\sin x),\end{aligned}$$

而
$$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\int_0^0[1+\sin(t^2)]\mathrm{d}t=0,$$

所以
$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=[1+\sin 0](-1)=-1.$$

例 11 设 $f(x)=\int_0^x\left[\int_1^{\sin t}\sqrt{1+u^4}\right]\mathrm{d}t$，求 $f''(x)$.

解 因为，依分部积分法，有

$$f(x)=\left[t\int_1^{\sin t}\sqrt{1+u^4}\mathrm{d}u\right]\Bigg|_0^x-\int_0^x t\sqrt{1+\sin^4 t}\cos t\mathrm{d}t$$

$$= x\int_1^{\sin x}\sqrt{1+u^4}\mathrm{d}u - \int_0^x t\sqrt{1+\sin^4 t}\cos t\mathrm{d}t,$$

故 $f'(x) = \int_1^{\sin x}\sqrt{1+u^4}\mathrm{d}u,\quad f''(x) = \sqrt{1+\sin^4 x}\cos x.$

例 12 设 $f(x)$ 连续，求 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t$.

解 因为 $\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t \xlongequal{u=x^2-t^2} \frac{1}{2}\int_0^{x^2} f(u)\mathrm{d}u$.

所以 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t\right] = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^2} f(u)\mathrm{d}u = xf(x^2).$

3. 用变限积分函数研究函数

利用变限积分函数研究函数的性态在理论上更具备充分性，因而反映的函数性质也更有说服力. 在利用变限积分函数研究函数时，一定要先考察函数的可积性，并严格应用求导或求积法则.

例 13 研究 $f(x)$ 在 $x=0$ 的连续性与可导性.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x}, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ \dfrac{\int_0^{x^2}\cos t^2\mathrm{d}t}{x}, & x>0. \end{cases}$$

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1-\cos x}{x} \xlongequal{L'} \frac{\sin x}{1} = 0$,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}\cos t^2\mathrm{d}t}{x} \xlongequal{L'} \lim_{x\to 0^+}\cos x^4\cdot 2x = 0,$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$，函数在 $x=0$ 连续.

又 $f'_-(0) = \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$,

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}\cos t^2\mathrm{d}t}{x^2}$$

$$\xlongequal{L'} \lim_{x \to 0^+} \frac{2x\cos x^4}{2x} = 1.$$

所以 $f'_-(0) \neq f'_+(0)$，函数在 $x = 0$ 不可导.

例 14 设 $f(x)$ 在$[0, +\infty)$ 上连续且满足如下方程，求 $f(2)$.

$$\int_0^{x^2(x+1)} f(t)\mathrm{d}t = x.$$

解 方程两边对 x 求导，得

$$f[x^2(1+x)] \cdot (2x+3x^2) = 1,$$

显然，当 $x = 1$ 时，$f[x^2(1+x)] = f(2)$. 故

$$f(2) = \frac{1}{2x+3x^2}\bigg|_{x=1} = \frac{1}{5}.$$

例 15 对函数 $f(x)$ 求 $f'(0)$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\int_0^x (\mathrm{e}^{t^2} - 1)\mathrm{d}t}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

解 $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x (\mathrm{e}^{t^2} - 1)\mathrm{d}t}{x^3} \xlongequal{L'} \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^{x^2} - 1}{3x^2} = \frac{1}{3}.$$

例 16 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b) 内 $f'(x) < 0$，证明：$F(x) = \dfrac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在(a,b) 内是单调减少函数.

证 依积分中值定理，$\exists\ \xi \in [a,x] \subset [a,b]$，使

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(\xi)(a-x) \Rightarrow F(x) = f(\xi).$$

又 $$F'(x) = -\frac{1}{(x-a)^2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{x-a}f(x)$$

$$= \frac{1}{x-a}[f(x) - f(\xi)],$$

由 $f'(x) < 0$ 知 $f(x)$ 单调减少，$f(x) - f(\xi) < 0$，所以 $F'(x) <$

0，故 $F(x)$ 是单调减少函数.

例 17 证明：若 $f(x)$ 是周期等于 T 的连续函数，则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t.$$

证 $\forall\ x>T$，$\exists\ n\in\mathbf{N}$，使 $nT\leqslant x\leqslant(n+1)T$，而 $x\to+\infty\Leftrightarrow n\to+\infty$. 且知 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界. 设 $x=nT+u$，$0<u<T$，则

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t&=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{nT+u}\int_0^{nT+u}f(t)\mathrm{d}t\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{nT+u}\left[\int_0^T+\int_T^{2T}+\cdots+\int_{nT}^{nT+u}\right]f(t)\mathrm{d}t\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{nT+u}\left[n\int_0^T f(t)\mathrm{d}t+\int_{nT}^{nT+u}f(t)\mathrm{d}t\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{nT+u}\left[n\int_0^T f(t)\mathrm{d}t+\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\right]\ \left(\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\ \text{有界}\right)\\
&=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

例 18 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数，证明：$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是以 T 为周期函数或者是周期函数与线性函数之和.

证
$$\begin{aligned}
F(x+T)&=\int_a^{x+T}f(t)\mathrm{d}t=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\int_x^{x+T}f(t)\mathrm{d}t\\
&=F(x)+\int_0^T f(t)\mathrm{d}t=F(x)+c.
\end{aligned}$$

当 $c=0$ 时，$F(x+T)=F(x)$，故 $F(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.

当 $c\neq 0$ 时，记 $\varphi(x)=F(x)-\frac{c}{T}x$，则

$$\begin{aligned}
\varphi(x+T)&=F(x+T)-\frac{c}{T}(x+T)=F(x+T)-c-\frac{c}{T}x\\
&=F(x)-\frac{c}{T}x=\varphi(x),
\end{aligned}$$

即 $\varphi(x)$ 是以 T 为周期的周期函数. 所以

$$F(x) = \varphi(x) + \frac{c}{T}x$$

是周期函数与线性函数之和.

例 19　设 $\varphi(x) = \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t, x \in (-1,1)$，证明：

$$\varphi(x) + \varphi(-x) = \frac{1}{2}\varphi(x^2).$$

证　$[\varphi(x) + \varphi(-x)]'$

$$= \left[\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t\right]' + \left[\int_0^{-x} \frac{\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t\right]'$$

$$= \frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{x}\ln(1-x^2),$$

又　$$\left[\frac{1}{2}\varphi(x^2)\right]' = \frac{1}{2}\left[\int_0^{x^2} \frac{\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t\right]' = \frac{1}{x}\ln(1-x^2),$$

由　$$[\varphi(x) + \varphi(-x)]' = \left[\frac{1}{2}\varphi(x^2)\right]',$$

知　$$\varphi(x) + \varphi(-x) = \frac{1}{2}\varphi(x^2) + c.$$

取 $x=0$ 代入，得 $c=0$，所以 $\varphi(x) + \varphi(-x) = \frac{1}{2}\varphi(x^2)$.

例 20　设 $f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t}\mathrm{d}t, x \in (0, +\infty)$，求 $f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x)$.

解　先求 $f\left(\frac{1}{x}\right)$，作代换 $u = \frac{1}{t}$，得

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \int_1^{1/x} \frac{\ln t}{1+t}\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{\ln(1/u)}{1+1/u}\mathrm{d}\,\frac{1}{u} = \int_1^x \frac{\ln u}{u(1+u)}\mathrm{d}u$$

$$= \int_1^x \frac{\ln u}{u}\mathrm{d}u - \int_1^x \frac{\ln u}{1+u}\mathrm{d}u = \int_1^x \frac{\ln u}{u}\mathrm{d}u - f(x),$$

所以　$$f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = \int_1^x \frac{\ln u}{u}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}(\ln u)^2\Big|_0^x = \frac{1}{2}\ln^2 x.$$

例 21　设 $f(x)$ 在$[1, +\infty)$上可积，且 >0，求函数

$$F(x) = \int_1^x \left[\left(\frac{2}{x} + \ln x\right) - \left(\frac{2}{t} + \ln t\right)\right] f(t)\mathrm{d}t$$

的极值.

解 对 $F(x)$ 求导,得

$$F'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(\frac{2}{x}+\ln x\right)\int_1^x f(t)\mathrm{d}t-\int_1^x\left(\frac{2}{t}+\ln t\right)f(t)\mathrm{d}t\right]$$
$$=\left(-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}\right)\int_1^x f(t)\mathrm{d}t+\left(\frac{2}{x}+\ln x\right)f(x)$$
$$-\left(\frac{2}{x}+\ln x\right)f(x)$$
$$=\left(-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x}\right)\int_1^x f(t)\mathrm{d}t.$$

令 $F'(x)=0$,由 $\int_1^x f(t)\mathrm{d}t>0$ 知,驻点为 $x=2$. 而当 $x<2$ 时,$F'(x)<0$;当 $x>2$ 时,$F'(x)>0$. 所以当 $x=2$ 时,$F(x)$ 有极小值 $F(2)$.

例 22 证明:$f(x)=\frac{1}{x}\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

证 $f'(x)=\frac{1}{x^2}\left[xe^{x^2}-\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{x^2}\left[\int_0^x e^{x^2}\mathrm{d}t-\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t\right]$

$$=\frac{1}{x^2}\int_0^x (e^{x^2}-e^{t^2})\mathrm{d}t>0,$$

所以,$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

例 23 设 $f(x)=\int_0^x (t-t^2)\sin^{2n}t\mathrm{d}t$,$n\in\mathbf{N}$,证明:

$$f(x)\leqslant\frac{1}{(2n+2)(2n+3)},\ x\geqslant 0.$$

证 因为 $f'(x)=(x-x^2)\sin^{2n}x=x(1-x)\sin^{2n}x$,则 $f'(x)$ 与 $x(1-x)$ 有相同符号. 当 $x<1$ 时,$f'(x)>0$;当 $x=1$ 时,$f'(-1)=0$;当 $x>1$ 时,$f'(x)<0$. 故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得最大值,所以

$$f(x)\leqslant f(1)=\int_0^1 (t-t^2)\sin^{2n}t\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1 (t-t^2)t^{2n}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{2n+3}=\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}.$$

例 24 设 $f(x)=\int_0^x(1-t)\ln(1+nt)\mathrm{d}t$，证明：当 $x>0$ 时，$f(x)\leqslant\frac{n}{6}$.

证 因为 $f'(x)=(1-x)\ln(1+nx)$，令 $f'(x)=0$，得驻点 $x=1$. 当 $0<x<1$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$. 所以 $f(1)$ 为最大值.

$$f(x)\leqslant f(1)=\int_0^1(1-t)\ln(1+nt)\mathrm{d}t.$$

因为 $t>0, 0<\ln(1+nt)\leqslant nt$，故

$$f(x)\leqslant f(1)\leqslant\int_0^1(1-t)nt\mathrm{d}t=\frac{n}{6}.$$

例 25 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$. 设

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\int_b^x\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t,$$

证明：(1) $F'(x)\geqslant 2$；(2) $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上只一个零点.

证 (1) $F'(x)=f(x)+\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{f^2(x)+1}{f(x)}\geqslant\dfrac{2f(x)}{f(x)}=2.$

(2) 因为 $F'(x)\geqslant 2$，所以 $F(x)$ 是单调增加函数. 又

$$F(a)=\int_b^a\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t<0,\quad F(b)=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t>0,$$

所以 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加且两端点异号，由连续函数的零点定理，$F(x)$ 在 $[a,b]$ 内有惟一的零点.

二、定积分的计算与证明

1. 定积分的计算

一般来说，定积分的计算只要求出被积函数的一个原函数，再应用牛顿 - 莱布尼茨公式即可得出结果. 求原函数的技巧已在不定积分中叙述，对于一些特殊问题，如根式、绝对值、分段函数、对称区间上的奇偶函数等，是我们应该重视的.

先用牛顿 - 莱布尼茨公式计算定积分.

例 26 计算下列积分：

(1) $\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x$.

解　由于$\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}x$的几何意义是以原点为圆心、$R$为半径的上半圆的面积，所以

$$\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\pi R^2,\quad \int_0^{R} \sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\pi R^2.$$

由此可以得出：

(1) $\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\pi(\sqrt{2})^2 = \frac{\pi}{2}$.

(2) $$\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{1-(x-1)^2}\mathrm{d}(x-1)$$
$$= \frac{1}{4}\pi(1)^2 = \frac{\pi}{4}.$$

例 27　计算下列积分：

(1) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos x-\cos^2 x}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；

(3) $\int_{1/2}^{1/2} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\arcsin\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$；

(4) $\int_{-a}^{a} [(x+\mathrm{e}^{\cos x})f(x)+(x-\mathrm{e}^{\cos x})f(-x)]\mathrm{d}x$，$f(x)$连续.

解　由于积分区间是对称区间，因此可以利用对称区间上奇偶函数的积分性质.

(1) 被积函数是偶函数，故

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos x-\cos^2 x}\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos x}\sin x\mathrm{d}x$$
$$= -2\int_0^{\pi/2} (\cos x)^{1/2}\mathrm{d}\cos x = -\frac{4}{3}(\cos x)^{3/2}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{4}{3}.$$

(2) 被积函数是偶函数，故

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = 2\int_0^{1/2} (\arcsin x)^2\mathrm{d}\arcsin x$$
$$= 2\cdot\left[\frac{1}{3}(\arcsin x)^3\right]_0^{1/2} = \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{6}\right)^3 = \frac{\pi^3}{324}.$$

(3) 因为 $\ln\dfrac{1-x}{1+x}$ 是奇函数，而 $\arcsin\sqrt{1-x^2}$ 是偶函数，所以被积函数是奇函数. 故

$$\int_{-1/2}^{1/2}\ln\frac{1-x}{1+x}\arcsin\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=0.$$

(4) 因为
$$\begin{aligned}&(x+\mathrm{e}^{\cos x})f(x)+(x-\mathrm{e}^{\cos x})f(-x)\\&=x[f(x)+f(-x)]+\mathrm{e}^{\cos x}[f(x)-f(-x)],\end{aligned}$$
而 $f(x)+f(-x)$ 是偶函数，$f(x)-f(-x)$ 是奇函数，x 是奇函数，$\mathrm{e}^{\cos x}$ 是偶函数，所以被积函数是奇函数，故

$$\int_{-a}^{a}[(x+\mathrm{e}^{\cos x})f(x)+(x-\mathrm{e}^{\cos x})f(-x)]\mathrm{d}x=0.$$

例 28 计算下列积分：

(1) $\displaystyle\int_0^2\frac{x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2-x}}\mathrm{d}x$； (2) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\sin^4x\,\mathrm{d}x.$

解 当不能直接求出原函数时，可采用分段积分，设法消去不易积出部分.

(1) $I=\displaystyle\int_0^2=\int_0^1+\int_1^2=I_1+I_2,$

$$\begin{aligned}I_2&=\int_1^2\frac{x-2}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2-x}}\mathrm{d}x+\int_1^2\frac{2}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2-x}}\mathrm{d}x\\&\xlongequal{x-2=t}\int_1^0\frac{t}{\mathrm{e}^{2-t}+\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t+\int_1^2\frac{2}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2-x}}\mathrm{d}x\\&=-\int_0^1\frac{x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2-x}}\mathrm{d}x+\int_1^2\frac{2}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2-x}}\mathrm{d}x\\&=-I_1+2\int_1^2\frac{\mathrm{e}^x\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^2}=-I_1+2\int_1^2\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^2}\\&=-I_1+\frac{2}{\mathrm{e}}\left(\arctan\mathrm{e}-\frac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

所以 $I=I_1-I_1+\dfrac{2}{\mathrm{e}}\left(\arctan\mathrm{e}-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{2}{\mathrm{e}}\left(\arctan\mathrm{e}-\dfrac{\pi}{4}\right).$

(2) $I=\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\mathrm{e}^x+1-1}{1+\mathrm{e}^x}\sin^4x\,\mathrm{d}x$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^4 x \mathrm{d}x - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin^4 x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x,$$

而 $$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin^4 x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x \xlongequal{x=-t} -\int_{\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin^4 t}{1+\mathrm{e}^{-t}}\mathrm{d}t \text{ (同乘以 } \mathrm{e}^t\text{)}$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^t}\sin^4 t\mathrm{d}t = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\sin^4 x\mathrm{d}x,$$

代回,移项除以 2,得

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^4 x\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \sin^4 x\mathrm{d}x = \frac{3}{16}\pi.$$

例 29 计算下列积分:

(1) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4\cos^4\theta\mathrm{d}\theta$; (2) $\int_0^{N\pi} \sqrt{1-\sin 2x}\mathrm{d}x, N \in \mathbf{N}$.

解 对于周期函数(周期为 T),有以下积分性质:

$$\int_0^T f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_0^{nT} f(x)\mathrm{d}x = n\int_0^T f(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos x\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x\mathrm{d}x = 0,\ \int_0^{2\pi} \sin x\mathrm{d}x = 0,$$

$$\int_0^{\pi} \cos x\mathrm{d}x = \int_{\pi}^{2\pi} \cos x\mathrm{d}x = 0.$$

(1) $$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4\cos^4\theta\mathrm{d}\theta = 8\int_0^{\pi/2} \cos^4\theta\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\pi/2} (1+\cos 2\theta)^2\mathrm{d}\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} (1+2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \left[1+2\cos 2\theta+\frac{1}{2}(1+\cos 4\theta)\right]\mathrm{d}\theta$$

$$= 3\cdot\frac{\pi}{2} + 4\int_0^{\pi/2} \cos 2\theta\mathrm{d}\theta + \int_0^{\pi/2} \cos 4\theta\mathrm{d}\theta.$$

其中 $\cos 2\theta$ 的周期 $T=\pi$,$\cos 4\theta$ 的周期 $T=\pi/2$,依上面公式,$\int_0^{\pi/2} \cos 2\theta\mathrm{d}\theta = 0$,$\int_0^{\pi/2} \cos 4\theta\mathrm{d}\theta = 0$,故

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4\cos^4\theta\mathrm{d}\theta = \frac{3}{2}\pi.$$

(2) $\int_0^{N\pi} \sqrt{1-\sin 2x}\,\mathrm{d}x$ 中 $\sin 2x$ 周期 $T=\pi$，故

$$I = N\int_0^{\pi} \sqrt{(\cos x-\sin x)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= N\int_0^{\pi/4}(\cos x-\sin x)\mathrm{d}x + N\int_{\pi/4}^{\pi}(\sin x-\cos x)\mathrm{d}x$$

$$= 2\sqrt{2}N.$$

例 30 计算下列积分：

(1) $\int_1^2 \frac{x}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$；　(2) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{x^2(1+x^2)}$；

(3) $\int_0^1 \mathrm{e}^{-2x^2+\ln x}\mathrm{d}x$；　(4) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-16\mathrm{e}^{-x}}$.

解 (1) $\int_1^2 \frac{x\mathrm{d}x}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{2x+1-1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{\mathrm{d}(x^2+x+1)}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{\mathrm{d}(x+1/2)}{(x+1/2)^2+3/4}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1|\Big|_1^2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{7}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\arctan\frac{5}{\sqrt{3}} - \arctan\sqrt{3}\right).$$

(2) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{x^2(1+x^2)} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1+x^2-x^2}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x$

$$= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x - \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

$$= -\frac{1}{x}\Big|_1^{\sqrt{3}} - \arctan x\Big|_1^{\sqrt{3}} = 1-\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{12}.$$

(3) $\int_0^1 \mathrm{e}^{-2x^2+\ln x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^{-2x^2}x\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\int_0^1 \mathrm{e}^{-2x^2}\mathrm{d}(-2x^2)$

$$= -\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x^2}\Big|_0^1 = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^2}-1\right).$$

(4) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-16\mathrm{e}^{-x}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2-16}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x-4)(\mathrm{e}^x+4)}$

$$= \frac{1}{8}\int_0^1\left(\frac{1}{\mathrm{e}^x-4} - \frac{1}{\mathrm{e}^x+4}\right)\mathrm{d}\mathrm{e}^x = \frac{1}{8}\ln\left|\frac{\mathrm{e}^x-4}{\mathrm{e}^x+4}\right|\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{8}\left(\ln\left|\frac{e-4}{e+4}\right| - \ln\frac{3}{5}\right).$$

例 31 计算下列积分：

(1) $\int_{-2}^{5}|x^2-2x-3|\mathrm{d}x$； (2) $\int_{0}^{1}t|t-x|\mathrm{d}t$；

(3) $\int_{-4}^{4}|x|\sqrt{16-x^2}\mathrm{d}x$； (4) $\int_{-1}^{1}|e^{2x}-e^{x}|\mathrm{d}x$；

(5) $\int_{0}^{\pi}\sqrt{\sin^3\theta-\sin^5\theta}\mathrm{d}x$； (6) $\int_{a}^{b}|2x-a-b|\mathrm{d}x$.

解 由于被积函数含有(或隐含)绝对值记号，因此要根据被积函数在部分区间上的正负，分区间求积.

(1) 因为$(-2,-1)$和$(3,5)$上被积函数大于零，在$(-1,3)$上被积函数小于零，所以

$$I = \int_{-2}^{-1}(x^2-2x-3)\mathrm{d}x - \int_{-1}^{3}(x^2-2x-3)\mathrm{d}x$$
$$+ \int_{3}^{5}(x^2-2x-3)\mathrm{d}x$$
$$= \left(\frac{x^3}{3}-x^2-3x\right)\Bigg|_{-2}^{-1} - \left(\frac{x^3}{3}-x^2-2x\right)\Bigg|_{-1}^{3}$$
$$+ \left(\frac{x^3}{3}-x^2-3x\right)\Bigg|_{3}^{5} = \frac{71}{3}.$$

(2) 当$x<0$时，有

$$\int_0^1 t|t-x|\mathrm{d}t = \int_0^1 t(t-x)\mathrm{d}t = \left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}x\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}-\frac{x}{2};$$

当$x>1$时，有

$$\int_0^1 t|t-x|\mathrm{d}t = \int_0^1 t(x-t)\mathrm{d}t = \left(\frac{t^2}{2}x-\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{x}{2}-\frac{1}{3};$$

当$0<x<1$时，有

$$\int_0^1 t|t-x|\mathrm{d}t = \int_0^x t(x-t)\mathrm{d}t + \int_x^1 t(t-x)\mathrm{d}t$$
$$= \left(\frac{t^2}{2}x-\frac{t^3}{2}\right)\Bigg|_0^x + \left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}x\right)\Bigg|_x^1 = \frac{x^3}{3}-\frac{x}{2}+\frac{1}{3}.$$

(3) $\int_{-4}^{4}|x|\sqrt{16-x^2}\mathrm{d}x$

$$= \int_{-4}^{0} - x\sqrt{16 - x^2}\mathrm{d}x + \int_{0}^{4} x\sqrt{16 - x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-4}^{0}(16 - x^2)^{1/2}\mathrm{d}(16 - x^2)$$

$$- \frac{1}{2}\int_{0}^{4}(16 - x^2)^{1/2}\mathrm{d}(16 - x^2)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(16 - x^2)^{3/2}\right]\Big|_{-4}^{0} - \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(16 - x^2)^{3/2}\right]_{0}^{4}$$

$$= \frac{1}{3}(64 + 64) = \frac{128}{3}.$$

(4) $\int_{-1}^{1}|\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x}|\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0}(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{2x})\mathrm{d}x + \int_{0}^{1}(\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x})\mathrm{d}x$

$$= \left(\mathrm{e}^{x} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x}\right)\Big|_{0}^{1}$$

$$= \mathrm{e} + \frac{1}{2\mathrm{e}^2} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 + \frac{1}{\mathrm{e}} - 3.$$

(5) $\int_{0}^{\pi}\sqrt{\mathrm{sinm}^3\theta - \sin^5\theta}\mathrm{d}\theta = \int_{0}^{\pi}|\cos\theta|(\sin\theta)^{3/2}\mathrm{d}\theta$

$$= \int_{0}^{\pi/2}\cos\theta(\sin\theta)^{3/2}\mathrm{d}\theta + \int_{\pi/2}^{\pi}(-\cos\theta)(\sin\theta)^{3/2}\mathrm{d}\theta$$

$$= 2\int_{0}^{\pi/2}(\sin\theta)^{3/2}\mathrm{d}\sin\theta = 2 \cdot \frac{2}{5}(\sin\theta)^{5/2}\Big|_{0}^{\pi/2} = \frac{4}{5}.$$

(6) 记 $f(x) = |2x - a - b| = 2\left|x - \frac{a+b}{2}\right|$,则

$$f\left(\frac{a+b}{2} - x\right) = 2|-x| = 2|x| = f\left(\frac{a+b}{2} + x\right),$$

故 $f(x)$ 关于直线 $x = \frac{a+b}{2}$ 对称,有

$$\int_{a}^{b}|2x - a - b| = 2\int_{(a+b)/2}^{b}2\left|x - \frac{a+b}{2}\right|\mathrm{d}x$$

$$= 4\int_{(a+b)/2}^{b}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{(b-a)^2}{2}.$$

例 32 计算下列积分:

(1) $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{x}, & x \geqslant 0, \\ 1 + x^2, & x < 0, \end{cases}$ 求 $\int_{-1}^{2} f(2x - 1)\mathrm{d}x$;

(2) $\max\{x,x^2\}=\begin{cases}x^2, & -2\leqslant x<0,\\ x, & 0\leqslant x<1,\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$ 求$\int_{-2}^{2}\max\{x,x^2\}\mathrm{d}x$；

(3) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x}, & x\geqslant 0,\\ \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}, & x<0,\end{cases}$ 求$\int_0^2 f(x-1)\mathrm{d}x$；

(4) $f(x)=x,\ x\geqslant 0,\quad g(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\leqslant x<\pi/2,\\ 0, & x>\pi/2,\end{cases}$

求$\int_0^x f(t)g(x-t)\mathrm{d}t\ (x\geqslant 0)$.

解 分段函数的积分要分段计算. 对于函数中变量的代换，要注意准确性.

(1) $f(2x-1)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-2x+1}, & x\geqslant 1/2,\\ 1+(2x-1)^2, & x<1/2.\end{cases}$

$$\int_{-1}^{2}f(2x-1)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1/2}[1+(2x-1)^2]\mathrm{d}x+\int_{1/2}^{2}\mathrm{e}^{1-2x}\mathrm{d}x$$

$$=\left[x+\frac{1}{6}(2x-1)^3\right]\Bigg|_{-1}^{1/2}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{1-2x}\Bigg|_{1/2}^{2}=\frac{1}{2}(13-\mathrm{e}^{-3}).$$

(2) $$\int_{-2}^{2}\max\{x,x^2\}\mathrm{d}x=\int_{-2}^{0}x^2\mathrm{d}x+\int_0^1 x\mathrm{d}x+\int_1^2 x^2\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-2}^{0}+\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1+\frac{x^3}{3}\Bigg|_1^2=\frac{11}{2}.$$

(3) $f(x-1)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\geqslant 1,\\ \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{x-1}}, & x<1.\end{cases}$

$$\int_0^2 f(x-1)\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^{x-1}}$$

$$=\ln|x|\Big|_1^2+\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{1-x}}{1+\mathrm{e}^{1-x}}\mathrm{d}x=\ln 2-\int_0^1\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^{1-x}+1)}{\mathrm{e}^{1-x}+1}$$

$$=\ln 2-\ln|\mathrm{e}^{1-x}+1|\Big|_0^1=\ln(\mathrm{e}+1).$$

(4) 设 $u=x-t$，则

$$I=\int_0^x f(t)g(x-t)\mathrm{d}t=-\int_x^0 f(x-u)g(u)\mathrm{d}u$$
$$=\int_0^x f(x-t)g(t)\mathrm{d}t.$$

因为 $f(x-t)=x-t, x\geqslant t, g(t)=\begin{cases}\sin t, & 0\leqslant t\leqslant \pi/2,\\ 0, & t>\pi/2,\end{cases}$

故 $$I=\begin{cases}\int_0^x (x-t)\sin t\mathrm{d}t=x-\sin x, & 0\leqslant x\leqslant \pi/2,\\ \int_0^{\pi/2}(x-t)\sin t\mathrm{d}t=x-1, & x>\pi/2.\end{cases}$$

2. 用换元法计算与证明定积分

换元法计算定积分的关键是第二换元法的换元积分公式中"换元必须换限"，必须准确实现.

例 33 计算下列积分：

(1) $\int_1^3 \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_1^4 \frac{\mathrm{d}x}{x(1+\sqrt{x})}$；

(3) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}$；　　(4) $\int_{1/\pi}^{2/\pi}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

解 (1) $$\int_1^3 \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x=\int_1^3\frac{\arctan\sqrt{x}\,2\mathrm{d}\sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^2}$$
$$=2\int_1^3 \arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}\arctan\sqrt{x}=(\arctan\sqrt{x})^2\Big|_1^3$$
$$=(\arctan\sqrt{3})^2-(\arctan 1)^2=\frac{7}{144}\pi^2.$$

(2) $$\int_1^4\frac{\mathrm{d}x}{x(1+\sqrt{x})}=\int_1^4\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$$
$$=\int_1^4\frac{2\mathrm{d}\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}=2\int_1^4\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{1+\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}\sqrt{x}$$
$$=2\ln\left|\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right|\Bigg|_1^4=2\left(\ln\frac{2}{3}-\ln\frac{1}{2}\right)=2\ln\frac{3}{4}.$$

(3) $\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx = \int_0^1 \frac{e^{-x}dx}{1+e^{-x}} = -\int_0^1 \frac{d(1+e^{-x})}{1+e^{-x}}$

$= -\ln|1+e^{-x}|\Big|_0^1 = \ln 2 - \ln\left(1+\frac{1}{e}\right).$

(4) $\int_{1/\pi}^{2/\pi} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx = -\int_{1/\pi}^{2/\pi} \sin\frac{1}{x}d\frac{1}{x} = \int_{1/\pi}^{2/\pi} d\cos\frac{1}{x}$

$= \cos\frac{1}{x}\Big|_{1/\pi}^{2/\pi} = 1.$

例 34 计算下列积分：

(1) $\int_0^1 x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$；　　(2) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx$；

(3) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$；　　(4) $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

解 本例用第二换元法的三角代换求解.

(1) $\int_0^1 x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = \int_0^1 \frac{x(1-x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$\xlongequal{x=\sin t} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t(1-\sin t)}{\cos t}\cos t dt = \int_0^{\pi/2} (\sin t - \sin^2 t)dt$

$= (-\cos t)\Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = 1 - \frac{\pi}{4}$

(利用$\int_0^{\pi/2}\sin^n x dx$ 的瓦里士公式).

(2) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx \xlongequal{x=a\sin t} \int_0^{\pi/2} a^2\sin^2 t a^2\cos^2 t dt$

$= \frac{a^4}{4}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2t dt = \frac{a^4}{8}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4t)dt$

$= \frac{a^4}{8}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{a^4}{8}\cdot\frac{1}{4}\sin 4t\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^4}{16}.$

(3) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} \xlongequal{x=\tan t} \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sec^2 t}{\tan t\cdot\sec t}dt$

$= \int_{\pi/4}^{\pi/3}(\sin t)^{-1}d\sin t = -(\sin t)^{-1}\Big|_{\pi/4}^{\pi/3}$

$= \sqrt{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3}.$

(4) $\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}} \xlongequal{x=\sec t} \int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{\sec t\cdot\tan t}{\sec t\cdot\tan t}\mathrm{d}t = t\Big|_{\pi/4}^{\pi/3} = \frac{\pi}{12}.$

例 35 计算下列积分：

(1) $\int_{-1}^{1}\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{5-4x}}$；　　(2) $\int_{3/4}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}-1}$；

(3) $\int_{0}^{\ln 5}\frac{\mathrm{e}^x\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}{\mathrm{e}^x+3}\mathrm{d}x$；　　(4) $\int_{0}^{\ln 2}\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2x}}\mathrm{d}x$.

解 (1) $\int_{-1}^{1}\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{5-4x}} \xlongequal{\sqrt{5-4x}=t} \int_{3}^{1}\frac{(5-t^2)(-t/2)}{4t}\mathrm{d}t$

$= \int_{1}^{3}\frac{1}{8}(5-t^2)\mathrm{d}t = \left(\frac{5}{8}t-\frac{1}{24}t^3\right)\Big|_{1}^{3} = \frac{1}{6}.$

(2) $\int_{3/4}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}-1} \xlongequal{\sqrt{1-x}=t} \int_{1/2}^{0}\frac{-2t}{t-1}\mathrm{d}t$

$= 2\int_{0}^{1/2}\frac{t+1-1}{t-1}\mathrm{d}t = 2[t-\ln(t-1)]\Big|_{0}^{1/2} = 1-2\ln 2.$

(3) $\int_{0}^{\ln 5}\frac{\mathrm{e}^x\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}{\mathrm{e}^x+3}\mathrm{d}x \xlongequal{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}=t} \int_{0}^{2}\frac{(1+t^2)t}{t^2+4}\,\frac{2t\mathrm{d}t}{1+t^2}$

$= \int_{0}^{2}\frac{2t^2}{t^2+4}\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{2}\left(1-\frac{4}{t^2+4}\right)\mathrm{d}t$

$= \left[2t-4\arctan\frac{t}{2}\right]\Big|_{0}^{2} = 4-\pi.$

(4) $\int_{0}^{\ln 2}\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2x}}\mathrm{d}x \xlongequal{\mathrm{e}^{-x}=\sin t} \int_{\pi/2}^{\pi/6}\cos t\left(-\frac{\cos t}{\sin t}\right)\mathrm{d}t$

$= \int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{1-\sin^2 t}{\sin t}\mathrm{d}t = \int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}t}{\sin t} - \int_{\pi/6}^{\pi/2}\sin t\mathrm{d}t$

$= \ln|\csc t-\cot t|\Big|_{\pi/6}^{\pi/2} + \cos t\Big|_{\pi/6}^{\pi/2} = \ln(2+\sqrt{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}.$

例 36 计算下列积分：

(1) $\int_{0}^{1}\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_{0}^{1}\frac{\arctan x}{1+x}\mathrm{d}x$；

(3) $\int_{0}^{\pi/2}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}}{\mathrm{e}^{\sin x}+\mathrm{e}^{\cos x}}\mathrm{d}x$；

(4) $\int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}}\mathrm{d}x.$

解 (1) 令 $x=\tan t, \mathrm{d}x=\sec^2 t\mathrm{d}t$，则

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/4}\frac{\ln(1+\tan t)}{1+\mathrm{tna}^2 t}\cdot\sec^2 t\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\pi/4}\ln(1+\tan t)\mathrm{d}t \xlongequal{t=\frac{\pi}{4}-u} \int_{\pi/4}^{0}\ln\left[1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-u\right)\right]\mathrm{d}u$$

$$=\int_0^{\pi/4}\ln\left[1+\frac{1-\tan u}{1+\tan u}\right]\mathrm{d}u=\int_0^{\pi/4}\ln\frac{2}{1+\tan u}\mathrm{d}u$$

$$=\int_0^{\pi/4}\ln 2\mathrm{d}u-\int_0^{\pi/4}\ln(1+\tan u)\mathrm{d}u=\frac{\pi}{2}\ln 2-\int_0^{\pi/4}\ln(1+\tan t)\mathrm{d}t.$$

出现循环，移项得

$$\int_0^1\frac{\ln(x+1)}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/4}\ln(1+\tan t)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{8}\ln 2.$$

(2) 令 $\arctan x=\frac{\pi}{4}-\arctan t$，由 $\arctan x+\arctan t=\frac{\pi}{4}$，得 $\tan(\arctan x-\arctan t)=1$，

故 $$\frac{x+t}{1+xt}=1\Rightarrow x=\frac{1-t}{1+t},\quad \mathrm{d}x=\frac{-2}{(1+t)^2}\mathrm{d}t.$$

于是

$$\int_0^1\frac{\arctan x}{1+x}\mathrm{d}x=-\int_1^0\frac{\pi/4-\arctan t}{1+(1-t)/(1+t)}\cdot\frac{2\mathrm{d}t}{(1+t)^2}$$

$$=\int_0^1\frac{\pi/4-\arctan t}{2/(1+t)}\frac{2\mathrm{d}t}{(1+t)^2}=\frac{\pi}{4}\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t}-\int_0^1\frac{\arctan x}{1+x}\mathrm{d}x.$$

移项得

$$\int_0^1\frac{\arctan x}{1+x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t}=\frac{\pi}{8}\ln 2.$$

(3) $$\int_0^{\pi/2}\frac{e^{\sin x}}{e^{\cos x}+e^{\sin x}}\mathrm{d}x \xlongequal{x=\pi/2-t} -\int_{\pi/2}^{0}\frac{e^{\cos t}}{e^{\cos t}+e^{\sin t}}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{e^{\cos x}}{e^{\cos x}+e^{\sin x}}\mathrm{d}x.$$

移项得 $$2I=\int_0^{\pi/2}\frac{e^{\sin x}+e^{\cos x}}{e^{\sin x}+e^{\cos x}}dx=\frac{\pi}{2},$$

故 $$\int_0^{\pi/2}\frac{e^{\sin x}}{e^{\cos x}+e^{\sin x}}dx=\frac{\pi}{4}.$$

(4) $$\int_2^4\frac{\sqrt{\ln(9-x)}dx}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}}$$

$$\xlongequal{9-x=t+3}-\int_4^2\frac{\sqrt{\ln(t+3)}dt}{\sqrt{\ln(t+3)}+\sqrt{\ln(9-t)}}$$

$$=\int_2^4\frac{\sqrt{\ln(x+3)}dx}{\sqrt{\ln(x+3)}+\sqrt{\ln(9-x)}}.$$

移项得 $$2I=\int_2^4\frac{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}}dx=2,$$

故 $$\int_2^4\frac{\sqrt{\ln(9-x)}dx}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}}=1.$$

题(3)、题(4)两积分式的特点是，被积函数分母有两项，分子是分母中的一项.采用变换时，要善于设计，使分子变为分母中的另一项，而分母不变；积分限不变或上、下限互换.

对三角函数有理式与其它初等函数组合或复合成的被积函数，进行代换时注意到：

(1) 积分区间对称时，可取 $x=-t$；

(2) 积分区间为 $[0,\pi]$ 时，可取 $x=\pi-t$；

(3) 积分区间为 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，可取 $x=\frac{\pi}{2}-t$；

(4) 积分区间为 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 时，可取 $x=\frac{\pi}{4}-t$.

这样，原积分分解成若干可抵消或容易积分的积分.例题如下.

例 37 计算下列积分：

(1) $\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^{10}x-\cos^{10}x}{4-\sin x-\cos x}dx$； (2) $\int_0^{\pi}\frac{x\sin^3x}{1+\cos^2x}dx$.

解 (1) 令 $x=\frac{\pi}{2}-t$，$dx=-dt$，则

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^{10}x-\cos^{10}x}{4-\sin x-\cos x}dx$$
$$=\int_{\pi/2}^{0}\frac{\cos^{10}t-\sin^{10}t}{4-\cos t-\sin t}d(-t)=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^{10}x-\sin^{10}x}{4-\cos x-\sin x}dx.$$

移项得 $\quad 2I=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^{10}x-\cos^{10}x+\cos^{10}x-\sin^{10}x}{4-\cos x-\sin x}dx=0,$

故 $$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^{10}x-\cos^{10}x}{4-\sin x-\cos x}dx=0.$$

(2) $$\int_0^{\pi}\frac{x\sin^3 t}{1+\cos^2 t}dx \xlongequal{x=\pi-t} \int_{\pi}^{0}\frac{(\pi-t)\sin^3 t}{1+\cos^2 t}(-dt)$$
$$=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin^3 x dx}{1+\cos^2 x}-\int_0^{\pi}\frac{x\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx.$$

移项得 $$2I=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin^3 x dx}{1+\cos^2 x}=-\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}d\cos x$$
$$=-\pi\int_0^{\pi}\frac{2-(1+\cos^2 x)}{1+\cos^2 x}d\cos x$$
$$=-2\pi\arctan(\cos x)\Big|_0^{\pi}+\pi\cos x\Big|_0^{\pi}=\pi^2-2\pi,$$

故 $$\int_0^{\pi}\frac{x\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{1}{2}(\pi^2-2\pi).$$

例 38 证明:若 $f(x)$ 为连续的奇函数,则 $\int_0^x f(t)dt$ 是偶函数;若 $f(x)$ 为连续的偶函数,则 $\int_0^x f(t)dt$ 是奇函数.

证 设 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$,于是
$$F(-x)=\int_0^{-x}f(t)dt \xlongequal{t=-u} \int_0^x f(-u)dx=-\int_0^x f(-t)dt.$$

(1) 当 $f(-t)=-f(t)$ 即 $f(t)$ 为奇函数时,有
$$F(-x)=-\int_0^x[-f(t)]dt=\int_0^x f(t)dt=F(x),$$
知 $F(x)$ 是偶函数.

(2) 当 $f(-t)=f(t)$,即 $f(t)$ 为偶数函数时,有
$$F(-x)=-\int_0^x f(t)dt=-F(x),$$

知 $F(x)$ 是奇函数.

例 39 设函数 $f(x), g(x)$ 在$[-a,a]$上连续,$g(x)$ 为偶函数,且 $f(x)+f(-x)\equiv A$(常数),证明:

$$\int_{-a}^{a} f(x)g(x)\mathrm{d}x = A\int_{0}^{a} g(x)\mathrm{d}x.$$

并计算

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin x|\arctan e^{x}\mathrm{d}x.$$

证 $\int_{-a}^{a} f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)g(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)g(x)\mathrm{d}x,$

在等式右边第一式中令 $t=-x$,有

$$\int_{-a}^{0} f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{0} f(-t)g(-t)\mathrm{d}(-t) = \int_{0}^{a} f(-x)g(x)\mathrm{d}x,$$

则

$$\begin{aligned} I &= \int_{0}^{a} f(-x)g(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)g(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{0}^{a}[f(-x)+f(x)]g(x)\mathrm{d}x = A\int_{0}^{a} g(x)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

利用上式,令 $f(x)=\arctan e^{x}$,则

$$f(x)+f(-x)=\arctan e^{x}+\arctan e^{-x}\equiv \frac{\pi}{2},$$

$g(x)=|\sin x|$ 是偶函数,故

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin x|\arctan e^{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi/2}\sin x\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

这里若令 $F(x)=\arctan e^{x}+\arctan e^{-x}$,可证 $F'(x)\equiv 0$,故

$$F(x)\equiv F(0)=\arctan 1+\arctan 1=\frac{\pi}{2}.$$

例 40 证明:

$$\int_{0}^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x = \pi\int_{0}^{\pi/2} f(\sin x)\mathrm{d}x.$$

并计算

$$\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^{2}x}\mathrm{d}x.$$

证
$$\begin{aligned} \int_{0}^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x &\xlongequal{x=\pi-t} \int_{\pi}^{0}(\pi-t)f[\sin(\pi-t)](-\mathrm{d}t) \\ &= \int_{0}^{\pi}(\pi-t)f(\sin t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$= \pi\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x - \int_0^{\pi} x f(\sin x)\mathrm{d}x,$$

移项得
$$\int_0^{\pi} x f(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x.$$

又 $\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} f(\sin x)\mathrm{d}x + \int_{\pi/2}^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x,$

在等式右边第二式中令 $t = \pi - x$,有
$$\int_{\pi/2}^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x = -\int_{\pi/2}^{0} f(\sin t)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} f(\sin x)\mathrm{d}x,$$

故
$$\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\mathrm{d}x,$$

从而 $\int_0^{\pi} x f(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\mathrm{d}x.$

在 $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$ 中令 $f(\sin x) = \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$,有
$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x = -\pi\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\cos x}{1+\cos^2 x} = \pi\arctan(\cos x)\Big|_0^{\pi/2}$$
$$= \pi \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{4}.$$

例 41 证明：
$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x,$$

并计算
$$\int_0^{\pi} \ln\sin x\mathrm{d}x.$$

证 $\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\mathrm{d}x \xlongequal{t=\frac{\pi}{2}-x} \int_{\pi/2}^{0} f(\cos t)(-\mathrm{d}t)$
$$= \int_0^{\pi/2} f(\cos x)\mathrm{d}x,$$

又由上例知 $\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\mathrm{d}x$,故
$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x.$$

而 $\int_0^{\pi} \ln\sin x\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\mathrm{d}x$

$$= \int_0^{\pi/2} \ln \frac{\sin 2x}{2} dx \xlongequal{2x = t} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \ln \sin t dt - \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \ln 2 dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln \sin x dx - \frac{\pi}{2} \ln 2,$$

移项得
$$\int_0^{\pi} \ln \sin x dx = - \pi \ln 2.$$

同时得
$$\int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx = \int_0^{\pi/2} \ln \cos x dx = - \frac{\pi}{2} \ln 2.$$

例 42 利用$\int_0^{\pi/2} f(\cos x, \sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\sin x, \cos x) dx$，计算下列积分：

(1) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + (\tan x)^a}$； (2) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4 x - \cos^4 x}{1 + 3\sin x \cos x} dx$.

解 $\int_0^{\pi/2} f(\cos x, \sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\sin x, \cos x) dx$ 是显然的.

(1) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + (\tan x)^a} = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + (\cot x)^a}$，于是

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + (\tan x)^a} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{1 + (\tan x)^a} + \frac{1}{1 + (\cot x)^a} \right] dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{1 + (\tan x)^a}{1 + (\tan x)^a} dx = \frac{\pi}{4}.$$

(2) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4 x - \cos^4 x}{1 + 3\sin x \cos x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{1 + 3\sin x \cos x} dx$，于是

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4 x - \cos^4 x}{1 + 3\sin x \cos x} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4 x - \cos^4 x + \cos^4 x - \sin^4 x}{1 + 3\sin x \cos x} dx = 0.$$

例 43 计算 $I_n = \int_0^1 (1 - x^2)^n dx$，并证明：

$$1 - \frac{C_n^1}{3} + \frac{C_n^2}{5} - \frac{C_n^3}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

证 将$(1 - x^2)^n$ 展开，即

$$I_n = \int_0^1 [1 + C_n^1 x^2 + C_n^2 x^4 - C_n^3 x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n}] dx$$

$$= 1 - \frac{C_n^1}{3} + \frac{C_n^2}{5} - \frac{C_n^3}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1},$$

又 $\int_0^1 (1-x^2)^n \mathrm{d}x \xlongequal{x=\sin t} \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2 t)^{2n} \cos t \mathrm{d}t$

$= \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} t \mathrm{d}t$（瓦里士公式）$= \dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$.

即证 $1 - \dfrac{C_n^1}{3} + \dfrac{C_n^2}{5} - \dfrac{C_n^3}{7} + \cdots + \dfrac{(-1)^n}{2n+1} = \dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$.

例 44 证明：$\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 \mathrm{d}x > 0$.

证 $\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 \mathrm{d}x \xlongequal{x^2=u} \dfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} \dfrac{\sin u}{\sqrt{u}} \mathrm{d}u$

$\xlongequal{t=u-\pi} \dfrac{1}{2}\left[\int_0^{\pi} \dfrac{\sin u}{\sqrt{u}} \mathrm{d}u + \int_{\pi}^{2\pi} \dfrac{\sin u}{\sqrt{u}} \mathrm{d}u\right]$

$= \dfrac{1}{2}\left[\int_0^{\pi} \dfrac{\sin u}{\sqrt{u}} \mathrm{d}u - \int_0^{\pi} \dfrac{\sin t}{\sqrt{t+\pi}} \mathrm{d}t\right]$

$= \dfrac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\dfrac{1}{\sqrt{u}} - \dfrac{1}{\sqrt{u+\pi}}\right)\sin u \mathrm{d}u.$

显然 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{u}} - \dfrac{1}{\sqrt{u+\pi}}\right)\sin u > 0 \ (0 < u < x)$，

于是 $\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 \mathrm{d}x > 0.$

例 45 证明下列等式：

(1) $\int_a^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \int_1^{1/a} \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \ (a>0)$；

(2) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)\int_0^1 f[a+(b-a)x]\mathrm{d}x$；

(3) $\int_0^1 \ln f(x+t)\mathrm{d}t = \int_0^x \ln \dfrac{f(1+t)}{f(t)} \mathrm{d}t + \int_0^1 \ln f(t)\mathrm{d}t$；

(4) $\int_0^{2\pi} f(|\cos x|)\mathrm{d}x = 4\int_0^{\pi/2} f(|\cos x|)\mathrm{d}x$.

证 (1) $\int_a^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \xlongequal{t=1/x} \int_{1/t}^1 \dfrac{1}{1+(1/t)^2}\left(-\dfrac{\mathrm{d}t}{t^2}\right)$

$= \int_1^{1/a} \dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int_1^{1/a} \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

(2) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=a+(b-a)t} \int_0^1 f[a+(b-a)t](b-a)\mathrm{d}t$

$$= (b-a)\int_0^1 f[a+(b-a)x]\mathrm{d}x.$$

(3) $\int_0^1 \ln f(x+t)\mathrm{d}t \xlongequal{x+t=u} \int_x^{x+1} \ln f(u)\mathrm{d}u$

$$= \int_x^0 \ln f(u)\mathrm{d}u + \int_0^1 \ln f(u)\mathrm{d}u + \int_1^{x+1} \ln f(u)\mathrm{d}u,$$

而 $$\int_1^{x+1} \ln f(u)\mathrm{d}t \xlongequal{u=t+1} \int_0^x \ln f(t+1)\mathrm{d}t,$$

故 $$\int_0^1 \ln f(x+t)\mathrm{d}t = \int_0^x \ln\frac{f(t+1)}{f(t)}\mathrm{d}t + \int_0^1 \ln f(t)\mathrm{d}t.$$

(4) $\int_0^{2\pi} f(|\cos x|) = \int_0^{\pi} f(|\cos x|)\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi} f(|\cos x|)\mathrm{d}x,$

而 $$\int_{\pi}^{2\pi} f(|\cos x|)\mathrm{d}x \xlongequal{x=\pi+t} \int_0^{\pi} f|\cos(t+\pi)|\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\pi} f(|\cos x|)\mathrm{d}x,$$

又 $\int_0^{\pi} f(|\cos x|)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} f(|\cos x|)\mathrm{d}x + \int_{\pi/2}^{\pi} f(|\cos x|)\mathrm{d}x,$

其中 $$\int_{\pi/2}^{\pi} f(|\cos x|)\mathrm{d}x \xlongequal{x=\pi-u} \int_{\pi/2}^{0} f(|\cos u|)\mathrm{d}(-u)$$

$$= \int_0^{\pi/2} f(|\cos x|)\mathrm{d}x.$$

故 $$\int_0^{2\pi} f(|\cos x|)\mathrm{d}x = 4\int_0^{\pi/2} f(|\cos|x)\mathrm{d}x.$$

例 46 证明下列等式：

(1) $\int_0^a x\{f[\varphi(x)] + f[\varphi(a-x)]\}\mathrm{d}x = a\int_0^a f[\varphi(a-x)]\mathrm{d}x$；

(2) $\int_1^a f\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_1^a f\left(x+\frac{a^2}{x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}.$

证 (1) 原式等价于

$$\int_0^a xf[\varphi(x)]\mathrm{d}x = \int_0^a (a-x)f[\varphi(a-x)]\mathrm{d}x,$$

故 $$\int_0^a xf[\varphi(x)]\mathrm{d}x \xlongequal{x=a-t} -\int_a^0 (a-t)f[\varphi(a-t)]\mathrm{d}t$$

$$= a\int_0^a f[\varphi(a-t)]\mathrm{d}t - \int_0^a ft[\varphi(a-t)]\mathrm{d}t$$

$$= a\int_0^a f[\varphi(a-x)]\mathrm{d}x - \int_0^a x f[\varphi(a-x)]\mathrm{d}x,$$

移项即得所证等式.

(2) $\displaystyle\int_1^a f\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x} \xlongequal{x=\sqrt{t}} \int_1^{a^2} f\left(t+\frac{a^2}{t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{2t}$

$$= \frac{1}{2}\int_1^a f\left(t+\frac{a^2}{t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t} + \frac{1}{2}\int_a^{a^2} f\left(t+\frac{a^2}{t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

在上式右边第二个积分中令 $u=\dfrac{a^2}{t}$,有

$$\int_a^{a^2} f\left(t+\frac{a^2}{t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t} = -\int_a^1 f\left(u+\frac{a^2}{u}\right)\frac{\mathrm{d}u}{u} = \int_1^a f\left(u+\frac{a^2}{u}\right)\frac{\mathrm{d}u}{u},$$

故 $$\int_1^a f\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_1^a f\left(x+\frac{a^2}{x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

3. 用分部积分法计算与证明定积分

例 47 计算下列积分:

(1) $\displaystyle\int_0^\pi x\mathrm{e}^{\sin x}|\cos x|\mathrm{d}x$; (2) $\displaystyle\int_{-1}^1 |x-a|\mathrm{e}^x\mathrm{d}x, |a|\leqslant 1$.

解 (1) $\displaystyle\int_0^\pi x\mathrm{e}^{\sin x}|\cos x|\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} x\mathrm{d}\mathrm{e}^{\sin x} - \int_{\pi/2}^\pi x\mathrm{d}\mathrm{e}^{\sin x}$

$$= x\mathrm{e}^{\sin x}\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x - x\mathrm{e}^{\sin x}\Big|_{\pi/2}^{\pi} + \int_{\pi/2}^\pi \mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x$$

$$= \pi\mathrm{e} - 1 - \int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x + \int_{\pi/2}^\pi \mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x.$$

由 $$\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^\pi \mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x,$$

知 $$\int_0^\pi x\mathrm{e}^{\sin x}|\cos x|\mathrm{d}x = \pi\mathrm{e} - 1.$$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^1 |x-a|\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \int_{-1}^a (a-x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x + \int_a^1 (x-a)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

$$= (a-x)\mathrm{e}^x\Big|_{-1}^a + \int_{-1}^a \mathrm{e}^x\mathrm{d}x + (x-a)\mathrm{e}^x\Big|_a^1 - \int_a^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$$

$$= (a-x+1)\mathrm{e}^x\Big|_{-1}^a + (x-a-1)\mathrm{e}^x\Big|_a^1$$

$$= 2\mathrm{e}^a - \left(\mathrm{e}+\frac{1}{\mathrm{e}}\right)a - \frac{2}{\mathrm{e}}.$$

例 48 计算下列积分：

(1) $\int_0^{\pi/4} \frac{x\sec^2 x}{(1+\tan x)^2}dx$； (2) $\int_0^{\pi/4} \frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx$.

解 分部积分法经常要与换元积分法结合起来使用.

$$(1) \int_0^{\pi/4} \frac{x\sec^2 x}{(1+\tan x)^2}dx = \int_0^{\pi/4} \frac{x}{(1+\tan x)^2}d(\tan x + 1)$$

$$= \int_0^{\pi/4} x d\left(-\frac{1}{1+\tan x}\right)$$

$$= -\frac{x}{1+\tan x}\bigg|_0^{\pi/4} + \int_0^{\pi/4} \frac{x}{(1+\tan x)^2}$$

$$= -\frac{\pi}{8} + \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\tan x}$$

$$\xlongequal{x=\pi/4-t} -\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}(1+\tan t)dt$$

$$= -\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}[t - \ln|\cos t|]\bigg|_0^{\pi/4} = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\ln 2$$

$$= \frac{1}{4}\ln 2.$$

$$(2) \int_0^{\pi/4} \frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx = \int_0^{\pi/4} x\tan x d\tan x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} x d\tan^2 x$$

$$= \frac{1}{2}x\tan^2 x\bigg|_0^{\pi/4} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\tan^2 x dx$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}(\sec^2 x - 1)dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}[\tan x - x]\bigg|_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

例 49 计算下列积分：

(1) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}dx$； (2) $\int_0^{\pi}(x\sin x)^2 dx$.

解 (1) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}dx = \int_0^1 \ln(1+x)d\frac{1}{2-x}$

$$= \frac{\ln(1+x)}{2-x}\bigg|_1^0 - \int_0^1 \frac{1}{(2-x)}\frac{dx}{(1+x)}$$

$$= \ln 2 + \frac{1}{3}\int_0^1\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= \ln 2 + \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|\Bigg|_0^1$$

$$= \ln 2 + \frac{1}{3}\ln\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\ln 2 = \frac{1}{3}\ln 2.$$

(2) $\int_0^\pi (x\sin x)^2 dx = \int_0^\pi x^2 \cdot \frac{1-\cos 2x}{2}dx$

$$= \int_0^\pi \frac{x^2}{2}dx - \frac{1}{2}\int_0^\pi x^2\cos 2x dx = \frac{x^3}{6}\Bigg|_0^\pi - \frac{1}{4}\int_0^\pi x^2 d\sin 2x$$

$$= \frac{\pi^3}{6} - \frac{x^2}{4}\sin 2x\Bigg|_0^\pi - \frac{1}{4}\int_0^\pi 2x\sin 2x dx$$

$$= \frac{\pi^3}{6} - \frac{1}{4}\int_0^\pi x d\cos 2x = \frac{\pi^3}{6} - \frac{x}{4}\cos 2x\Bigg|_0^\pi + \frac{1}{4}\int_0^\pi \cos 2x dx$$

$$= \frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{8}\sin 2x\Bigg|_0^\pi = \frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{4}.$$

例 50 设 $f''(x)$ 连续，$f(\pi) = 2$，且有

$$\int_0^\pi [f(x) + f''(x)]\sin x dx = 3,$$

求 $f(0)$.

解 $\int_0^\pi f(x)\sin x dx = [-f(x)\cos x]\Big|_0^\pi + \int_0^\pi f'(x)\cos x dx$

$$= f(\pi) + f(0) + [f'(x)\sin x]\Big|_0^\pi - \int_0^\pi f''(x)\sin x dx,$$

移项得 $\int_0^\pi [f(x) + f''(x)]\sin x dx = f(\pi) + f(0)$,

则 $f(\pi) + f(0) = 5 \Longrightarrow f(0) = 5 - 2 = 3.$

例 51 计算 $\int_0^a \arctan\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}dx\ (a > 0)$.

解 本例用分部积分法求解，但要先进行代换.

(1) 令 $w(x) = \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$，则 $w(a) = 0$. 于是

$$I = x\arctan w(x)\Big|_0^a - \int_0^a x \cdot \frac{1}{1+w^2} \cdot \frac{1}{2w} \cdot \frac{-2a}{(a+x)^2}dx$$

$$= \int_0^a \frac{x}{2\sqrt{a^2-x^2}}dx = -\frac{1}{4}\int_0^a \frac{d(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}\Big|_0^a=\frac{a}{2}.$$

(2) 令 $x=a\cos t\left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，则

$$I=\int_{\pi/2}^{0}\frac{a}{2}t\mathrm{d}\cos t=a\left(\frac{t}{2}\cos t\right)\Big|_{\pi/2}^{0}+\int_0^{\pi/2}\frac{a}{2}\cos t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{a}{2}\sin t\Big|_0^{\pi/2}=\frac{a}{2}.$$

(3) 令 $t=\arctan\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$，则 $\tan t=\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$. 于是

$$\cos 2t=\frac{1-\tan^2 t}{1+\tan^2 t}=\frac{1-(a-x)/(a+x)}{1+(a-x)/(a+x)}=\frac{x}{a}.$$

$$I=\int_{\pi/4}^{0}t\mathrm{d}(a\cos 2t)=at\cos 2t\Big|_{\pi/4}^{0}+a\int_0^{\pi/2}\cos 2t\mathrm{d}t$$

$$=a\cdot\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\pi/4}=\frac{a}{2}.$$

例 52 计算下列积分：

(1) $\int_0^{\pi}\sin^{n-1}x\cos(n+1)x\mathrm{d}x$； (2) $\int_0^{\pi}x\sqrt{\cos^2 x-\cos^4 x}\mathrm{d}x$.

解 先将被积函数变形，再进行积分.

(1) $$I=\int_0^{\pi}\sin^{n-1}x[\cos nx\cos x-\sin nx\sin x]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\mathrm{d}\sin^n x-\int_0^{\pi}\sin^n x\sin nx\mathrm{d}x$$

$$=\left(\frac{\cos nx}{n}\sin^n x\right)\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\sin^n x\sin nx\mathrm{d}x-\int_0^{\pi}\sin^n x\sin nx\mathrm{d}x$$

$$=0.$$

(2) $$I=\int_0^{\pi}x|\cos x|\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}x\cos x\sin x\mathrm{d}x$$

$$=\int_{\pi/2}^{\pi}x\cos x\sin x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi/2}x\sin 2x\mathrm{d}x-\int_{\pi/2}^{\pi}x\sin 2x\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{x\cos 2x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}\right]\Big|_0^{\pi/2}$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{x\cos 2x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\right]\Big|_{\pi/2}^{\pi}=\frac{\pi}{2}.$$

例 53 计算下列积分：

(1) $f(x)=\int_{\sqrt{\pi/2}}^{\sqrt{x}}\frac{du}{1+(\tan u^2)^{\sqrt{2}}}$，求$\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{x}}f(x)dx$；

(2) $f(x)=\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt$，求$\int_0^1 xf(x)dx$.

解 要分步求解.

(1) $$\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{x}}f(x)dx=2\int_0^{\pi/2}\sqrt{x}f'(x)dx$$

$$=-\int_0^{\pi/2}\sqrt{x}\,df(x)=-\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}.$$

又 $$\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}\xlongequal{t=\pi/2-x}\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{1+(\cot t)^{\sqrt{2}}}$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{(\tan t)^{\sqrt{2}}+1-1}{1+(\tan t)^{\sqrt{2}}}dt=\frac{\pi}{2}-\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{1+(\tan t)^{\sqrt{2}}},$$

故 $$\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}=\frac{\pi}{4},$$

即 $$\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{x}}f(x)dx=-\frac{\pi}{4}.$$

(2) $$\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1 x\left[\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt\right]dx$$

$$=\int_0^1\left[\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt\right]d\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{2}\left[\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt\right]\Big|_0^1-\int_0^1 x^3e^{-x^4}dx$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1 e^{-x^4}d(-x^4)=\frac{1}{4}e^{-x^4}\Big|_0^1=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{e}-1\right).$$

例 54 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且 $\int_0^{\pi}f(x)dx=0$，$\int_0^{\pi}f(x)\cos x dx=0$. 证明：在 $(0,\pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1，ξ_2，使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

证 令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$，$0\leqslant x\leqslant\pi$. $F(0)=0$，$F(x)=0$.

又 $$0=\int_0^{\pi}f(x)\cos x dx=\int_0^{\pi}\cos x dF(x)$$

$$= F(x)\cos x\Big|_0^\pi + \int_0^\pi F(x)\sin x\mathrm{d}x = \int_0^\pi F(x)\sin x\mathrm{d}x.$$

所以∃ $\xi \in (0,\pi)$ 使$F(\xi)\sin\xi = 0$. 这是因为,若$F(\xi)\sin\xi \neq 0$,则必$F(x)\sin x$恒大于(或恒小于)零,这与$\int_0^\pi F(x)\sin x\mathrm{d}x = 0$矛盾. 但在$(0,\pi)$ 内,$\sin\xi \neq 0$,故 $F(\xi) = 0$.

对 $F(x)$ 在$[0,\xi]$上应用罗尔定理知,至少存在$\xi_1 \in (0,\xi)$,$\xi_2 \in (\xi,\pi)$,使

$$F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0 \Longrightarrow f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0.$$

例 55 求函数 $F(x) = \int_{-1}^x f(t)\mathrm{d}t$ 的表达式,其中

$$f(x) = \begin{cases} 2x + \dfrac{3}{2}x^2, & -1 \leqslant x < 0, \\ \dfrac{xe^x}{(e^x+1)^2}, & 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

解 因为,当 $-1 \leqslant x < 0$ 时,有

$$F(x) = \int_{-1}^x \left(2t + \frac{3}{2}t^2\right)\mathrm{d}t = \left(t^2 + \frac{1}{2}t^3\right)\Big|_{-1}^x$$
$$= x^3/2 + x^2 + 1/2.$$

当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时,有

$$F(x) = \int_{-1}^0 f(t)\mathrm{d}t + \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$
$$= \left(t^2 + \frac{1}{2}t^3\right)\Big|_{-1}^0 + \int_0^x \frac{te^t}{(e^t+1)^2}\mathrm{d}t$$
$$= -\frac{1}{2} - \int_0^x t\mathrm{d}\left(\frac{1}{e^t+1}\right) = -\frac{1}{2} - t\frac{1}{e^t+1}\Big|_0^x - \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{e^t+1}$$
$$= -\frac{1}{2} - \frac{x}{e^x+1} + \int_0^x \frac{\mathrm{d}e^t}{e^t(e^t+1)}$$
$$= -\frac{1}{2} - \frac{x}{e^x+1} + \ln\frac{x}{e^x+1}\Big|_0^x$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{x}{e^x + 1} + \ln 2 + \ln \frac{e^x}{e^x + 1},$$

即 $$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^3 + x^2 - \frac{1}{2}, & -1 \leqslant x < 0, \\ \ln 2 + \ln \frac{e^x}{e^x + 1} - \frac{x}{e^x + 1} - \frac{1}{2}, & 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

例 56 设 $f(0) = 1, f(2) = 3, f'(2) = 5$，计算 $\int_0^1 x f''(2x) \mathrm{d}x$.

解 $$\int_0^1 x f''(2x) \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 x \mathrm{d}f'(x)$$

$$= \frac{1}{2}[xf'(x)]\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 f'(2x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{5}{2} - \frac{1}{4}\int_0^1 \mathrm{d}f(2x) = \frac{5}{2} - \frac{1}{4}f(2x)\Big|_0^1 = 2.$$

例 57 计算下列不定积分：

(1) $\int_1^{16} \arctan\sqrt{\sqrt{x} - 1}\mathrm{d}x$； (2) $\int_{1/e}^{e} |\ln x| \mathrm{d}x$.

解 (1) 令 $\sqrt{x} = t$，则

$$\int_1^{16} \arctan\sqrt{\sqrt{x} - 1}\mathrm{d}x = \int_1^4 \arctan\sqrt{t-1}\mathrm{d}t^2$$

$$= t^2 \arctan\sqrt{t-1}\Big|_1^4 - \int_1^4 t^2 \frac{1}{1 + (t-1)^2}\frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t-1}}$$

$$= 16\arctan\sqrt{3} - \frac{1}{2}\int_1^4 (\sqrt{t-1} + 1/\sqrt{t-1})\mathrm{d}(t-1)$$

$$= \frac{16}{3}\pi - \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(t-1)^{3/2} + 2(t-1)^{1/2}\right]\Big|_1^4 = \frac{16}{3}\pi - 2\sqrt{3}.$$

(2) 因为 $\ln 1 = 0$，所以

$$\int_{1/e}^{e} |\ln x| \mathrm{d}x = \int_{1/e}^{1} -\ln x \mathrm{d}x + \int_1^e \ln x \mathrm{d}x$$

$$= -x\ln x\Big|_{1/e}^{1} - \int_{1/e}^{1}\mathrm{d}x + x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \mathrm{d}x = 2(1 - 1/e).$$

例 58 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数，证明：

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x = f(1).$$

证 因为 $f'(x)$ 在$[0,1]$上连续，则 $\exists M$，使在$[0,1]$上，$|f'(x)|\leqslant M$. 且有

$$\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}f(x)\Big|_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}f'(x)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{n+1}f(1) - \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}f'(x)\mathrm{d}x.$$

而 $$\left|\int_0^1 x^{n+1}f'(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant M\int_0^1 x^{n+1}\mathrm{d}x = \frac{M}{n+2} \to 0\ (n\to+\infty),$$

故 $$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\left[f(1) - \int_0^1 x^{n+1}f'(x)\mathrm{d}x\right]$$
$$= f(1).$$

由此可得积分估计式

$$\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x = \frac{f(1)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

例 59 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，$\varphi(x)$ 在$[a,b]$上连续且在(a,b)内可微，$\varphi'(x)\geqslant 0$ $(x\in(a,b))$. 用分部积分法与积分第一中值定理证明积分第二中值定理.

证 设 $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，于是

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}F(x)$$
$$= F(x)\varphi(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x \text{（积分第一中值定理）}$$
$$= F(b)\varphi(b) - F(a)\varphi(a) - F(\xi)\int_a^b \varphi'(x)\mathrm{d}x$$
$$= F(b)\varphi(b) - F(a)\varphi(a) - F(\xi)[\varphi(b) - \varphi(a)]$$
$$= \varphi(b)[F(b) - F(\xi)] + \varphi(a)[F(\xi) - F(a)]$$
$$= \varphi(b)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x + \varphi(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x.$$

应用$\int_a^b \varphi'(x)\mathrm{d}x = \varphi(b) - \varphi(a)$ 时，要求 $\varphi'(x)$ 在$[a,b]$上连续.

第四节　非正常积分(反常积分)

主要内容

1. 设函数 f 定义在无穷区间$[a, +\infty)$上,且在任何有限区间$[a,A]$上可积,如果存在极限 $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x = J$,则称 J 为 $f(x)$ 在$[a, +\infty)$上的无穷限非正常积分,记作 $J=\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$,并称$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 否则,称$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散. 非正常积分亦称广义积分.

类似可定义$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 的收敛与发散.

而$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x+\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$,当且仅当两个积分$\int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x$ 与$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 都收敛时积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 才收敛.

2. 设 $f(x)$ 定义在$[a,b]$上,在 $U_-(b,\delta)$ 内无界,则 $\forall\ \varepsilon(\varepsilon < b-a)$,$f$ 在$[a,b-\varepsilon]$上可积,如果极限$\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x=G$存在,则称 G 为 $f(x)$ 在$[a,b]$上的无界函数非正常积分,记作$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,并称$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 否则称$\int_a^b f(x)$ 发散.

类似可定义$\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 的敛散性.

若函数 f 在 c $(a<c<b)$ 点无界,则定义

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\mathrm{d}x+\lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

当且仅当等式右边两个积分都收敛时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 才收敛.

若函数 f 在$[a,b]$ 的两端点都无界，则定义

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon_1 \to 0^+}\int_{a+\varepsilon_1}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon_2 \to 0^+}\int_{c}^{b-\varepsilon_2} f(x)\mathrm{d}x,$$

其中 $a < c < b$.

3. 若 $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{A\to+\infty}[F(A) - F(-A)]$ 收敛，则称其极限值为$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的柯西主值，记作(cpv)$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$.

4. 柯西收敛原理　无穷限积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件是：$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ M > a$，使对于 $A_1, A_2 > M$ 时，都有

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

5. 无穷限积分的性质

(1) 若$\int_a^{+\infty} f_1(x)\mathrm{d}x$ 和$\int_a^{+\infty} f_2(x)\mathrm{d}x$ 都收敛，则其线性组合 $\int_a^{+\infty}[k_1f_1(x) + k_2f_2(x)]\mathrm{d}x$ 也收敛 (k_1,k_2 为常数)，且

$$\int_a^{+\infty}[k_1f_1(x) + k_2f_2(x)]\mathrm{d}x = k_1\int_a^{+\infty} f_1(x)\mathrm{d}x + k_2\int_a^{+\infty} f_2(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 若 f 在任何有限区间$[a,A]$上可积，$a < b$，则$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与$\int_b^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 有相同的敛散性，且当它们同时收敛时，有

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

(3) 若 f 在任何有限区间$[a,A]$上可积，且$\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛，则称$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，且

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right| < \int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x.$$

若 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，而 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 不收敛，则称 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 条件收敛.

6. 非负函数的非正常积分的敛散性判别法

(1) 比较判别法　设在 $[a, +\infty)$ 上非负函数 f 和 φ 在任何有限区间 $[a,A]$ 上都可积，且 $k\varphi(x) \geqslant f(x) \geqslant 0$ $(k>0$，常数$)$，则当 $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x$ 收敛时，$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛；当 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散时，$\int_a^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x$ 也发散.

(2) 比较判别法的极限形式　若在 $[a, +\infty)$ 上，$f(x) \geqslant 0$，$\varphi(x) \geqslant 0$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = l$，则

1° 当 $0 < l < +\infty$ 时，$\int_a^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 有相同的敛散性.

2° 当 $l = 0$ 时，$\int_a^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x$ 收敛 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

3° 当 $l = +\infty$ 时，$\int_a^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x$ 发散 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

7. 柯西判别法　设在 $[a, +\infty)$ 上恒有 $f(x) \geqslant 0$，对任意正常数 k $(k > 0)$，有

(1) 若 $f(x) \leqslant \dfrac{k}{x^p}$，且 $p > 1$，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

(2) 若 $f(x) \geqslant \dfrac{k}{x^p}$，且 $p \leqslant 1$，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

其极限形式是：在 $[a, +\infty)$ 上 $(a > 0)$，若 $f(x) \geqslant 0$，有 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x) = l$，则

(1) 若 $0 \leqslant l < +\infty$，且 $p > 1$，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

(2) 若 $0 \leqslant l < +\infty$，且 $p \leqslant 1$，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

8. 阿贝耳(Abel)判别法　若$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛，$g(x)$在$[a, +\infty)$上单调有界，则$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$收敛.

9. 狄利克雷判别法　若函数$F(A)=\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$在$[a, +\infty)$上有界，$g(x)$在$[a, +\infty)$上单调且当$x\to+\infty$时趋向于零，则$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$收敛.

对以上3～9条的各项内容，无界函数的非正常积分也有相类似的性质，恕不赘述.

疑难解析

1. 非正常积分与正常积分有何不同?在计算上有什么区别?

答　非正常积分又称反常积分、广义积分，正常积分即黎曼积分、常义积分. 黎曼积分假定了积分区间有限和被积函数在区间上有界这两个条件，非正常积分则突破了这两个条件的限制，考虑在无穷区间上和对无界函数的积分问题.

非正常积分通常可以化为极限记号下的正常积分，一般是带着极限记号计算正常积分，再对正常积分的结果求极限而得非正常积分的值;也可以先计算对应的不定积分$F(x)+c$，然后利用牛顿-莱布尼茨公式并求极限，获得非正常积分的值. 因此，在不定积分和定积分中用过的变量代换、分部积分、牛顿-莱布尼茨公式等方法，以及拆项、拼凑、分段、组合等种种技巧，在非正常积分计算中同样可以使用. 只是为避免做无用的工作，最好先确定非正常积分的敛散性后再行计算.

2. 无穷区间的非正常积分与无界函数的非正常积分有什么联系?

答　无穷区间的非正常积分与无界函数的非正常积分并不

是截然不同的，一般可以互相转换．例如，对无穷区间上的非正常积分可变换成无界函数的非正常积分，即

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=\frac{1}{t}} -\int_{1/a}^{0} \frac{1}{t^2} f\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t \quad \left(令\frac{1}{t^2}f\left(\frac{1}{t}\right)=g(t)\right)$$

$$=\int_0^{1/a} g(t)\mathrm{d}t.$$

同样，可以写出反过来的情形．

方法、技巧与典型例题分析

非正常积分问题包含五个方面的内容：非正常积分的计算，非正常积分敛散性的判定，非正常积分的极限，无穷限积分敛散性与无穷远处的状态，非正常积分与"积分和"极限．由于内容比较广泛，而且有的问题比较深奥，所以我们只对一般的问题进行讨论．

一、非正常积分的计算

非正常积分可以化为极限记号下的正常积分，然后带着极限记号计算正常积分，再对计算的结果取极限．因此，其计算方法仍然是利用换元积分法、分部积分法、牛顿－莱布尼茨公式和其它正常积分中使用的方法．

例 1　计算下列无穷限非正常积分：

(1) $I_n=\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}x^n\mathrm{d}x\ (n\in\mathbf{N})$；　(2) $I_n=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$；

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x+x^2}$；　(4) $\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p}\ (a>0)$.

解　可以先用求不定积分的方式计算．

(1) 当 $n=0$ 时，$I_0=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=1$.

当 $n\geqslant 1$ 时，有

$$I_n=\lim_{A\to+\infty}\int_0^A \mathrm{e}^{-x}x^n\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}(-\mathrm{e}^{-x}x^n)\Big|_0^A+\lim_{A\to+\infty}n\int_0^A \mathrm{e}^{-x}x^{n-1}\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{A\to+\infty} n\int_0^A e^{-x}x^{n-1}dx.$$

依次递推，即得 $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^n dx = n!$.

(2) $$I_1 = \int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a^2} = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A\frac{dx}{x^2+a^2}$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\Big|_0^A = \frac{\pi}{2a}.$$

而 $$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int\frac{x^2+a^2-x^2}{(x^2+a^2)^n}dx$$

$$= \frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} + \frac{1}{a^2}\int\frac{-x^2}{(x^2+a^2)^n}dx$$

$$= \frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} + \frac{1}{2a^2(n-1)}\int x d\left[\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}\right]$$

$$= \left[\frac{1}{a^2} - \frac{1}{2a^2(n-1)}\right]\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}$$

$$+ \frac{1}{2a^2(n-1)}\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}.$$

于是 $$I_n = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A\frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}$$

$$= \left(\frac{1}{a^2}\frac{2n-3}{2n-2}\right)\left(\frac{1}{a^2}\frac{2n-5}{2n-4}\right)I_{n-2} = \cdots$$

$$= \frac{1}{a^{2(n-1)}}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}I_1 = \frac{1}{2a^{2n-1}}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}.$$

(3) 因为 $$\int\frac{dx}{1+x+x^2} = \int\frac{d(x+1/2)}{(x+1/2)^2+(\sqrt{3/4})^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x+1/2}{\sqrt{3/4}} + c,$$

故 $$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x+x^2} = \lim_{A\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x+1/2}{\sqrt{3/4}}\Big|_0^A = \frac{2\sqrt{3}}{9}\pi.$$

(4) 因为 $\int\frac{dx}{x(\ln x)^p} = \int\frac{d\ln x}{(\ln x)^p}$，且

当 $p\neq 1$ 时，$\int\frac{dx}{x(\ln x)^p} = \frac{1}{p-1}(\ln x)^{1-p}$，

当 $p=1$ 时，$\int\frac{dx}{x\ln x} = \ln|\ln p|$，

故　当 $p>1$ 时，$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x\ln x)^p}=\frac{1}{p-1}(\ln a)^{1-p}$；

当 $p\leqslant 1$ 时，$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p}=\infty$，发散.

例 2　计算下列无穷限非正常积分：

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$；　　(2) $\int_0^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x$；

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty}(|x|-x)\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x$；　(4) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}$.

解　(1) $\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{3(x+1)}-\frac{x-2}{3(x^2-x+1)}$，

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}=\int\left[\frac{1}{3(x+1)}-\frac{x-2}{3(x^2-x+1)}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+c,$$

故
$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}=\lim_{A\to+\infty}\int_0^A\frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$$

$$=\lim_{A\to+\infty}\left[\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]\Bigg|_0^A$$

$$=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

(2) $$\int\frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x=\int\frac{1+1/x^2}{x^2+1/x^2}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(x-1/x)}{(x-1/x)^2+2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}+c,$$

故
$$\int_0^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}\int_0^A\frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}\Bigg|_0^A=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

(3) $$\int_{-\infty}^{+\infty}(|x|+x)\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{+\infty}^0(-x+x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty}(x+x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

$$=2\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-2\int_0^{+\infty}x\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x}$$

$$= \lim_{A\to+\infty} -2[xe^{-x}+e^{-x}]\Big|_0^A = 2.$$

(4) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}$

$$\xlongequal{x=1/t} \int_1^{0+\epsilon} \frac{1}{1/t\cdot\sqrt{1+1/t^5+1/t^{10}}}\frac{-dt}{t^2}$$

$$= \int_0^1 \frac{t^4dt}{\sqrt{t^{10}+t^5+1}} \xlongequal{t^5=u} \frac{1}{5}\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u^2+u+1}}$$

$$= \frac{1}{5}\int_0^1 \frac{d(u+1/2)}{\sqrt{(u+1/2)^2+3/4}} = \frac{1}{5}\ln(1+2\sqrt{3}).$$

例 3 计算下列无界函数的非正常积分：

(1) $\int_{-1}^1 \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$； (2) $\int_0^{\pi/2} \ln\sin x dx$.

解 无界函数的积分性经常要用变量代换或区间分段的方法来计算，使得可以通过部分量的叠加或抵消来简化积分、求出积分值.

(1) $x=0$ 是瑕点（$f(x)$ 在 $U(0,\delta)$ 内无界），故

$$\int_{-1}^1 \frac{e^{1/x}}{x^2}dx = \lim_{\epsilon_1\to0^+}\int_{-1}^{0-\epsilon_1}\frac{e^{1/x}}{x^2}dx + \lim_{\epsilon_2\to0^+}\int_{0+\epsilon_2}^1\frac{e^{1/x}}{x^2}dx$$

$$= \lim_{\epsilon_1\to0^+}\int_1^{0-\epsilon_1} e^{1/x}d\left(-\frac{1}{x}\right) + \lim_{\epsilon_2\to0^+}\int_{0+\epsilon_2}^1 e^{1/x}d\left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$= 1/e + \infty,$$

所以积分 $\int_{-1}^1 \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$ 发散.

(2) 作变量代换 $x=2t$，得

$$\int_0^{\pi/4} \ln\sin x dx = 2\int_0^{\pi/4}\ln\sin 2t dt = 2\int_0^{\pi/4}\ln(2\sin t\cos t)dt$$

$$= \lim_{\epsilon\to0^+} 2\int_{0+\epsilon}^{\pi/4}(\ln 2+\ln\sin t+\ln\cos t)dt$$

$$= \frac{\pi}{2}\ln 2 + \lim_{\epsilon\to0^+} 2\int_{0+\epsilon}^{\pi/4}\ln\sin t dt + 2\int_0^{\pi/4}\ln\cos t dt.$$

对积分$\int_0^{\pi/4}\ln\sin t\mathrm{d}t$作变换$x=\frac{\pi}{2}-u$,得

$$2\int_0^{\pi/4}\ln\cos t\mathrm{d}t=-2\int_{\pi/2}^{\pi/4}\ln\sin t\mathrm{d}t,$$

故
$$\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\ln 2+2\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\mathrm{d}x.$$

于是
$$\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

例 4 计算下列无界函数的非正常积分：

(1) $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}}$; (2) $I_n=\int_0^1\frac{x^n\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}$.

解 (1) $\int\frac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}}\overset{\sqrt{1-x}=t}{=\!=\!=\!=}-2\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$

$$=-2\arctan t+c=-2\arctan\sqrt{1-x}+c,$$

故
$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(-2\arctan\sqrt{1-x}\right)\Big|_0^{1-\varepsilon}$$

$$=-2\left(\lim_{\varepsilon\to0^+}\arctan\sqrt{1-1+\varepsilon}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

(2) 因为$\sqrt{1-x}\frac{x^n}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}\to\frac{1}{2}(x\to1^-)$,且$p=\frac{1}{2}<1$,所以积分$I_n$收敛.

令$x=\sin t$,则

$$I_n=\int_0^1\frac{x^n\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}=\int_0^{\pi/2}\sin^n t\mathrm{d}t\ (\text{瓦里士公式})$$

$$=\begin{cases}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2}, & \text{当 } n=2k \text{ 时},\\ \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}, & \text{当 } n=2k-1 \text{ 时}.\end{cases}$$

本题没有标出极限记号，但应知$x=1$为瑕点.

例 5 计算下列非正常积分：

(1) $\int_1^3 \ln\sqrt{\frac{\pi}{|2-x|}}\mathrm{d}x$； (2) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}$.

解 (1) $x=2$ 是瑕点，则

$$\int_1^3 \ln\sqrt{\frac{\pi}{|2-x|}}\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\int_1^{2-\varepsilon_1}\ln\sqrt{\frac{\pi}{2-x}}+\lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\int_{2+\varepsilon_2}^3\ln\sqrt{\frac{\pi}{x-2}}\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\int_1^{2-\varepsilon_1}\left[\ln\sqrt{\pi}-\frac{1}{2}\ln(2-x)\right]\mathrm{d}x$$

$$+\lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\int_{2+\varepsilon_2}^3\left[\ln\sqrt{\pi}-\frac{1}{2}\ln(x-2)\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\ln\pi-\lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\frac{1}{2}[x\ln(2-x)-\ln|2-x|-x]\Big|_1^{2-\varepsilon_1}$$

$$+\frac{1}{2}\ln\pi-\lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\frac{1}{2}[x\ln(x-2)+\ln|x-2|-x]\Big|_{2+\varepsilon_2}^3$$

$$=\left(\frac{1}{2}\ln\pi+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\ln\pi+\frac{1}{2}\right)=\ln\pi+1.$$

(2) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}=\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}=\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}$,

$$\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{1+\varepsilon}^2\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}$$

$$\xlongequal{\sqrt{x-1}=t}\lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\int_{0+\varepsilon_1}^1\frac{2t\mathrm{d}t}{(1+t^2)t}=\lim_{\varepsilon_1\to 0^+}2\arctan t\Big|_{0+\varepsilon_1}^1=\frac{\pi}{2},$$

$$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}=\lim_{A\to+\infty}\int_2^A\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}$$

$$\xlongequal{\sqrt{x-1}=t}\lim_{A_1\to+\infty}\int_1^{A_1}\frac{2t\mathrm{d}t}{(1+t^2)t}=\lim_{A_1\to+\infty}2\arctan\Big|_1^{A_1}=\frac{\pi}{2}.$$

所以
$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

例 6 设 $\varphi(x)=\dfrac{x+1}{x(x-2)}$，计算 $\displaystyle\int_1^3 \frac{\varphi'(x)}{1+\varphi^2(x)}\mathrm{d}x$.

解 $x=2$ 是 $\varphi(x)$ 的瑕点.

$$\int_1^3 \frac{\varphi'(x)}{1+\varphi^2(x)}\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\int_1^{2-\varepsilon_1}\frac{\varphi'(x)\mathrm{d}x}{1+\varphi^2(x)}+\lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\int_{2+\varepsilon_2}^{3}\frac{\varphi'(x)\mathrm{d}x}{1+\varphi^2(x)}$$

$$=\lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\arctan\varphi(x)\Big|_1^{2-\varepsilon_1}+\lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\arctan\varphi(x)\Big|_{2+\varepsilon_2}^{3}$$

$$=\arctan 2-\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{4}{3}-\frac{\pi}{2}=\arctan 2+\arctan\frac{4}{3}-\pi.$$

例 7 证明 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+x}\mathrm{d}x$ 收敛，且 $\displaystyle\left|\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+x}\mathrm{d}x\right|\leqslant 1$.

证 为简便起见，我们不再写出极限符号，请读者自己理解计算中带有极限的过程.

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+x}\mathrm{d}x=\frac{\sin x}{1+x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x.$$

又 $\dfrac{|\sin x|}{(1+x)^2}\leqslant\dfrac{1}{(1+x)^2}$，而 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^2}$ 收敛，所以

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x \text{ 收敛} \Rightarrow \int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+x}\mathrm{d}x \text{ 收敛}.$$

而
$$\left|\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+x}\mathrm{d}x\right|=\left|\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^2}$$

$$=-\frac{1}{1+x}\Big|_0^{+\infty}=1.$$

二、非正常积分敛散性的判别

非正常积分的敛散性，可依据敛散性定义、非正常积分的性质、非负函数非正常积分的收敛判别法（比较法则、比较法则的极限形式和柯西判别法）、阿贝耳判别法和狄利克雷判别法进行. 关键是要根据具体情况确定恰当的判别方法.

例 8 判断下列命题的真伪，试说明理由或举出反例.

(1) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = f(x)$，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_{x}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = -f(x)$，$\forall\ x \in (-\infty, +\infty)$ 成立；

(2) 积分$\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$；

(3) 积分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，就可以用积分和式的极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 来计算；

(4) 积分$\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则对$[a,b]$的任一分割 T，总可选取 ξ_i，使当 $n \longrightarrow +\infty$ 时，$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \longrightarrow A$(有限数)；

(5) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ 存在，$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $A = 0$；

(6) 若$\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$，则$\displaystyle\int_a^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$ 必收敛；

(7) 若$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = A$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_a^n f(x)\mathrm{d}x = A\ (n \in \mathbf{N})$，反之不成立；

(8) $\lim\limits_{A\to+\infty}\displaystyle\int_{-A}^{A} f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

解　命题(1)，(5)，(6)，(7) 系真，(2)，(3)，(4)，(8) 系伪.

(1) 因为 $\forall\ a \in (-\infty, +\infty)$，$J_1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x$，$J_2 = \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 都存在，并且有

$$\int_{+\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = J_1 + \int_a^x f(t)\mathrm{d}t,\quad \int_x^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = J_2 - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

故
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = f(x),\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = -f(x).$$

(2) 取 $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2 g(x)}$，$x \in [0, +\infty)$，其中

$$g(x)=\begin{cases}1, & n<x<n+1,\\ 0, & x=n.\end{cases}\quad n=0,1,2,\cdots.$$

显然 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x)\neq 0$. 但 $f(x)\geqslant 0$,因为对于 $N>A$,有

$$\int_0^A \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2g(x)}<\int_0^N \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2g(x)}=\sum_{i=1}^{N}\int_{i-1}^{i}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2g(x)}$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+(t-i-1)^2g(t)}=\sum_{i=1}^{N}\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+(t+i-1)^2}$$

$$<1+\sum_{i=1}^{N-1}\frac{1}{i^2}<1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}=\frac{\pi}{6}+1.$$

所以 $\int_0^A f(x)\mathrm{d}x$ 单调增加且有上界,从而 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

(3) 设 $f(x)=1/\sqrt{x}$, $0\leqslant x\leqslant 1$,则

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 x^{-1/2}\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[2x^{1/2}\right]\Big|_\varepsilon^1=2.$$

所以 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 但是:

(i) 将[0,1] n 等分,在 Δx_1 上取 $\xi_i=\frac{1}{n^2}\left(0<\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n}\right)$,在其它区间 Δx_i 上取 $\xi_i=\frac{i}{n}$, $i=2,3,\cdots,n$,则有积分和 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$.

(ii) 在 Δx_1 上取 $\xi_1'=\frac{1}{4n^2}\left(0<\frac{1}{4n^2}<\frac{1}{n}\right)$,在其它区间上取 $\xi_i'=\frac{i}{n}$, $i=2,3,\cdots,n$,则有积分和 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i')\Delta x_i$.

此时,
$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i')\Delta x_i-\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$
$$=\frac{1}{n}\left[\frac{1}{\sqrt{\xi_1'}}-\frac{1}{\sqrt{\xi_1}}\right]=\frac{1}{n}(2n-n)=1.$$

显然 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 与 ξ_i 取法有关,故和式极限不存在.

(4) 取 $f(x)=x^{-1/3}$,则 $x=0$ 为瑕点,有

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{-1/3}\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 x^{-1/3}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}.$$

但对[0,1]上的任一分割T,只要取$\xi_1 = (\Delta x_1)^6 (0 < (\Delta x_1)^6 < \Delta x_1 < 1)$,其余$\Delta x_i$上任取$\xi_i, i = 2,3,\cdots,n$,有

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = f(\xi_1)\Delta x_1 + \sum_{i=2}^n f(\xi_i)\Delta x_i > f(\xi_1)\Delta x_1$$

$$= \frac{\Delta x_1}{\sqrt[3]{(\Delta x_1)^6}} = \frac{1}{\Delta x_1},$$

故当$n \to +\infty, \lambda \to 0$时,就有$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \to +\infty$.

(5) 若$A \neq 0$(不妨设$A > 0$),则由保号性,$\exists P > a$,当$x > P$时,$f(x) \geqslant \frac{A}{2} > 0$.于是

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^P f(x)\mathrm{d}x + \int_P^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

$$\geqslant \int_a^P f(x)\mathrm{d}x + \frac{A}{2}\int_P^{+\infty}\mathrm{d}x = +\infty.$$

这与$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$的收敛矛盾,故必有$A = 0$.

(6) 因为$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$,故当$n$充分大时,有$f^2(x) \leqslant |f(x)|$,依据比较判别法,$\int_a^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$收敛.

若将$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$绝对收敛改为收敛,则结论不真.如$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$收敛且$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0$,但$\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x$发散.

(7) $\lim_{n\to+\infty}\int_0^n f(x)\mathrm{d}x = A$仅为$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = A$的必要条件,反之不成立.例如

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [n-1, n-1/2), \\ 1, & x \in [n-1/2, n), \end{cases} \quad n = 1,2,\cdots,$$

有$I_n = \int_0^n f(x)\mathrm{d}x = 0$,从而$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n f(x)\mathrm{d}x = 0$.但$I\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$,

有 $\lim\limits_{n\to+\infty} I\left(n+\frac{1}{2}\right) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} I(n)$，从而极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^n f(x)\mathrm{d}x$ 不存在.

(8) 取 $f(x)=\frac{1+x}{1+x^2}$，有

$$\int_{-A}^{A} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-A}^{A}\frac{1+x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_{-A}^{A}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}+\frac{1}{2}\int_{-A}^{A}\frac{\mathrm{d}x^2}{1+x^2}$$

$$=\left[\arctan x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]\Big|_{-A}^{A}=2\arctan A,$$

所以 $$\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}2\arctan A=\pi.$$

而在 $[0,+\infty)$ 上，$f(x)>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=1>0$，故 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散，于是 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也发散.

例 9 讨论下列非正常积分的敛散性：

(1) $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x\ (p>0)$；　　(2) $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x\ (p>0)$；

(3) $\int_e^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p}\ (p>0)$；

(4) $\int_1^{+\infty}\left(\frac{x}{x^2+p}-\frac{p}{x+1}\right)\mathrm{d}x\ (p\neq 0)$.

解 (1) $x=0$ 为瑕点. 当 $p=1$ 时，有

$$\int_0^1\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\ln x\Big|_{\varepsilon}^{1}=+\infty,$$

发散. 当 $p\neq 1$ 时，有

$$\int_0^1\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_{\varepsilon}^{1}=\begin{cases}+\infty, & p>1,\\ \dfrac{1}{1-p}, & p<1.\end{cases}$$

所以 $\int_0^1\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 当 $p\geqslant 1$ 时发散，当 $p<1$ 时收敛.

对 $\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^p}\ (p>0)$ 可以得到同样的结果：当 $p\geqslant 1$ 时发散，当 $p<1$ 时收敛.

(2) 当 $p>1$ 时，有 $\left|\frac{\sin x}{x^p}\right|\leqslant\frac{1}{x^p}$，而积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 当 $p>1$ 时

收敛，故由比较判别法知，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$ 绝对收敛.

当 $0<p\leqslant 1$ 时，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$ 条件收敛. 因为

$$\left|\frac{\sin x}{x^p}\right|\geqslant\frac{\sin^2 x}{x}=\frac{1}{2x}-\frac{\cos 2x}{2x},$$

而 $\left|\int_1^A\cos 2x dx\right|=\frac{1}{2}|\sin 2A-\sin 2|\leqslant 1$，$\frac{1}{2x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调减少并趋向于零，故由狄利克雷判别法，依据 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{2x}$ 发散、$\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x}dx$ 收敛，判断 $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x^p}\right|dx$ 发散. 但是，对任意的 $A\geqslant 1$，有 $\left|\int_1^A\sin x dx\right|=|\cos A-1|\leqslant 2$，且 $\frac{1}{x^p}$ 在 $[1,+\infty)$ 单调减少并趋向于零，故由狄利克雷判别法知，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$ 当 $p>0$ 时收敛.

(3) $\int_e^b\frac{dx}{x(\ln x)^p}=\int_e^b\frac{d\ln x}{(\ln x)^p}$

$$=\begin{cases}\ln(\ln x)\Big|_e^b=\ln(\ln b),\ p=1,\\ \frac{1}{1-p}(\ln x)^{1-p}\Big|_e^b=\frac{1}{1-p}[(\ln b)^{1-p}-1],\ p\neq 1.\end{cases}$$

当 $p=1$ 时，有

$$\lim_{b\to+\infty}\int_e^b\frac{dx}{x(\ln x)^p}=\lim_{b\to+\infty}\ln(\ln b)=+\infty,$$

积分发散；当 $p<1$ 时，有

$$\lim_{b\to+\infty}\int_e^b\frac{dx}{x(\ln x)^p}=\frac{1}{1-p}[\lim_{b\to+\infty}(\ln b)^{1-p}-1]=+\infty,$$

积分发散；当 $p>1$ 时，有

$$\lim_{b\to+\infty}\int_e^b\frac{dx}{x(\ln x)^p}=\frac{1}{1-p}[\lim_{b\to+\infty}\ln(\ln b)^{1-p}-1]=\frac{1}{p-1},$$

积分收敛.

故 $p\leqslant 1$ 时，$\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^p}$ 发散；$p>1$ 时，$\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^p}$ 收敛.

(4) 因为$f(x)=\dfrac{x}{x^2+p}-\dfrac{p}{x+1}=\dfrac{(1-p)x^2+x-p^2}{(x^2+p)(x+1)}$，故当$x$充分大时，$f(x)$与$(1-p)$有相同的符号. 所以$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛与绝对收敛是一致的.

当$p=1$时，$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2f(x)=1$，故$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛；当$p\neq 1$时，$\lim\limits_{x\to+\infty}x|f(x)|=|1-p|\neq 0$，故$\int_1^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$发散，$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$也发散.

例 10 利用各种判别法，讨论下列积分的敛散性：

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^3+x^2+1}$； (2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-kx}\cos x\mathrm{d}x\ (k>0)$；

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^m}\mathrm{d}x$； (4) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+1}}$；

(5) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2x}{x^m}\mathrm{d}x$； (6) $\displaystyle\int_0^{+\infty}x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$；

(7) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}\mathrm{d}x$； (8) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^n}\mathrm{d}x\ (n\geqslant 0)$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^3+x^2+1}\Big/\dfrac{1}{1+x^2}=1\neq 0$，而$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$收敛，依比较判别法的极限形式知，$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^3+x+1}$收敛.

(2) 因为$0\leqslant|\mathrm{e}^{-kx}\cos x|\mathrm{d}x\leqslant\mathrm{e}^{-kx}$，而$\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-kx}\mathrm{d}x=\frac{1}{k}$收敛，所以$\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-kx}\cos x\mathrm{d}x$收敛.

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^m}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x^m}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^m}\mathrm{d}x$，对$\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x^m}\mathrm{d}x$，由于

$$\lim_{x\to 0^+}x^{m-1}\frac{\ln(1+x)}{x^m}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,$$

所以，当$m<2$时积分收敛，当$m\geqslant 2$时积分发散.

对$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^m}\mathrm{d}x$，当$m>1$时，取$\alpha$充分小，使$m-\alpha>1$，则

$$x^{m-\alpha}\frac{\ln(1+x)}{x^m}=\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\to 0\ (x\to+\infty),$$

故积分$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^m}\mathrm{d}x$ 收敛；当$m\leqslant 1$时，有

$$x^m\cdot\frac{\ln(1+x)}{x^m}\to+\infty\ (x\to+\infty),$$

故积分$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^m}\mathrm{d}x$ 发散.

综上所述，当$1<m<2$时，$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^m}\mathrm{d}x$ 收敛.

（4）因为$0<\frac{1}{x\sqrt{x+1}}<\frac{1}{x^{3/2}}$，而$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{3/2}}$收敛，所以$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+1}}$收敛.

（5）$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2x}{x^m}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\sin^2x}{x^m}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2x}{x^m}\mathrm{d}x.$

对$\int_0^1\frac{\sin^2x}{x^m}\mathrm{d}x$，当$m\leqslant 2$时为定积分，当$2<m<3$时，$m-2<1$，且

$$\lim_{x\to0^+}x^{m-2}\frac{\sin^2x}{x^m}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin^2x}{x^2}=1,$$

所以积分收敛；当$m=3$时，$\lim\limits_{x\to0^+}x\frac{\sin^2x}{x^m}=1$，当$m>3$时，$\lim\limits_{x\to0^+}x\frac{\sin^2x}{x^m}=+\infty$，所以积分发散.

对$\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2x}{x^m}\mathrm{d}x$，当$m>1$时，由于$\frac{\sin^2x}{x^m}<\frac{1}{x^m}$，所以积分收敛；当$m\leqslant 1$时，由于$\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2x}{x^m}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1-\cos2x}{x^m}\mathrm{d}x$，而$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^m}$发散，$\int_1^{+\infty}\frac{\cos2x}{x^m}\mathrm{d}x$收敛，所以$\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2x}{x^m}\mathrm{d}x$发散；又当$m<0$时，$\frac{\sin^2x}{x^m}$

$\geqslant \sin^2 x$，而$\int_1^{+\infty} \sin^2 x \mathrm{d}x$ 发散，所以$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^m} \mathrm{d}x$ 发散.

综上所述，当 $1 < m < 3$ 时，$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^m} \mathrm{d}x$ 收敛.

(6) $\int_0^{+\infty} x^{p-1} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x = \int_0^1 x^{p-1} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} x^{p-1} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x.$

对$\int_0^1 x^{p-1} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x$，因为 $x^{1-p}(x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}) \to 1\ (x \to +\infty)$，所以，当 $p > 0$ 时，积分收敛.

对$\int_1^{+\infty} x^{p-1} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x$，因为 $x^2(x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}) = x^{p-1}/\mathrm{e}^x \to 0\,(x \to +\infty)$，所以对一切 p 值，积分恒收敛.

综上所述，当 $p > 0$ 时，积分$\int_0^{+\infty} x^{p-1} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x$ 收敛.

(7) $\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n} \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^m}{1+x^n} \mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n} \mathrm{d}x.$

对$\int_0^1 \frac{x^m}{1+x^n} \mathrm{d}x$，因为 $x^{-m} \cdot \frac{x^m}{1+x^n} \to 1\ (x \to 0^+)$，所以，积分当 $m > -1$ 时收敛.

对$\int_1^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n} \mathrm{d}x$，因为 $x^{n-m} \cdot \frac{x^m}{1+x^n} \to 1\ (x \to +\infty)$，所以，积分当 $n - m > 1$ 时收敛.

综上所述，积分$\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n} \mathrm{d}x$ 当 $m > -1, n - m > 1$ 时收敛.

(8) 当 $a \neq 0$ 时，设 $f(x) = \cos ax, g(x) = \frac{1}{1+x^n}$，则 $\forall A > 0$，均有 $\left|\int_0^A f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{2}{a}$；又当 $n > 0$ 时，$g(x)$ 单调减少并趋于零 $(x \to +\infty)$，故积分$\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^n} \mathrm{d}x$ 当 $a \neq 0, n > 0$ 时收敛.

当 $a = 0$ 时，因为 $x^n \cdot \frac{1}{1+x^n} \to 1\,(x \to +\infty)$，所以积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\cos \mathrm{d}x}{1+x^n} \mathrm{d}x$ 当 $a = 0, n > 1$ 时收敛.

例 11 用各种判别法，讨论下列积分的敛散性：

(1) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$;　　(2) $\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

(3) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1-x)^2}$;　　(4) $\int_0^{\pi/2} \frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}} dx$;

(5) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-3x+2}} dx$;　(6) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}\ (p,q>0)$.

解　(1) $x=0, x=\frac{\pi}{2}$ 是瑕点，将原积分写为

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x\cos^q x} = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^p x\cos^q x} + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}.$$

对 $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$，因为 $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sin^p x\cos^q x} \Big/ \frac{1}{x^p} = 0$，且 $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{x^p}$ 当 $0<p<1$ 时收敛，当 $p\geqslant 1$ 时发散，故 $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^p \cos^q x}$ 当 $0<p<1$ 时收敛.

对 $\int_{\pi/4^-}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$，因为 $\lim_{x\to\pi/2^-} \frac{1}{\sin^p x\cos^q x} \Big/ \frac{1}{(\pi/2-x)^2} = 1 \neq 0$，且 $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{(\pi/2-x)^q}$ 当 $q<1$ 时收敛，当 $q\geqslant 1$ 时发散，故 $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$ 当 $q<1$ 时收敛.

综上所述，$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$ 当 $p<1, q<1$ 时收敛.

(2) $\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{1/2} \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{1/2}^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

对 $\int_0^{1/2} \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$，因为 $\lim_{x\to 0^+} x^{-n} \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} = 1$，所以当 $n>-1$ 时，积分收敛.

对 $\int_{1/2}^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$，因为 $\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x} \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^n}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 在 n 为任意值时成立，故 $\int_{1/2}^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 对任意 n 收敛.

综上所述，当 $n>-1$ 时，$\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 收敛.

(3) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1-x)^2}$

$$= \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1-x)^2} + \int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1-x)^2}.$$

对 $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1-x)^2}$，因为 $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt[3]{x} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}(1-x)^2} = 1$，而 $\int_0^{1/2} \frac{dx}{(1-x)^2}$ 收敛，所以 $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1-x)^2}$ 收敛.

对 $\int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1-x)^2}$，因为 $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x}(1-x)^2} \Big/ \frac{1}{(1-x)^2} = 1 \neq 0$，但 $\int_{1/2}^1 \frac{dx}{(1-x)^2}$ 发散，所以 $\int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1-x)^2}$ 发散.

综上所述，$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1-x)^2}$ 发散.

(4) 因为 $x = 0$ 是瑕点，有

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}} \Big/ \frac{1}{x^{2/3}} = \lim_{x\to 0^+} x^{1/6}\ln\sin x = \lim_{x\to 0^+} \ln\sin x / x^{-1/6}$$

$$\overset{L'}{=\!=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\cot x}{-x^{-7/6}/6} = -6 \lim_{x\to 0^+} x^{1/6} \frac{x}{\sin x} \cdot \cos x = 0,$$

而 $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{x^{2/3}}$ 收敛. 所以 $\int_0^{\pi/2} \frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}} dx$ 收敛.

(5) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-3x+2}}$

$$= \int_2^3 \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-3x+2}} + \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-3x+2}}.$$

对 $\int_2^3 \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-3x+2}}$ 因为 $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-3x+2}} \Big/ \frac{1}{\sqrt{x-2}} = \frac{1}{8} \neq 0$，且 $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$ 收敛，所以 $\int_2^3 \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-3x+2}}$ 收敛.

对 $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-3x+2}}$，因为 $0 < \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-3x+2}} < \frac{1}{x^4}$，且 $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^4}$ 收敛，所以 $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-3x+2}}$ 收敛.

综上所述，$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{x^2-3x+2}}$ 收敛.

(6) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p\ln^q x}=\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x^p\ln^q x}+\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p\ln^q x}$.

对 $\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x^p\ln^q x}$，因为 $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1}{x^p\ln^q x}\Big/\frac{1}{(x-1)^q}=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{x-1}{\ln x}\right)^q=\left(\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x-1}{\ln x}\right)^q\xlongequal{L'}(\lim\limits_{x\to 1^+}x)^q=1\neq 0$，且 $\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^q}$ 当 $q<1$ 时收敛，当 $q\geqslant 1$ 时发散. 所以 $\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x^p\ln^q x}$ 当 $q<1$ 时收敛，当 $q\geqslant 1$ 时发散.

对 $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p\ln^q x}$，因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^p\ln^q x}\Big/\frac{1}{x^p}\xlongequal{p>1}0$，且 $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 当 $p>1$ 时收敛，所以当 $p>1$ 时，$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p\ln^q x}$ 收敛. $\forall\ x\in[2,+\infty)$，当 $0<p\leqslant 1,q>1$ 时，因为 $x^p\ln^q x\leqslant x\ln^q x\Longrightarrow\frac{1}{x^p\ln^q x}\geqslant\frac{1}{x\ln^q x}$，而 $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^q x}=+\infty$，所以此时积分发散.

综上所述，当 $p>1,q<1$ 时，$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p\ln^q x}$ 收敛.

例 12 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续，$\forall\ x\in[x,+\infty)$，有 $f(x)>0$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln f(x)}{\ln x}=-\lambda$. 证明：若 $\lambda>1$，则 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

证 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln f(x)}{\ln x}=-\lambda$，所以 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ A>1$，当 $x>A$ 时，有 $\frac{\ln f(x)}{\ln x}=-\lambda+\varepsilon$，即

$$\ln f(x)<(-\lambda+\varepsilon)\ln x=\ln x^{-\lambda+\varepsilon}\Longrightarrow 0<f(x)<1/x^{\lambda-\varepsilon}.$$

又因 $\lambda>1$，故可取 $0<\varepsilon<\lambda-1$，于是 $\lambda-\varepsilon>1$. 依比较判别法知，$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

例 13 设 $f(x)$ 定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上且恒正，并在任意有

限区间$[-a,b]$上可积 $(a,b>0)$. 又$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-|x|/k}\mathrm{d}x \leqslant M$($M$为常数) 对任意 $k>0$ 成立. 证明:$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

证 要证明$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,因为 $f(x)>0$,所以只需证$\int_{-a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 对 $a,b>0$ 有界.

因为$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-|x|/k}\mathrm{d}x \leqslant M$ 对任意 $k>0$ 成立,则若令 $c=\max\{a,b\}$,取 $k>c$,有

$$0 \leqslant \int_{-a}^{b} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{-a}^{b} f(x)\mathrm{e}^{(c-|x|)/k}\mathrm{d}x$$
$$= \mathrm{e}^{c/k}\int_{-a}^{b} f(x)\mathrm{e}^{-|x|/k}\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{e}^{c/k}M \leqslant 3M.$$

故$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

例 14 设 $f(x)>0$ 且单调减少,证明:$\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与$\int_{a}^{+\infty} f(x)\sin^2 x\mathrm{d}x$ 敛散性相同.

证 由 $f(x)>0$ 且单调减少,则 $f(x)\longrightarrow 0$,或 $f(A)\longrightarrow A>0$.

(1) 若 $f(x)\longrightarrow 0$,由狄利克雷判别法,$\int_{a}^{+\infty} f(x)\cos 2x\mathrm{d}x$ 收敛,于是由

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\sin^2 x\mathrm{d}x = \int_{a}^{+\infty} f(x)\,\frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{a}^{+\infty} f(x)\cos 2x\mathrm{d}x$$

知,$\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与$\int_{a}^{+\infty} f(x)\sin^2 x\mathrm{d}x$ 同时收敛.

(2) 若 $f(x)\longrightarrow A>0$,则$\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散,从而$\int_{a}^{+\infty} f(x)\sin^2 x\mathrm{d}x$ 与$\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 同时发散.

例 15 证明下列等式：

(1) $\int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}dx$；

(2) $\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}dx = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n+1)^2}$；

(3) $\int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}dx = \frac{\pi^3}{16}$.

证 因为 $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\,\frac{(\ln x)^2}{1+x^2} = 0$，$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\,\frac{\ln x}{1+x^2} = 0$，$\lim_{x\to+\infty} x^{3/2}\frac{(\ln x)^2}{1+x^2} = 0$，故依比较判别法的极限形式，题(1)、题(2)、题(3) 三个积分都收敛.

(1) $\int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}dx \xlongequal{x=1/t} \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}dt$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{(\ln t)^2}{1+t^2}dt - \int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1+t^2}dt,$$

移项得
$$\int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}dx.$$

(2) 由分部积分法知

$$\int_0^1 x^n \ln x dx = -\frac{1}{(n+1)^2},\ \int_0^1 x^n \ln^2 x dx = \frac{2}{(n+1)^3},$$

故
$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}dx = \int_0^1 \Big[\ln x \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\Big]dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^1 x^{2n}\ln x dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

(3) $\int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}dx = \int_0^1 \Big[\ln^2 x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\Big]dx$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^1 x^{2n}\ln^2 x dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)\frac{2}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{16}.$$

最后一个等式可由 $f(x) = x^2$ 在[－,1]上的傅里叶级数展开式

$$x^2 = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2}\frac{\cos \pi x}{n^2}\ (|x| \leqslant 1)$$

逐项积分后取 $x = 1/2$ 得到.

三、非正常积分的其它问题

非正常积分的其它几个问题都比较复杂，因此，我们只举几个例子介绍一下.

例 16 证明：若$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，$f(x)$ 为单调函数，则

$$f(x) = o(1/x).$$

证 不妨设 $f(x)$ 单调减少. 先证当 $x \geqslant a$ 时，$f(x) \geqslant 0$. 否则，∃ 点 $c \geqslant a$，使 $f(c) < 0$. 而 $x > c$ 时，$f(x) \leqslant f(c)$，从而

$$\int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_c^{+\infty} f(c)\mathrm{d}x = -\infty.$$

得出$\int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散，与$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛矛盾. 故 $f(x)$ 为非负的单调函数.

由$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\forall\ \varepsilon > 0$，$\exists\ A > 0$，使当 $x > A$ 时，恒有 $\left|\int_{x/2}^{x} f(t)\mathrm{d}t\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. 但是

$$\left|\int_{x/2}^{x} f(t)\mathrm{d}t\right| = \int_{x/2}^{x} f(t)\mathrm{d}t \geqslant f(x)\cdot\left(x - \frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}f(x).$$

所以，当 $x > A$ 时，$0 \leqslant xf(x) < \varepsilon$，即

$$\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0 \quad 或 \quad f(x) = o(1/x).$$

当 $f(x)$ 单调增加时，只要考虑 $-f(x)$，同样可证得

$$f(x) = o(1/x).$$

例 17 证明：若函数 $f(x)$ 在 $0 < x < a$ 内单调，且$\int_0^a x^p f(x) = 0$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to0^+} x^{p+1}f(x) = 0$.

证 不妨设 $f(x)$ 在 $0 < x < a$ 内单调减少. 设 $\exists\ 0 < \delta < a$，使 $0 < x < \delta$ 时 $f(x) > 0$. 此时，

$$\int_{x/2}^{x} t^p f(t)\mathrm{d}t > f(x)\int_{x/2}^{x} t^p\mathrm{d}t = c_p x^{p+1} f(x) > 0,$$

其中 $$c_p=\begin{cases}\dfrac{1-(1/2)^{p+1}}{p+1}, & p\neq -1,\\ \ln 2, & p=-1.\end{cases}$$

故 $c_p>0$ 为常数. 则由 $\int_0^a x^p f(x)\mathrm{d}x$ 存在, 得

$$\lim_{x\to 0^+}\int_{x/2}^{x} t^p f(t)\mathrm{d}t=0 \Longrightarrow \lim_{x\to 0^+} x^{p+1}f(x)=0.$$

若上述 δ 不存在, 由 $f(x)$ 单调减少知, 当 $0<x<a$ 时, 恒有 $f(x)<0$. 于是, 当 $0<x<a/2$ 时,

$$\int_x^{2x} t^p f(t)\mathrm{d}t\leqslant f(x)\int_x^{2x} t^p\mathrm{d}t=c_p^* x^{p+1}f(x)<0,$$

其中 $$c_p^*=\begin{cases}\dfrac{2^{p+1}-1}{p+1}, & p\neq -1,\\ \ln 2, & p=-1.\end{cases}$$

故 $c_p^*>0$ 为常数.

于是 $|x^{p+1}f(x)|<\dfrac{1}{c_p^*}\left|\int_x^{2x} t^p f(t)\mathrm{d}t\right|$, 依 $\int_0^a x^p f(x)\mathrm{d}x$ 存在, 知 $\lim\limits_{x\to 0^+}\int_x^{2x} t^p f(t)\mathrm{d}t=0$. 故 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{p+1}f(x)=0$.

例 18 设 $\varphi(x)$ 为有界的周期函数, 周期为 T, 且 $\dfrac{1}{T}\int_0^T\varphi(x)\mathrm{d}x=c$. 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty} n\int_n^{+\infty}\dfrac{\varphi(t)}{t^2}\mathrm{d}t=c$.

证 因为

$$n\int_n^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\mathrm{d}t=\int_n^{+\infty}\frac{\varphi(n\cdot t/n)}{(t/n)^2}\mathrm{d}\,\frac{t}{n}\xlongequal{u=t/n}\int_1^{+\infty}\frac{1}{u^2}\varphi(nu)\mathrm{d}u,$$

由黎曼定理: 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上绝对可积, $g(x)$ 是周期为 T 的函数, 在 $[0,T]$ 上正常可积, 则有

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^{+\infty} f(x)g(nx)\mathrm{d}x=\frac{1}{T}\int_0^T g(x)\mathrm{d}x\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

因此, 令 $f(u)=\dfrac{1}{u^2}$, $g(nu)=\varphi(nu)$, 得

$$\lim_{n\to+\infty} n\int_n^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T\varphi(t)\mathrm{d}x\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^2}=c.$$

例 19 设 $f(x)=\int_0^x \cos\frac{1}{t}\mathrm{d}t$,求 $f'(0)$.

解 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x \cos(1/t)\mathrm{d}t}{x}$,

但 $\int_0^x \cos\frac{1}{t}\mathrm{d}t \xlongequal{1/t=u} \int_{1/x}^{+\infty}\frac{\cos u}{u^2}\mathrm{d}u$

$$=\frac{\sin u}{u^2}\bigg|_{1/x}^{+\infty}+\int_{1/x}^{+\infty}\frac{2\sin u}{u^3}\mathrm{d}u=-x^2\sin\frac{1}{x}+2\int_{1/x}^{+\infty}\frac{\sin u}{u^3}\mathrm{d}u,$$

故 $$\left|\frac{\int_0^x \cos(1/t)\mathrm{d}t}{x}\right|\leqslant |x|\left|\sin\frac{1}{x}\right|+\frac{2}{|x|}\int_{1/x}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^3}$$

$$=|x|\left|\sin\frac{1}{x}\right|+|x|\longrightarrow 0\ (x\longrightarrow 0).$$

所以 $$f'(0)=0.$$

例 20 证明:若 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,且 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续,则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

证 由 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续知,$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ \delta>0$(不妨设 $\delta\leqslant\varepsilon$),当 $x_1,x_2\in[a,+\infty)$,且 $|x_1-x_2|\leqslant\delta$ 时,$|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

又由 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛知,对上述 δ,$\exists\ N>a$,当 $x',x''>N$ 时,有 $\left|\int_{x'}^{x''}f(x)\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{2}$.

对任何 $x>N$,取 $x',x''>N$,使 $x'<x<x''$ 且 $x''-x'=\delta$,则由

$$|f(x)\delta|=\left|\int_{x'}^{x''}f(x)\mathrm{d}t-\int_{x'}^{x''}f(t)\mathrm{d}t+\int_{x'}^{x''}f(t)\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant\left|\int_{x'}^{x''}|f(x)-f(t)|\mathrm{d}t+\left|\int_{x'}^{x''}f(t)\mathrm{d}t\right|\right|<\frac{\varepsilon}{2}\delta+\frac{\delta^2}{2},$$

即得 $$|f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\delta}{2}\leqslant\varepsilon,\quad x>N.$$

所以 $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

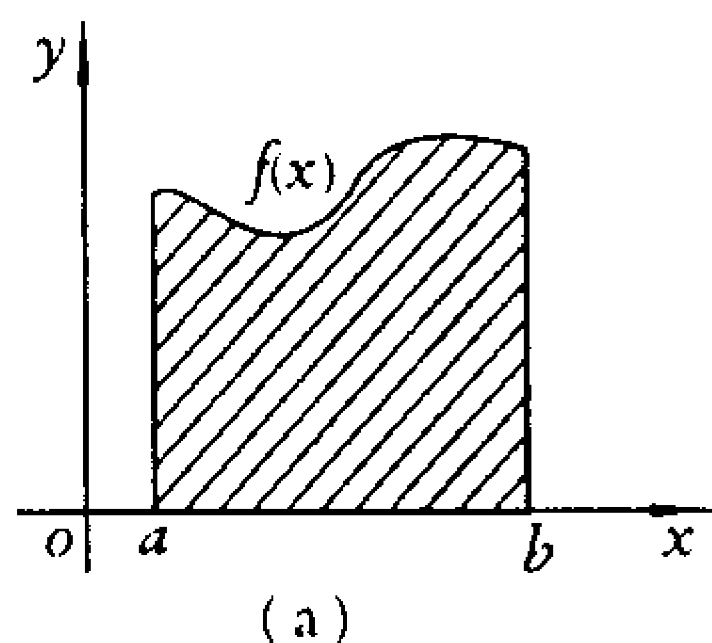
第五节 定积分的应用

主要内容

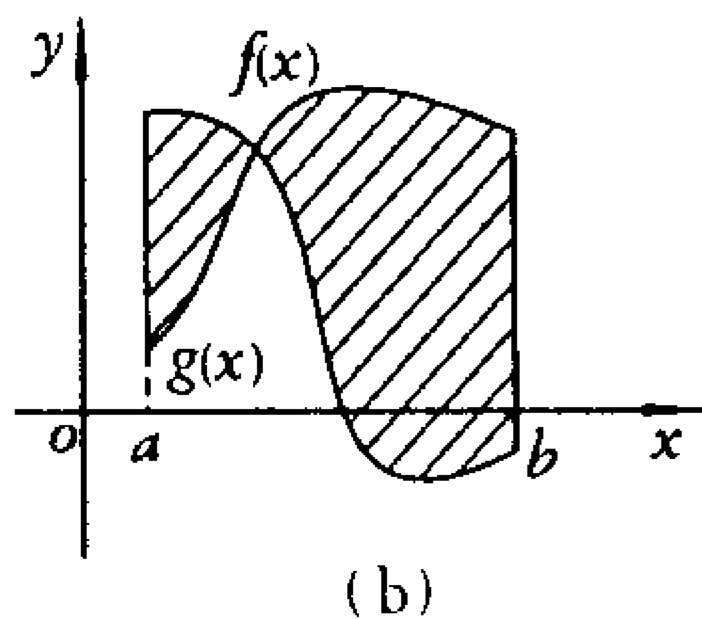
一、定积分的几何应用

1. 平面图形的面积

(1) 当图形由 $x=a, x=b\ (b>a), y=f(x)$ 以及 x 轴围成(见图 6.2(a))时,其面积 $S=\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$.



(a)



(b)

图 6.2

(2) 当图形由 $x=a, x=b\ (b>a), y=f(x)$ 以及 $y=g(x)$ 围成(见图 6.2(b))时,其面积 $S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x$.

(3) 当图形由 $x=x(t), y=y(t), \alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 和 $x=a, x=b$ 及 x 轴围成(见图 6.3(a))时,其面积 $S=\int_\alpha^\beta |y(t)|x'(t)\mathrm{d}t$.

(4) 当图形由 $r=r_1(\theta)$ 和 $r=r_2(\theta)$ 及 $\theta_1=\alpha, \theta_2=\beta$ 围成(见图 6.3(b))时,其面积 $S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [r_2^2(\theta)-r_1^2(\theta)]\mathrm{d}\theta$.

2. 由平面截面面积求体积

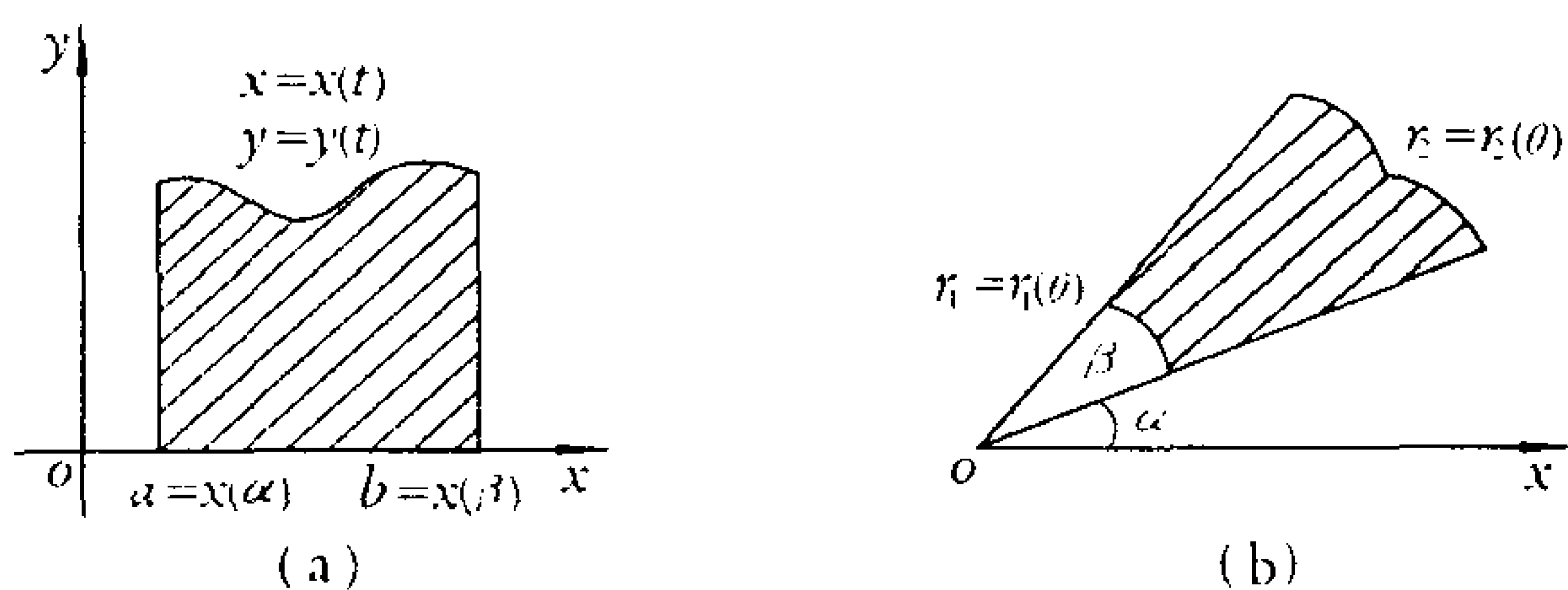


图 6.3

（1）位于平面 $x=a$ 和 $x=b$ 之间（$b>a$），在任一点 $x\in[a,b]$ 处，垂直于 x 轴的平面与立体 Ω 的截面面积为 $A(x)$，则立体 Ω 的体积 $V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x$（见图 6.4(a)）.

(2) 以直线 $x=a,x=b$，曲线 $y=f(x)$ 和 x 轴围成的曲边梯形，绕 x 轴旋转所得旋转体（见图 6.4(b)）的体积 $V=\int_a^b \pi f^2(x)\mathrm{d}x$；绕 y 轴所得旋转体（见图 6.4(c)）的体积 $V=2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$.

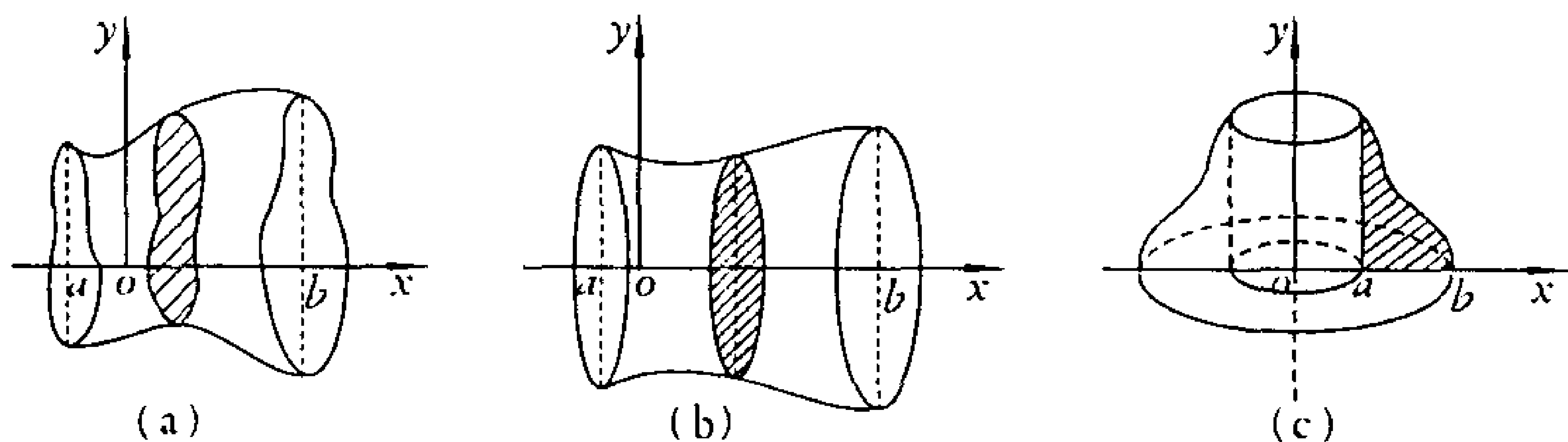


图 6.4

3. 平面光滑曲线的弧长

(1) 曲线 C 方程由方程由 $y=f(x),x\in[a,b]$ 表示，则弧长 $s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$；若 C 方程由 $x=g(y),y\in[c,d]$ 表示，则弧长 $s=\int_c^d\sqrt{1+x'^2}\mathrm{d}y$.

(2) 曲线 C 由参数方程 $x=x(t),y=y(t),t\in[\alpha,\beta]$ 表示，

则弧长 $s=\int_\alpha^\beta \sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\mathrm{d}t$.

(3) 曲线 C 由极坐标方程 $r=r(\theta)$, $\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$ 表示,则弧长 $s=\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2+r_\theta'^2}\mathrm{d}\theta$.

4. 光滑曲线的曲率、曲率半径与曲率圆

(1) 光滑曲线 C 由方程 $y=f(x)$, $x\in[a,b]$ 给出,当 $f(x)$ 二阶可导时,曲线的曲率 $\kappa=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$.

(2) 光滑曲线 C 由方程 $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$ 给出,当 $x(t)$, $y(t)$ 二阶可导时,曲线的曲率 $\kappa=\dfrac{|x_t'y_t''-x_t''y_t'|}{(x_t'^2+y_t'^2)^{3/2}}$.

(3) 光滑曲线 C 由方程 $r=r(\theta)$, $\theta\in[\alpha,\beta]$ 给出,曲线的曲率 $\kappa=\dfrac{r^2+2r_\theta'^2-rr_\theta''}{[r^2+r'^2]^{3/2}}$.

(4) 若曲线 C 在其中一点 P 的曲率 $\kappa\neq 0$,在点 P 处的曲线的法线上所作的半径为 $1/\kappa$ 的圆与 C 切于 P,这个圆称为曲线的曲率圆. 曲率圆的半径 $R=1/\kappa$ 称为曲率半径.

5. 旋转曲面的面积

(1) 若曲面 S 是平面光滑曲线 $C: y=f(x)$, $x\in[a,b]$,绕 x 轴旋转一周所得,则曲面的面积

$$S=2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+f'^2(x)}\mathrm{d}x.$$

(2) 若曲面 S 是由光滑曲线段 $x=x(t)$, $y=y(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$,绕 x 轴旋转一周所得,则曲面的面积

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta |y(t)|\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\mathrm{d}t.$$

二、定积分的物理应用

1. 液体的压力　当平面薄板放置在密度为 ρ 的液体中时,薄板每面上所受静压力与放置角度、深度和薄板面积有关,可用定积

分计算.

2. 变力做功　变力 $F(x)$ 在直线方向上从 $x=a$ 到 $x=b$ 所做的功 $W=\int_a^b F(x)\mathrm{d}x$.

3. 静力矩与质心(重心)

(1) 光滑曲线段 $y=f(x),x\in[a,b]$,线密度为 μ(常数),则曲线段质量

$$m=\int_b^a \mu\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}t.$$

$$M_x=\int_a^b \mu y\sqrt{1+x'^2}\mathrm{d}x,\quad M_y=\int_a^b \mu x\sqrt{1+y_t'^2}\mathrm{d}x,$$

质心 $P_0(x_0,y_0)$ 为

$$x_0=M_y/m,\ y_0=M_x/m.$$

(2) 平面图形 $y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),a\leqslant x\leqslant b$,面密度为 μ(常数),则图形质量

$$m=\int_a^b \mu(y_2(x)-y_1(x))\mathrm{d}x,$$

$$M_x=\int_a^b \frac{\mu}{2}(y_2^2(x)-y_1^2(x))\mathrm{d}x,$$

$$M_y=\int_a^b \mu x(y_2(x)-y_1(x))\mathrm{d}x$$

质心 $P_0(x_0,y_0)$ 为

$$x_0=M_y/m,\ y_0=M_x/m.$$

4. 古尔金定理

(1) 第一定理:弧 C 绕不与其相交的轴旋转而成的旋转面的面积,等于这个弧的长度与这弧的质心所划出的圆周之长的乘积.

(2) 第二定理　面积 S 绕不与它相交的轴旋转而成的旋转体,其体积等于面积 S 与这面积的质心所划出的圆周之长的乘积.

疑难解析

1. 定积分的微元法的理论基础是什么?

答 定积分的微元法的理论基础指的是:能用定积分微元法所求解的量应具备什么条件.

(1) 总量具有区间可加性. 即总量是定义在某一区间上的,当将区间进行分割时,总量被分割为小区上的部分量,总量等于小区间上部分量的和.

面积、弧长、功等具有区间可加性,而速度、温度不具有区间可加性.

(2) 部分量的近似值具有线性性. 定积分是积分和式 $\sum_{i=1}^{\infty} f(\xi_i)\Delta x_i$ 的极限,$f(\xi_i)\Delta x_i$ 是部分量的近似值,是关于 Δx 的线性 函数. 即部分量的近似值必须能表示为定义在区间上的某一函数 $f(x)$ 在小区间上一点 ξ_i 的值 $f(\xi_i)$ 与小区间长度 Δx_i 的乘积(Δx 的线性函数).

当总量具有以上两个性质时,一般可以用定积分的微元法来求解.

2. 实施定积分的微元法有哪些步骤?

答 定积分计算某个量是用某个函数 $F(x)$ 在区间上的改变量(增量)$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 来表示的,通常的四个步骤是:细分、取近似、求和、取极限.

实施定积分的微分法一般也遵循这四个步骤:(1) 细分区间 $[a,b]$ 为 n 个小区间;(2) 求部分量的近似值 $f(\xi_i)\Delta x_i$;(3) 作和式 $\sum_{i=1}^{\infty} f(\xi_i)\Delta x_i$;(4) 取极限$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$,得到$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

也可以归纳提炼为两步:(1) 求出 $F(x)$ 的微分式(微元):

$dF(x)=f(x)dx$（由 $f(\xi_i)\Delta x_i$ 抽象得出）；(2) 将微分式积分，得 $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$（由 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 得到）. 微元法就是求微元得到积分的方法.

对于应用问题，找出微分式 $f(x)dx$ 是最关键的，其次是确定积分的区间. 至于怎样计算积分的问题，已经在不定积分与定积分等章解决了，不再赘述.

方法、技巧与典型例题分析

定积分应用的方法和技巧主要是指取微元的方法和技巧，这要求读者对具体问题有相当的了解，能通过几何、物理概念找到最合适的微元；其次是利用对称性、奇偶性、周期性等概念，将积分变得尽可能的简单.

一、定积分在几何中的应用

1. 平面图形的面积

例 1　设 $y=f(x)$ 是 $[a,a+h]$ 上的单调连续曲线，证明：在 $(a,a+h)$ 中总存在一点 ξ 使得图 6.5 中两阴影部分面积相等.

若 $f(x)=e^x$，记 $\xi=a+\theta h$，并求 $\lim\limits_{h\to 0}\theta$.

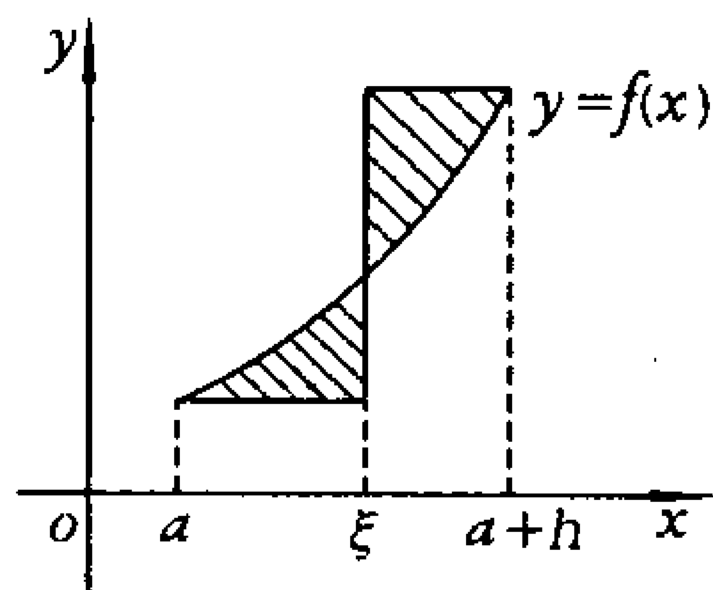


图 6.5

证　若两阴影部分面积相等，则

$$\int_a^{\xi}[f(x)-f(a)]dx=\int_{\xi}^{a+h}[f(a+h)-f(x)]dx,$$

所以

$$\int_a^{a+h}f(x)dx$$

$$=f(a+h)(a-\xi)-\int_{\xi}^{a+h}[f(a+h)-f(x)]dx+f(a)(\xi-a)+\int_a^{\xi}[f(x)-f(a)]dx$$

$$= (a+h)f(a+h) +- af(a) - \xi[f(a+b) - f(a)].$$

得 $\xi = \dfrac{(a+h)f(a+h) - af(a) - \int_a^{a+h} f(x)\mathrm{d}x}{f(a+h) - f(a)}$ (依中值定理)

$$= \frac{a[f(a+h) - f(a)] + hf(a+h) - h - f(\eta)}{f(a+h) - f(a)} \quad (a < \eta < a+h)$$

$$= a + h \cdot \frac{f(a+h) - f(\eta)}{f(a+h) - f(a)} > a,$$

且 $$\xi < a + h.$$

若 $f(x)$ 单调增加,则上式中分子、分母均大于零;若 $f(x)$ 单调减少,则上式中分子、分母均小于零.

若 $f(x) = \mathrm{e}^x$,$\xi = a + \theta h$,则由 ξ 的第一个等式可得

$$\theta = \frac{h\mathrm{e}^{a+h} - \mathrm{e}^{a+h} + \mathrm{e}^a}{h(\mathrm{e}^{a+h} - \mathrm{e}^a)} = \frac{\mathrm{e}^h(h-1)+1}{h(\mathrm{e}^h - 1)},$$

故 $$\lim_{h\to 0}\theta = \lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^h(h+1)+1}{h(\mathrm{e}^h-1)} \xlongequal{L'} \lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^h h}{\mathrm{e}^h - 1 + h\mathrm{e}^h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h}{1 - \mathrm{e}^{-h} + h} \xlongequal{L'} \lim_{h\to 0}\frac{1}{\mathrm{e}^{-h}+1} = \frac{1}{2}.$$

例 2 若由曲线 $y = \cos x\left(0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$ 与两坐标轴所围成的图形被曲线 $y = a\sin x$ 与 $y = b\sin x$ $(a > b > 0)$ 三等分,求出 a,b 的值(见图 6.6).

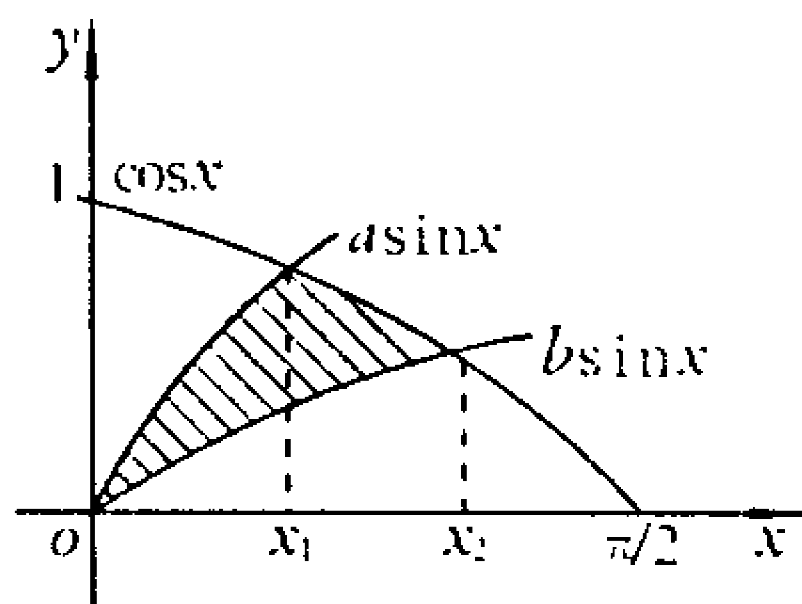


图 6.6

解 设曲线 $y = \cos x$ 与曲线 $y = a\sin x$ 和 $y = b\sin x$ 的交点的横坐标分别为 x_1 和 x_2.

由 $\cos x_1 = a\sin x_1$,$\cos x_2 = b\sin x_2$ 得,$\tan x_1 = \dfrac{1}{a}$,$\tan x_2 = \dfrac{1}{b}$.

由 $a > b$ 及在 $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 上 $y = \tan x$ 的单调性知

$$\int_0^{x_1}\cos x\mathrm{d}x - \int_0^{x_1} a\sin x\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{x_1} a\sin x\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} \cos x\mathrm{d}x - \int_0^{x_2} b\sin x\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{x_2} b\sin x\mathrm{d}x + \int_{x_2}^{\pi/2} \cos x\mathrm{d}x.$$

得 $\begin{cases} 2\sin x_1 + 2a\cos x_1 - 2a = \sin x_2 + b\cos x_2 - b, \\ \sin x_1 + a\cos x_1 - a = -b\cos x_2 + b + 1 - \sin x_2, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} \sin x_1 = 1/\sqrt{1+a^2}, \quad \cos x_1 = a/\sqrt{1+a^2}, \\ \sin x_2 = 1/\sqrt{1+b^2}, \quad \cos x_2 = b/\sqrt{1+b^2}. \end{cases}$

代入上面等式，得

$$\begin{cases} 2\sqrt{1+a^2} - 2a = \sqrt{1+b^2} - b, \\ \sqrt{1+a^2} - a = b + 1 - \sqrt{1+b^2}, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 4/3, \\ b = 5/12. \end{cases}$$

例 3 在等轴双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 上任取点 (x, y)，求由双曲线与点 (x, y) 和 $(x, -y)$ 同原点的连线所围成的曲边三角形的面积（见图 6.7）。

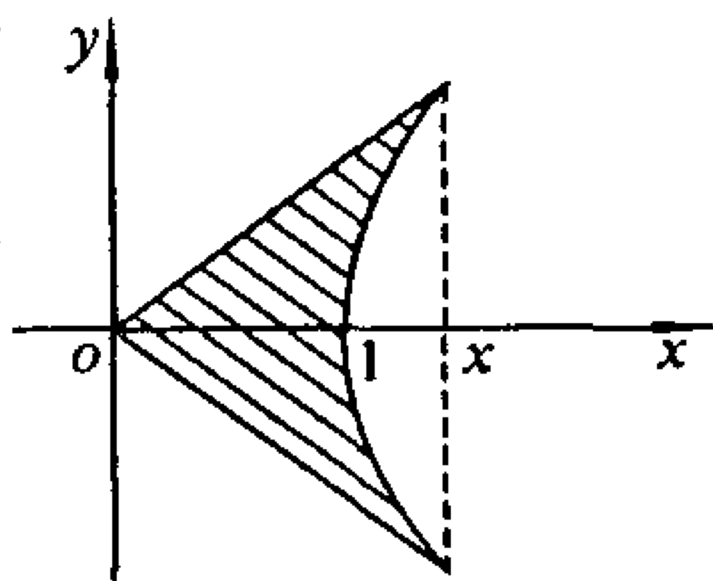


图 6.7

解 由 $x > 0$，显见图形对称于 x 轴，则

$$S = 2\left(\frac{xy}{2} - \int_1^x \sqrt{t^2 - 1}\mathrm{d}t\right)$$

$$= xy - [x\sqrt{x^2-1} - \ln|x + \sqrt{x^2-1}|]$$

$$= xy - xy + \ln(x+y) = \ln(x+y)$$

$$\Longrightarrow x + y = \mathrm{e}^S.$$

由 $$x^2 - y^2 = 1 \Longrightarrow x - y = \mathrm{e}^{-S},$$

知 $$x = \frac{\mathrm{e}^S + \mathrm{e}^{-S}}{2} = \cosh S, \quad y = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-S}}{2} = \sinh S.$$

例 4 利用图形（见图 6.8）面积计算定积分

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1 + (\tan x)^{\sqrt{2}}}.$$

解 因为 $f(x) = \dfrac{1}{1 + (\tan x)^{\sqrt{2}}}$ 经过点 $A\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$，$C(0,1)$，

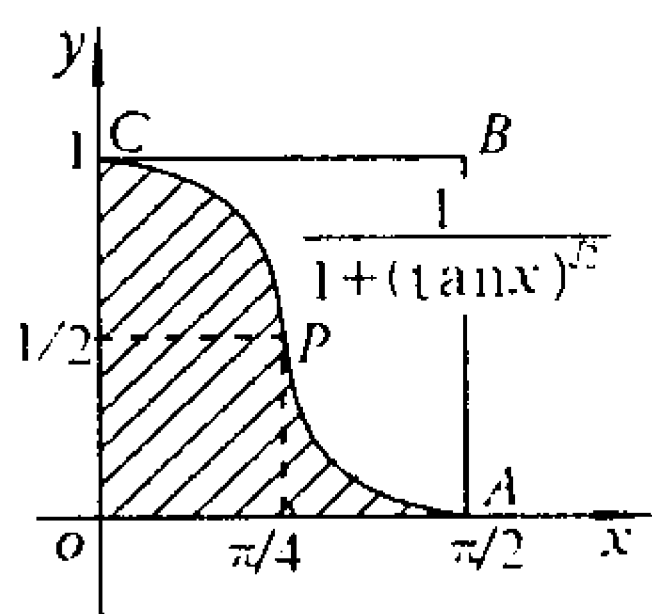


图 6.8

$P\left(\frac{\pi}{4},\frac{1}{2}\right)$，所以积分$\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}$在数值上恰为矩形 $ABCo$ 面积的一半，即

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\times 1=\frac{\pi}{4}.$$

可以通过证明点$P\left(\frac{\pi}{4},\frac{1}{2}\right)$是点$(x,f(x))$和点$\left(\frac{\pi}{2}-x,f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)$的中点来证明曲线 $f(x)$ 关于 P 对称. 因为

$$f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{1}{1+[\tan(\pi/2-x)]^{\sqrt{2}}}=\frac{1}{1+(\cot x)^{\sqrt{2}}}$$

$$=\frac{(\tan x)^{\sqrt{2}}}{1+\tan^{\sqrt{2}}},$$

所以
$$\frac{1}{2}\left[f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}+\frac{(\tan x)^{\sqrt{2}}}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}\right]=\frac{1}{2},$$

即曲线 $f(x)$ 过点$\left(\frac{\pi}{4},\frac{1}{2}\right)$.

例 5 在抛物线$C_1:y=x^2-4x+3$上任取一点P，向抛物线$C_2:y=x^2-4x+7$作两切线，记两切点为A,B. 证明：曲边三角形PAB面积S为常数(见图 6.9).

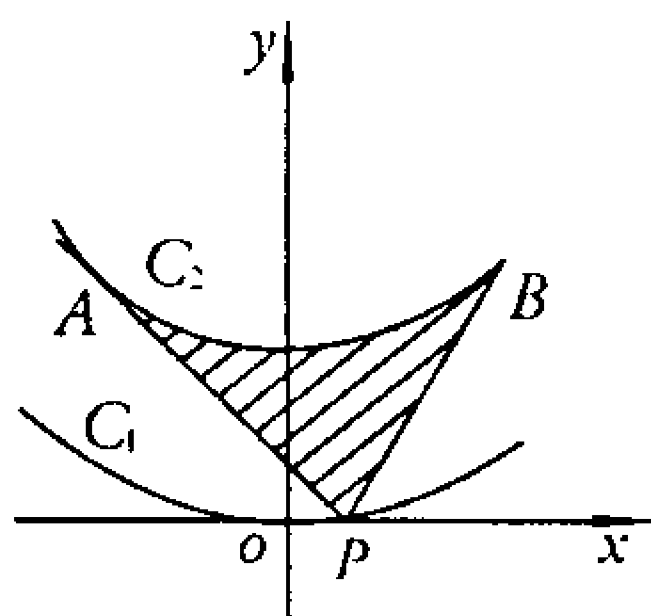


图 6.9

证 因为$C_1:y=(x-1)^2-1$，$C_2:y=(x-1)^2+3$，不妨化为$y=x^2$和$y=x^2+4$. 下面我们就更一般的情形$C_1:y=ax^2$和$C_2:y=ax^2+b$ $(a>0,b>0)$来进行讨论.

设点P的坐标为(t,at^2)，则过点P的直线与C_2相切于点(x,ax^2+b)，从而切线斜率为

$$\frac{(ax^2+b)-at^2}{x-t}=2ax.$$

解得两切点坐标为

$$A\left(t-\sqrt{b/a},a\left(t-\sqrt{b/a}\right)^2+b\right),$$

$$B\left(t+\sqrt{b/a},a\left(t+\sqrt{b/a}\right)^2+b\right).$$

两切线为 PA,PB,切线方程分别为

$$y=2a(t-\sqrt{b/a})(x-t)+at^2,$$

$$y=2a(t+\sqrt{b/a})(x-t)+at^2.$$

从而,曲边三角形 PAB 面积

$$S(t)=\int_{t-\sqrt{b/a}}^{t}\{(ax^2+b)-[2a(t-\sqrt{b/a})(x-t)+at^2]\}\mathrm{d}x$$

$$+\int_{t}^{t+\sqrt{b/a}}\{(ax^2+b)-[2a(t+\sqrt{b/a})(x-t)+at^2]\}\mathrm{d}x$$

$$=a\int_{t-\sqrt{b/a}}^{t}(x+\sqrt{b/a}-t)^2\mathrm{d}x+a\int_{t}^{t+\sqrt{b/a}}(x-\sqrt{b/a}-t)^2\mathrm{d}x$$

$$=\frac{a}{3}\left[(x+\sqrt{b/a}-t)^3\right]\Big|_{t-\sqrt{b/a}}^{t}+\frac{a}{3}\left[(x-\sqrt{b/a}-t)^2\right]\Big|_{t}^{t-\sqrt{b/a}}$$

$$=\frac{b}{3a}\sqrt{ab}+\frac{b}{3a}\sqrt{ab}=\frac{2b\sqrt{ab}}{3a}.$$

可知,曲边三角形面积与 t 无关,与 P 点的取法也无关,是一个常数.

例 6 由点 $M(2a,0)$ 向椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 作切线 MP 和 MQ,求曲边三角形 MPQ 所围图形的面积(见图 6.10).

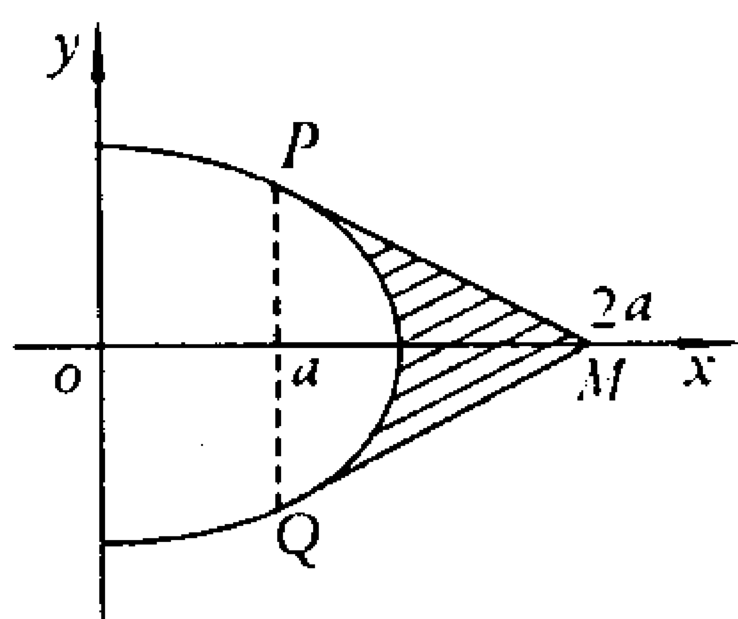


图 6.10

解 先求切线 MP,MQ 的方程. 对椭圆方程两边关于 x 求导,得

$$2b^2+2a^2yy'=0\Longrightarrow y'=-\frac{b^2x}{a^2y},$$

则过任意点 (x,y) 的切线方程为

$$Y-y=-\frac{b^2x}{a^2y}(X-x)\Longrightarrow a^2y(Y-y)+b^2x(X-x)=0.$$

将 (X,Y) 以 $(2a,0)$ 代入,得

$$2ab^2x = b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

所以,点 P 坐标为 $\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}b\right)$,点 Q 坐标为 $\left(\dfrac{a}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}b\right)$.

由面积关于 x 轴的对称性,得

$$S = 2\int_0^{\sqrt{3}b/2}\left(2a - \frac{\sqrt{3}a}{b}y - \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}\right)\mathrm{d}y$$

$$= 2\left[2ay - \frac{\sqrt{3}a}{3b}y^2 - \frac{a}{2b}\left(y\sqrt{b^2 - y^2} + b^2\arcsin\frac{y}{b}\right)\right]_0^{\sqrt{3}b/2}$$

$$= \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)ab.$$

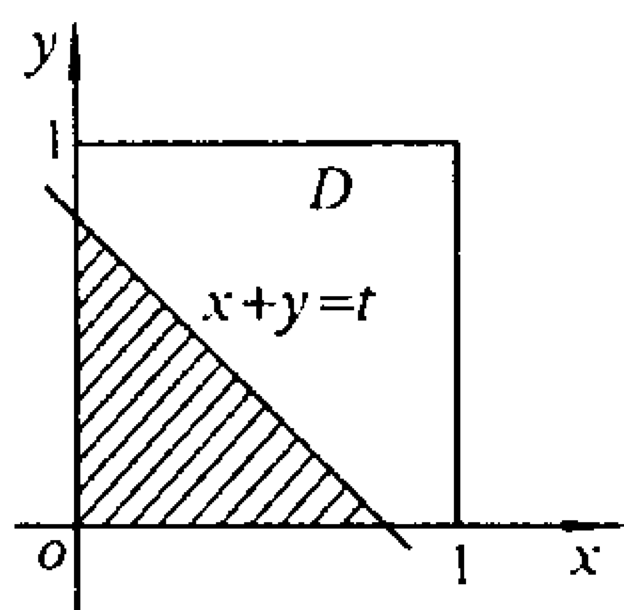


图 6.11

例 7 设 xoy 平面上有正方形 $D:0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1$ 及直线 $l:x+y=t\ (t\geqslant 0)$. 若 $S(t)$ 表示正方形 D 位于直线 l 左下方部分面积(见图 6.11),求 $\int_0^x S(t)\mathrm{d}t\,(x\geqslant 0)$.

解 因为

$$S(t) = \begin{cases} t^2/2, & 0\leqslant t\leqslant 1, \\ -t^2/2 + 2t - 1, & 1 < t\leqslant 2, \\ 1, & t > 2, \end{cases}$$

所以

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} \int_0^x t^2/2\mathrm{d}t \\ \int_0^1 t^2/2\mathrm{d}t + \int_1^x (-t^2/2 + 2t - 1)\mathrm{d}t \\ \int_0^1 t^2/2\mathrm{d}t + \int_1^2 (-t^2/2 + 2t - 1)\mathrm{d}t + \int_2^x \mathrm{d}t \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^3/6, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ -x^3/6 + x^2 - x + \dfrac{1}{3}, & 1 < x\leqslant 2, \\ x - 1, & x > 2. \end{cases}$$

例 8 已知抛物线 $y = px^2 + qx\ (p<0,q>0)$ 在第一象限内与直线 $x+y=5$ 相切,设抛物线与 x 轴所围的平面图形面积为 S(见图 6.12).

(1) p 和 q 为何值时，S 达到最大值？

(2) 求出此最大值.

解 由 $y=px^2+qx$ 和 $y=0$ 求得抛物线与 x 轴交点的横坐标为 $x_1=0$，$x_2=-q/p$. 故

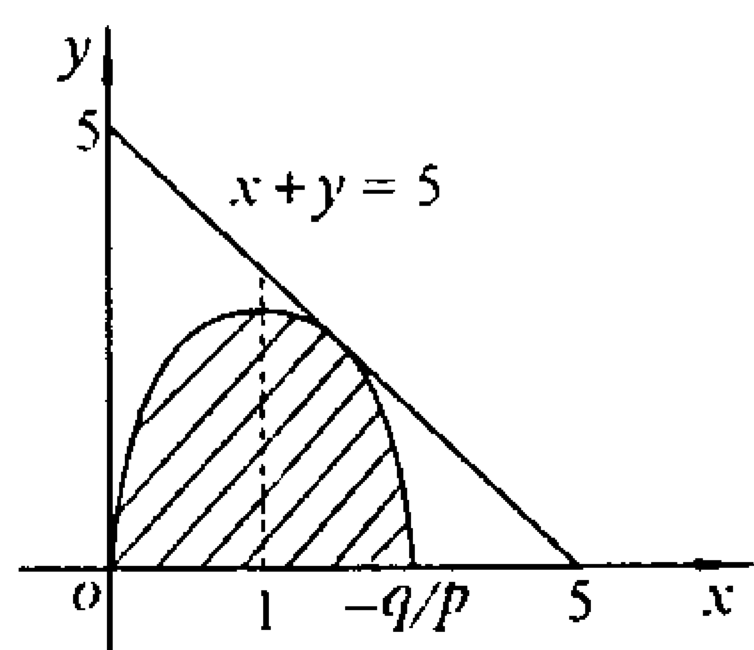


图 6.12

$$S=\int_0^{-q/p}(px^2+qx)\mathrm{d}x$$
$$=\left(\frac{p}{3}x^3+\frac{q}{2}x^2\right)\Big|_0^{-q/p}=\frac{q^3}{6p^2}.$$

由 $x+y=5$ 和 $y=px^2+qx$ 相切，得方程 $px^2+(q+1)x-5=0$ 只有惟一解，故判别式必等于零. 即

$$\Delta=(q+1)^2+20p=0\Longrightarrow p=-\frac{1}{20}(1+q)^2,$$

所以
$$S=S(q)=\frac{200q^3}{3(q+1)^4},$$

且
$$S'(q)=\frac{200q^3(3-q)}{3(q+1)^5}=0\Longrightarrow q=3.$$

当 $0<q<3$ 时，$S'(q)>0$；当 $q>3$ 时，$S'(q)<0$. 于是当 $q=3$ 时，$S(q)$ 有极大值，即最大值.

当 $q=3$ 时，$p=-\frac{1}{20}(1+3)^2=-\frac{4}{5}$，$S=\frac{225}{32}$.

例 9 求曲线 $y=x(x-1)(x-2)$ 与直线 $y=3(x-1)$ 所围图形面积(见图 6.13).

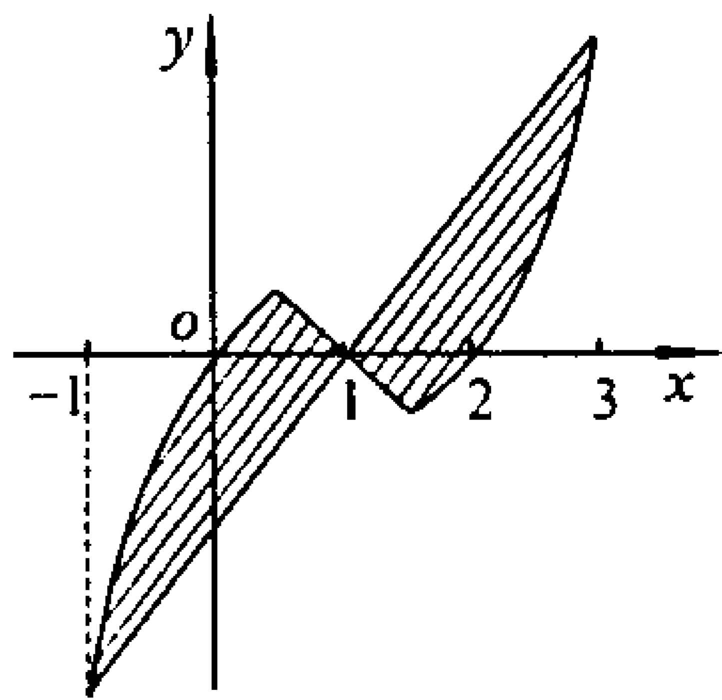


图 6.13

解 面积微元为

$$\mathrm{d}S=|x(x-1)(x-2)-3(x-1)|\mathrm{d}x,$$

所以，所求图形面积

$$S=\int_{-1}^{3}|x(x-1)(x-2)-3(x-1)|\mathrm{d}x$$
$$=\int_{-1}^{3}|x-1||(x-3)(x+1)|\mathrm{d}x$$
$$=\int_{-1}^{1}(1-x)(x-3)(x+1)\mathrm{d}x$$

$$+\int_1^3 (x-1)(x-3)(x+1)\mathrm{d}x = 8.$$

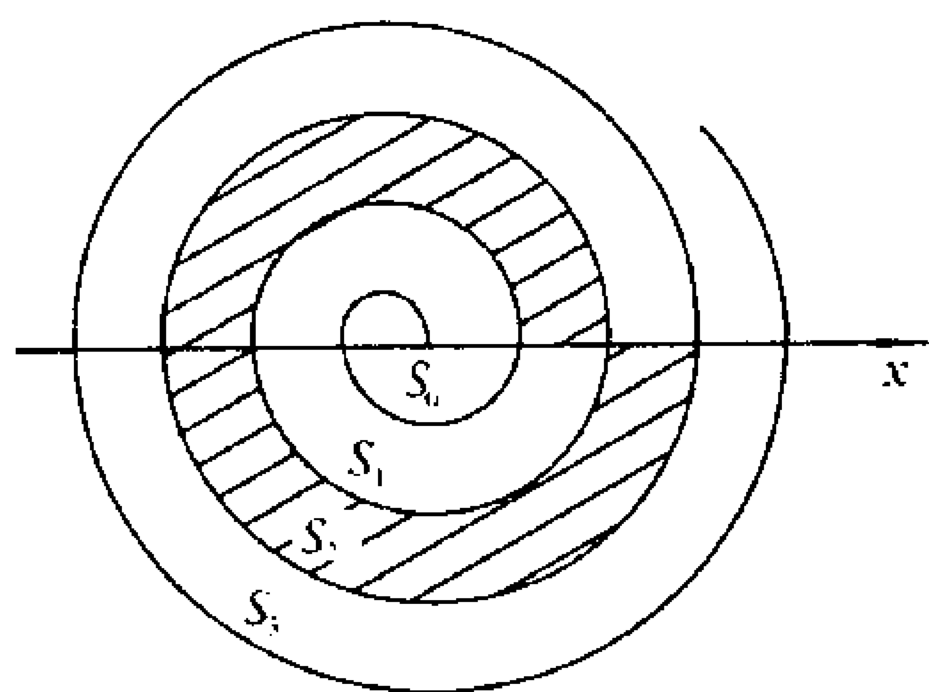


图 6.14

例 10　设阿基米德螺线 $r = a\theta$ $(a \geqslant 0, \theta \geqslant 0)$ 每相邻两圈间的面积为 $S_0, S_1, S_2, \cdots$（见图 6.14），证明：$S_1, S_2, S_3, \cdots$ 成等差数列.

证　利用极坐标下的面积计算公式，得

$$A_k = \frac{1}{2}\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} (a\theta)^2 \mathrm{d}\theta = \frac{4}{3}a^2\pi^3(3k^2 + 3k + 1),$$

$$k = 0, 1, 2, \cdots.$$

因为 $S_0 = A_0, S_1 = A_1 - A_0, S_2 = A_2 - A_1, \cdots$，所以

$$S_k = A_k - A_{k-1} = \frac{4}{3}a^2\pi^3[3k^2 + 3k + 1 - (3k^2 - 3k + 1)]$$
$$= 8a^2\pi^3 k,\ k = 1, 2, \cdots.$$

可知，$S_1, S_2, S_3, \cdots$ 是公差为 $8a^2\pi^3$ 的等差数列.

例 11　求闭曲线 $y^2 = x^2 - x^4$ 所围图形的面积.

解　此图形特征可由方程得出，它关于 x, y 轴对称. 令 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$，得出曲线方程为

$$r^2\sin^2\theta = r^2\cos^2\theta - r^4\cos^4\theta \Longrightarrow r^2\cos^4\theta = \cos 2\theta \geqslant 0,$$

所以 $-\pi/4 \leqslant \theta \leqslant \pi/4$ 或 $3\pi/4 \leqslant \theta \leqslant 5\pi/4$. 故

$$\mathrm{d}S_1 = \frac{1}{2}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\frac{\cos 2\theta}{\cos^4\theta}\mathrm{d}\theta,$$

于是，由图形的对称性，得

$$S = 4S_1 = 4 \times \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2\theta}{\cos^4\theta}\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\pi/2}(1 - \tan^2\theta)\mathrm{d}\tan\theta$$
$$= 2\left(\tan\theta - \frac{1}{3}\tan^3\theta\right)\Big|_0^{\pi/4} = 2\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}.$$

类似地，可求得闭曲线 $(x^2 + y^2) = a^2(x^4 + y^4)$ 所围图形的面积. 曲线的极坐标方程为 $r^2 = a^2\left[1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\theta\right]$. 由图形关于 x 轴

和 y 轴的对称性，可得

$$S = 4 \times \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} r^2 \mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\pi/2} a^2\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\theta\right)\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^{\pi/2} a^2 \mathrm{d}\theta + a^2\int_0^{\pi/2}\cos 4\theta \mathrm{d}\theta = \frac{3}{4}\pi a^2.$$

例 12 求封闭曲线 $r = \dfrac{2at}{1+t^2}, \theta = \dfrac{\pi t}{1+t}$ 所围图形的面积.

解 因为当曲线封闭时，t 由 0 变到 $+\infty$，所以，所围图形面积为

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} r^2 \mathrm{d}\theta = 2\pi a^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2(1+t)^2}\mathrm{d}t$$

$$= 2\pi a^2 \lim_{b\to+\infty}\left[\int_0^b \frac{\mathrm{d}t}{4(1+t)^2} - \frac{1}{4}\int_0^b \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} + \frac{1}{2}\int_0^b \frac{t\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}\right]$$

$$= 2\pi a^2 \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{4(1+t)} - \frac{1}{4}\arctan t - \frac{1}{4(1+t^2)}\right]\Bigg|_0^b$$

$$= \pi a^2(1 - \pi/4).$$

2. 其它几何应用

例 13 已知曲线为星形线(见图 6.15)：$x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t\ (a > 0, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$. 求：

(1) 所围成图形的面积 S_1.

(2) 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积 V；

(3) 绕直线 $y = x$ 旋转所得旋转曲面面积 S_2.

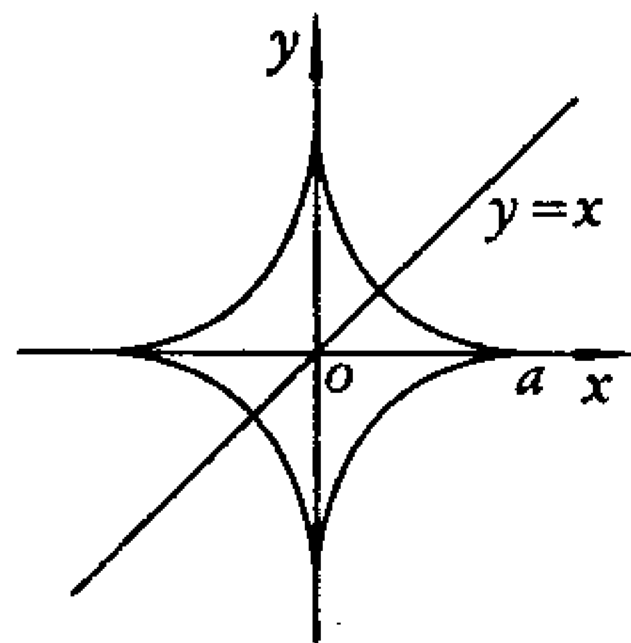


图 6.15

解 (1) 由对称性，得

$$S_1 = 4\int_{\pi/2}^0 y(t)x'(t)\mathrm{d}t = 4\int_0^{\pi/2} a\sin^3 t\, 3a\cos^2 t\sin t\mathrm{d}t$$

$$= 12a^2\int_0^{\pi/2}\sin^4 t\cos^2 t\mathrm{d}t = 12a^2\int_0^{\pi/2}(\sin^4 t - \sin^6 t)\mathrm{d}t$$

$$= 12a^2\left(\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2} - \frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}\right)\frac{\pi}{2} = \frac{3}{8}\pi a^2.$$

(2) $V = 2\pi\displaystyle\int_0^{\pi/2} |a^2\sin^6 t(-3a\cos^2 t\sin t)|\mathrm{d}t$

$$= 6\pi a^3\int_0^{\pi/2}\sin^7 t(1-\sin^2 t)\mathrm{d}t$$

$$= 6\pi a^3\left(\frac{6\cdot 4\cdot 2}{7\cdot 5\cdot 3}-\frac{8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}{9\cdot 7\cdot 5\cdot 3}\right)=\frac{32}{105}\pi a^3.$$

(3) $\mathrm{d}S_2=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\mathrm{d}t$

$$=\begin{cases}3a\sin t\cos t\mathrm{d}t, & \pi/4\leqslant t\leqslant \pi/2,\\ -3a\sin t\cos t\mathrm{d}t, & \pi/2\leqslant t\leqslant 3\pi/4.\end{cases}$$

由对称性,得旋转曲面面积

$$S_2=2\left(2\pi\int_{-\pi/4}^{3\pi/4}\frac{y-x}{\sqrt{2}}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\mathrm{d}t\right)$$

$$=\frac{4\pi}{\sqrt{2}}\cdot 3a^2\left[\int_{\pi/4}^{\pi/2}(\sin^3 t-\cos^3 t)\sin t\cos t\mathrm{d}t\right.$$

$$\left.-\int_{\pi/2}^{3\pi/4}(\sin^3 t-\cos^3 t)\sin t\cos t\right]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{12\pi}{\sqrt{2}}a^2\left(\frac{\sin^5 t+\cos^5 t}{5}\Big|_{\pi/4}^{\pi/2}-\frac{\sin^5 t+\cos^5 t}{5}\Big|_{\pi/2}^{3\pi/4}\right)$$

$$=\frac{3}{5}\pi a^2(4\sqrt{2}-1).$$

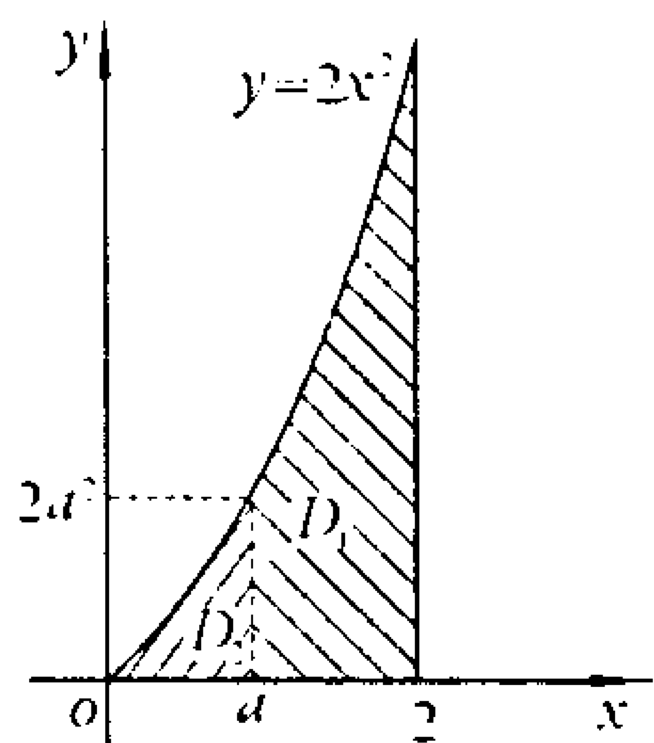


图 6.16

例 14 设 D_1 是由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $x=a,x=2$ 和 $y=0$ 所围成的区域;D_2 是由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $y=0,x=a$ 所围成的区域,其中 $0<a<2$(见图 6.16).

(1) 求由 D_1 绕 x 轴旋转所成旋转体体积 V_1 和由 D_2 绕 y 轴旋转成旋转体体积 V_2;

(2) 问:当 a 为何值时,V_1+V_2 取得最大值?试求此最大值.

解 (1) $V_1=\pi\int_a^2(2x^2)^2\mathrm{d}x$

$$=\frac{4}{5}\pi(32-a^5),$$

$$V_2=\pi a^2\cdot 2a^2-\pi\int_0^{2a^2}\frac{y}{2}\mathrm{d}y=2\pi a^4-\pi a^4=\pi a^4.$$

(2) $V = V_1 + V_2 = \frac{4}{5}\pi(32 - a^5) + \pi a^4$,

$$V'_a = 4\pi a^3(1 - a),$$

令 $V'_a = 0$，知 $a = 1$ 为惟一驻点.

当 $0 < a < 1$ 时，$V'_a > 0$；当 $a > 1$ 时，$V'_a < 0$. 故 $a = 1$ 时有极大值，即最大值，所以最大值 $V(1) = \frac{129}{5}\pi$.

例 15 求微分方程 $x\mathrm{d}y + (x - 2y)\mathrm{d}x = 0$ 的一个解 $y = y(x)$，使得由曲线 $y = y(x)$ 与直线 $x = 1, x = 2$ 及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积最小.

解 将微分方程化为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{2}{x}y = -1$，即得

$$y = \mathrm{e}^{\int 2/x\mathrm{d}x}\left[-\mathrm{e}^{\int 2/x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + c\right] = x^2\left(\frac{1}{x} + c\right) = x + cx^2,$$

故旋转体体积

$$V(c) = \int_1^2 \pi(x + cx^2)^2\mathrm{d}x = \pi\left(\frac{31}{5}c^2 + \frac{15}{2}c + \frac{7}{3}\right),$$

$$V'(c) = \pi\left(\frac{62}{5}c + \frac{15}{2}\right),$$

令 $V'(c) = 0$，知 $\qquad c = -\frac{75}{124}$.

因为 $V''(c) = \frac{62}{5} > 0$，所以 $x = -\frac{75}{124}$ 为惟一极小值点，即最小值点. 于是

$$y = x - \frac{75}{124}x^2.$$

例 16 求曲线 $y = x^2 - 2x, y = 0, x = 1, x = 3$ 所围成的平面图形的面积 S，并求该图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积 V(见图 6.17).

解 $S = S_1 + S_2$.

$$S_1 = \int_1^2 (2x - x^2)\mathrm{d}x = \left(x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_1^2 = \frac{2}{3},$$

$$S_2 = \int_2^3 (x^2 - 2x)\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2\right)\Big|_2^3 = \frac{4}{3},$$

所以，所求图形面积 $S = S_1 + S_2 = 2$.

平面图形 S_1 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积

$$V_1 = \pi\int_{-1}^{0}(1 + \sqrt{1+y})^2\mathrm{d}y - \pi = \frac{11}{6}\pi;$$

平面图形 S_2 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积

$$V_2 = 27\pi - \pi\int_{0}^{3}(1 + \sqrt{1+y})^2\mathrm{d}y = \frac{43}{6}\pi.$$

所以，所求旋转体体积　$V = V_1 + V_2 = 9\pi$.

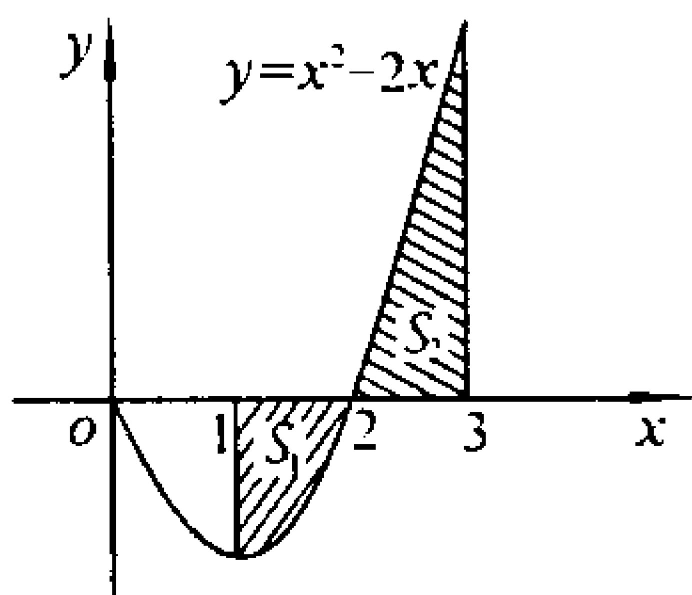


图 6.17

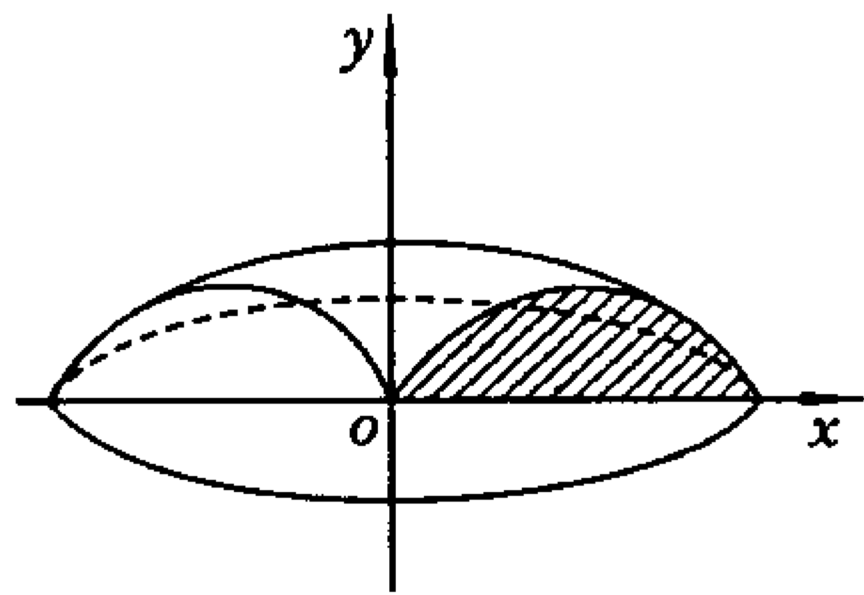


图 6.18

例 17　求摆线：$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leqslant 2\pi$ 与 x 轴围成的平面图形绕 y 轴旋转所得旋转体的体积 V（见图 6.18）.

解　$V = 2\pi\int_0^{2\pi a} x \cdot y\mathrm{d}x = 2\pi\int_0^{2\pi} a^3(t - \sin t)(1 - \cos t)^2\mathrm{d}t$

$= 2\pi a^3\int_0^{2\pi}(t - \sin t)\left[1 - 2\cos t + \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)\right]\mathrm{d}t$

$= 2\pi a^2\int_0^{2\pi}(\frac{3}{2}t - \frac{3}{2}\sin t - 2t\cos t + \sin 2t + t\cos 2t$

$- \sin t\cos 2t)\mathrm{d}t = 2\pi a^3 \cdot 2\pi^2$

$= 6\pi^3 a^3$.

例 18　立体底面为抛物线 $y = x^2$ 与直线 $y = 1$ 围成的平面图形，如图 6.19 所示，而任一垂直于 y 轴的截面分别是：(1) 正方形（见图(a)）；(2) 等边三角形（见图(b)）；(3) 半圆形（见图(c)）．求这三种情形下立体的体积.

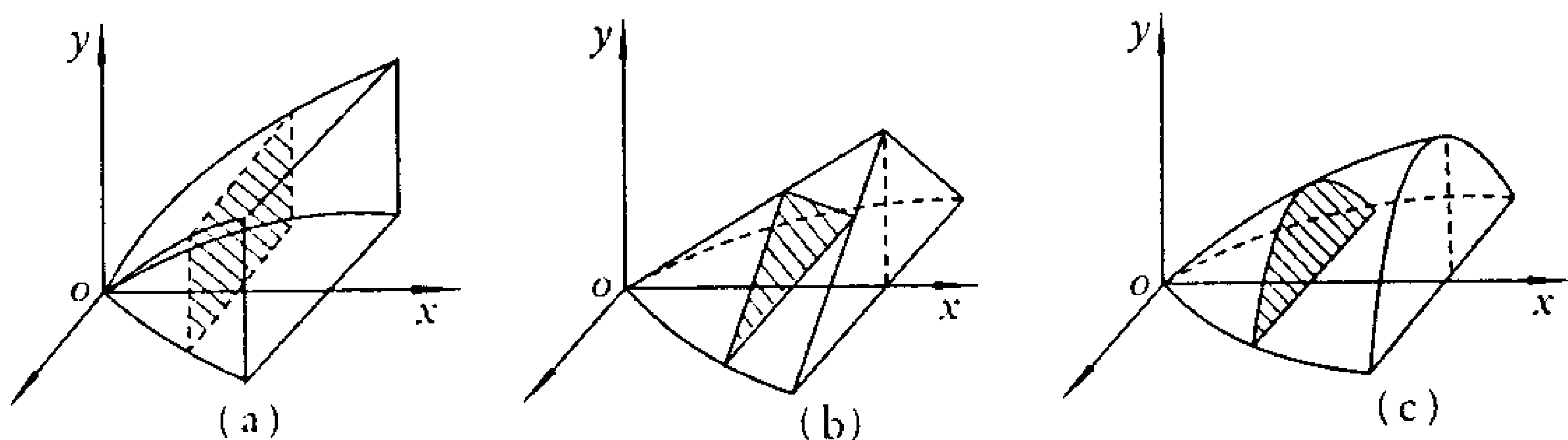


图 6.19

解 先求出三种情形下的截面积 S_1, S_2, S_3，再利用公式求体积 V_1, V_2, V_3.

(1) $S_1(y) = (2\sqrt{y})^2 = 4y$，故

$$V_1 = \int_0^1 S_1(y)\mathrm{d}y = \int_0^1 4y\mathrm{d}y = 2.$$

(2) $S_2(y) = \frac{\sqrt{3}}{4}(2\sqrt{y})^2 = \sqrt{3}y$，故

$$V_2 = \int_0^1 S_2(y)\mathrm{d}y = \int_0^1 \sqrt{3}y\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(3) $S_3(y) = \frac{1}{2}\pi(\sqrt{y})^2 = \frac{1}{2}\pi y$，故

$$V_3 = \int_0^1 S_3(y)\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{1}{2}\pi y\mathrm{d}y = \frac{1}{4}\pi.$$

例 19 两个半径为 r 的圆柱的轴垂直相交，求其所围成的立体的体积(见图 6.20). 若两半径分别为 R 和 r $(R > r)$，体积有何变化?

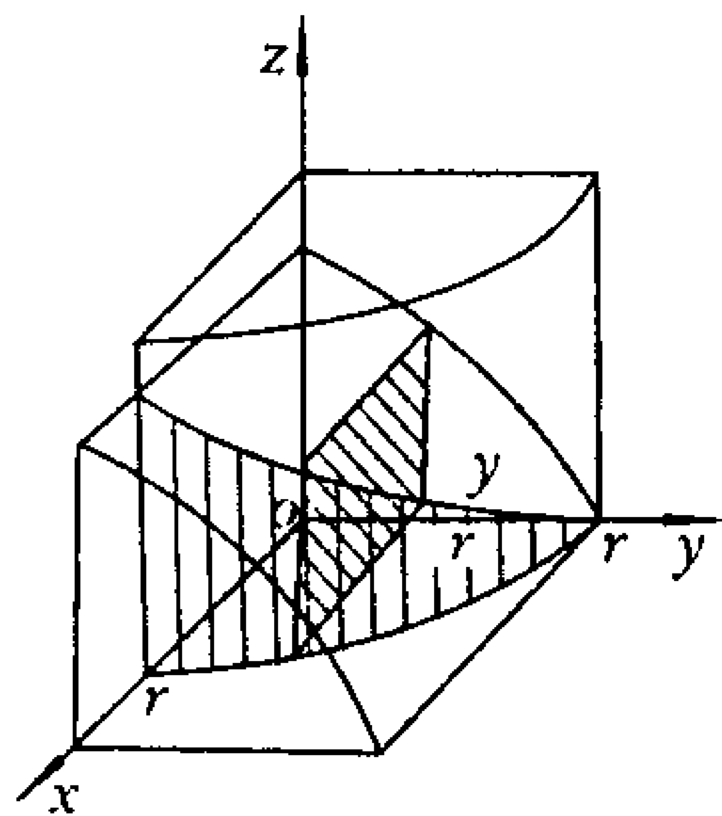


图 6.20

解 作平行于 x 轴、与 x 轴距离为 y 且垂直 xoy 平面的平面，与两圆柱体公共部分的截面积为 $S(y) = r^2 - y^2$，于是

$$V = 8\int_0^r (r^2 - y^2)\mathrm{d}x = \frac{16}{3}r^3.$$

若两圆柱有不同半径，则截面为矩形，截面积

$$S(y) = \sqrt{(r^2 - y^2)(R^2 - y^2)},$$

立体体积 $\qquad V = 8\int_0^r \sqrt{(r^2 - y^2)(R^2 - y^2)}\mathrm{d}y$

是一个椭圆积分. 作代换 $y = r\sin\theta$,且令 $k = r/R$,则

$$V = 8Rr^2\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\ \sqrt{1 - k^2\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{8}{3}R^3[(1 + k)^2E(k) - (1 - k^2)F(k)],$$

其中 $E(k)$ 和 $F(k)$ 是完全椭圆积分,可查表得出.

例 20 设悬链线 $y = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$ 在 $[0,u]$ 上一段弧长和曲边梯形面积分别为 $s(u)$ 和 $S(u)$,如图 6.21 所示;该曲边梯形绕 x 轴旋转所得旋转体的体积和侧面积分别为 $V(u)$ 和 $S_\mathrm{C}(u)$;旋转体在 $x = u$ 一端的底面积为 $S_\mathrm{D}(u)$. 证明:$\forall\ u > 0$.

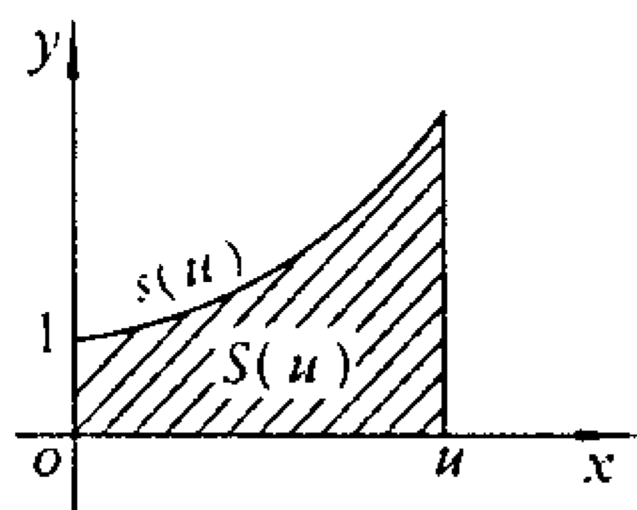


图 6.21

(1) $s(u) = S(u), S_\mathrm{C}(u) = 2V(u)$;

(2) $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{S_\mathrm{C}(u)}{S_\mathrm{D}(u)} = 1$.

证 (1) 由于 $y' = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$,所以

$$\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + [(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})/2]^2} = y,$$

$$s(u) = \int_0^u \sqrt{1 + y'^2}\mathrm{d}x = \int_0^u y\mathrm{d}x = S(u),$$

$$S_\mathrm{C}(u) = 2\pi\int_0^u y\ \sqrt{1 + y'^2}\mathrm{d}x = 2\pi\int_0^u y^2\mathrm{d}x = 2V(u).$$

(2) $$S_\mathrm{C}(u) = 2\pi\int_0^u y^2\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^u(\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x} + 2)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi}{4}(\mathrm{e}^{2u} - \mathrm{e}^{-2u} + 4u),$$

$$S_\mathrm{D}(u) = \pi y^2(u) = \frac{\pi}{4}(\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u})^2 = \frac{\pi}{4}(\mathrm{e}^{2u} + \mathrm{e}^{-2u} + 2),$$

故 $$\lim_{u\to+\infty}\frac{S_C(u)}{S_D(u)}=\lim_{u\to+\infty}\frac{e^{2u}-e^{-2u}+4u}{e^{2u}+e^{-2u}+2}=1.$$

例 21 求半立方抛物线 $y^2=\frac{2}{3}(x-1)^3$ 被抛物线 $y^2=\frac{x}{3}$ 所截得的一段弧长 s(见图 6.22).

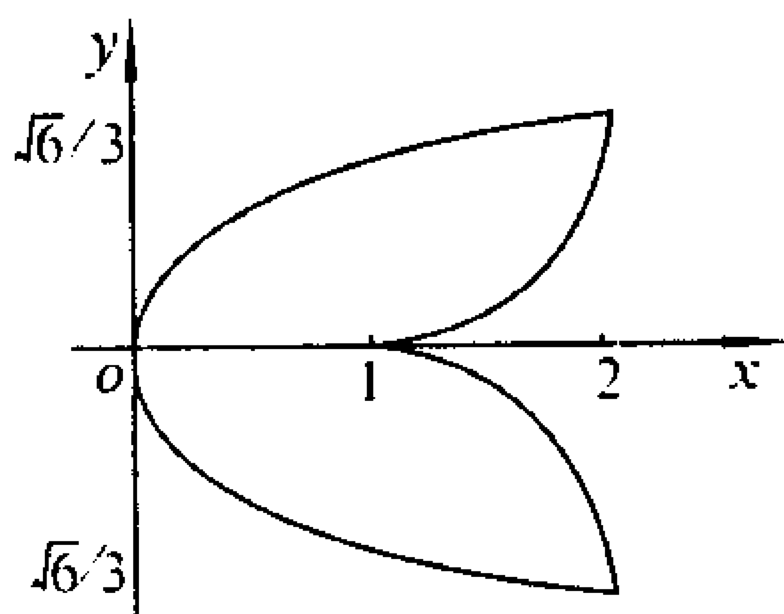


图 6.22

解 求得两曲线的交点为 $\left(2,\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$, $\left(2,-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$,且知弧关于 x 轴对称. 所以,

$$y'=\left(\frac{2}{3}(x-1)^2\right)'=\frac{(x-1)^2}{y},$$

$$s=2\int_1^2\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=2\int_1^2\sqrt{1+\frac{3}{2}(x-1)}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2}}\int_1^2\sqrt{3x-1}\,\mathrm{d}x=\frac{8}{9}\left[\left(\frac{5}{2}\right)^{3/2}-1\right].$$

例 22 求外摆线一拱的长. 外摆线方程为

$$\begin{cases}x=(a+b)\cos t-b\cos\dfrac{a+b}{b}t,\\ y=(a+b)\sin t-b\sin\dfrac{a+b}{b}t,\end{cases}\quad 0<b<a.$$

解 先求出外摆线一拱 t 的变化区间. 因为外摆线一拱的始点与终点都在圆周 $x^2+y^2=a^2$ 上,所以解方程

$$a^2=x^2+y^2=\left[(a+b)\cos t-b\cos\frac{a+b}{b}t\right]^2$$

$$+\left[(a+b)\sin t-b\sin\frac{a+b}{b}t\right]^2$$

$$=(a+b)^2+b^2$$

$$-2b(a+b)\left(\sin t\sin\frac{a+b}{b}t+\cos t\cos\frac{a+b}{b}t\right)$$

$$=a^2+2ab+2b^2-2b(a+b)\cos\frac{a}{b}t,$$

得 $\cos\frac{a}{b}t=1 \Longrightarrow t=0$ 与 $t=\frac{2b}{a}\pi$. 即外摆线的一拱，参数 $0\leqslant t\leqslant \frac{2b}{a}\pi$. 于是

$$x_t' = -(a+b)\left(\sin t-\sin\frac{a+b}{b}t\right)\mathrm{d}t,$$

$$y_t' = (a+b)\left(\cos t-\cos\frac{a+b}{b}t\right)\mathrm{d}t,$$

$$x_t'^2+y_t'^2=\left[4(a+b)^2\sin^2\frac{a}{2b}t\right]\mathrm{d}t^2.$$

得
$$s=\int_0^{2b\pi/a}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\mathrm{d}t=\int_0^{2b\pi/a}2(a+b)\sin\frac{a}{2b}t\mathrm{d}t$$
$$=-\frac{4(a+b)b}{a}\cos\frac{a}{2b}t\Big|_0^{2b\pi/a}=\frac{8b}{a}(a+b).$$

例 23 如图 6.23 所示，在摆线 $x=a(t-\sin t),y=a(1-\cos t)$ 上，求分摆线第一拱为 1∶3 的点的坐标.

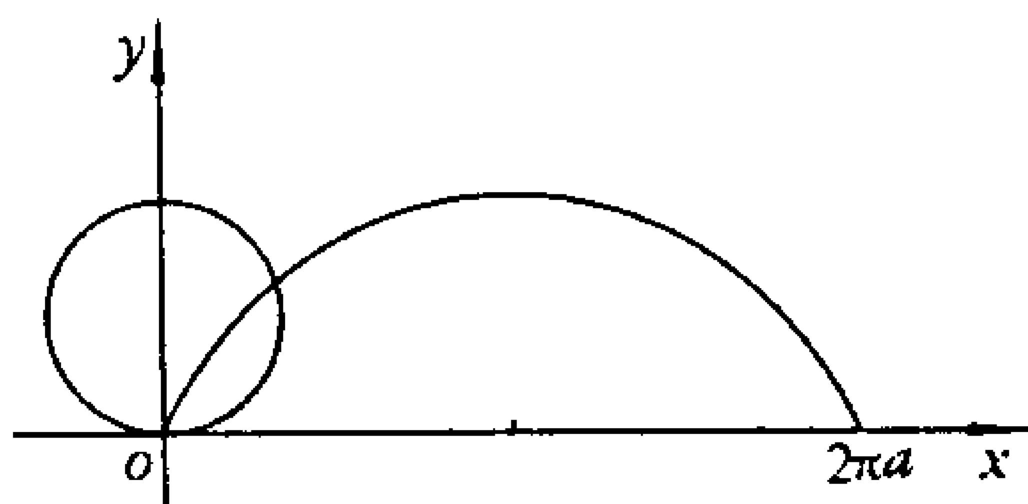


图 6.23

解 因为 $x_t'=a(1-\cos t)$, $y_t'=a\sin t$，所以

$$x_t'^2+y_t'^2=4a^2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right).$$

当 t 从 0 变到 2π 时，摆线划出第一拱，有

$$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}2a\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t=8a.$$

设分点 $t=t_0$，则由

$$s(t_0)=\int_0^{t_0}2a\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t=4a\left(1-\cos\frac{t_0}{2}\right)=2a,$$

得 $t_0=\frac{2}{3}\pi$，于是

$$x_0=\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a,\ y_0=\frac{3}{2}a,$$

即所求分点坐标为$\left(\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x,\frac{3}{2}a\right)$.

二、定积分在物理中的应用

定积分的物理应用的关键同样是微元的确定，要根据物理定律和问题的具体条件确定坐标系，选择物理量，确定定积分微元.

例 24 某闸门的大小和形状如图 6.24 所示，闸门的上部为矩形 $ABCD$，下部由二次抛物线与线段 AB 所围成. 当水面与闸门的上端相平时，欲使闸门矩形部分承受的水压力与闸门下部承受的水压力之比为 5∶4，闸门矩形部分的高应为多少米？

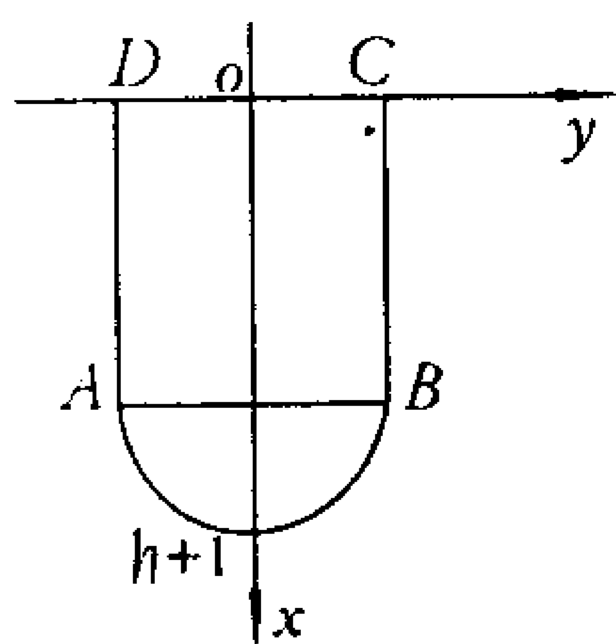


图 6.24

解 取坐标系如图，则抛物线方程为

$$x=h+1-y^2.$$

闸门矩形部分所受水压力

$$p_1=2\int_0^h \rho g x\,\mathrm{d}x=\rho g h^2,$$

闸门下部承受水压力

$$p_2=2\int_h^{h+1}\rho g x\sqrt{h+1-x}\,\mathrm{d}x,$$

$$\xlongequal{\sqrt{h+1-x}=t} 4\rho g\int_0^1 (h+1-t^2)t^2\,\mathrm{d}t$$

$$=4\rho g\left[(h+1)\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}\right]\Bigg|_0^1=4\rho g\left(\frac{h}{3}+\frac{2}{15}\right).$$

$$\frac{p_1}{p_2}=\frac{5}{4}\Longrightarrow\frac{h^2}{4(h/3+2/15)}=\frac{5}{4}\Longrightarrow h=2.$$

即闸门矩形部分高应为 2m.

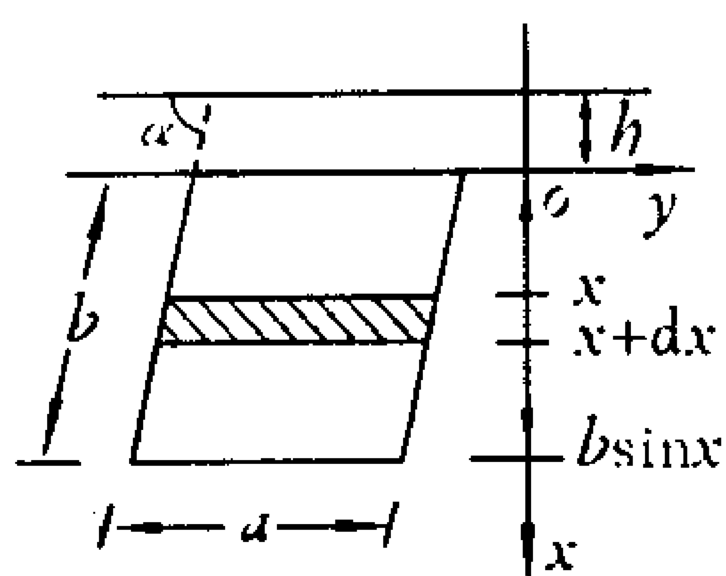


图 6.25

例 25 一边长为 a 和 b ($a>b$) 的矩形薄板与液面成 α 角沉入液体内，其长边平行于液面，位于深 h 处. 若液体的密度为 ρ. 求薄板每面上的液体压力.

解 如图 6.25 建立坐标系. x 的变化区间为$[0,b\sin\alpha]$,$\mathrm{d}S = a\cdot\frac{1}{\sin\alpha}\mathrm{d}x$,压力微元 $\mathrm{d}p = \rho(h+x)\frac{a\mathrm{d}x}{\sin\alpha}$,于是

$$p = \int_0^{b\sin\alpha}\rho(h+x)\frac{a\mathrm{d}x}{\sin\alpha} = \frac{a\rho}{\sin\alpha}\left(hx+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{b\sin\alpha}$$
$$= \rho ab\left(h+\frac{b}{2}\sin\alpha\right).$$

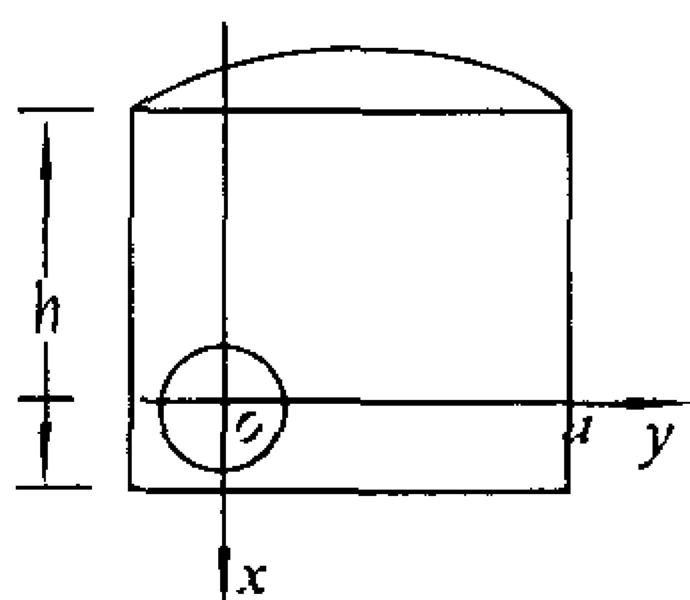


图 6.26

例 26 有一装满密度为 960kg/m³ 的油料的贮油罐,在其下部有一个半径为 $R=380\text{mm}$ 的检修孔. 设孔的中心与液面的距离 $h=6800\text{mm}$,孔口挡板用每个能承 500kg 力的螺钉紧固,问此检修孔需用多少个螺钉.

解 如图 6.26 建立坐标系. 圆孔方程为 $x^2+y^2=R^2$,积分区间为$[-R,R]$. 对应于小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$的压力微元

$$\mathrm{d}p = \rho(h+x)2\sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}x,$$

故孔口挡板所受压力

$$p = \int_{-R}^{R}2\rho(h+x)\sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}x = 4\rho h\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}x$$
$$= 4\rho h\cdot\frac{\pi}{4}R^2 = \rho h\pi R^2.$$

将题给数据代入得

$$p = 960\times 6.8\times 3.4\times 0.38^2 \approx 2952\ (\text{kg})$$
$$\Longrightarrow n = \left[\frac{2952}{500}\right]+1 \approx 6.$$

所以至少需要 6 个紧固螺钉.

例 27 一个半径 $R=3$、密度 $\rho=2$ 的实心球完全沉没在水中,球顶部到水面的距离为 16,求把球提高到底部与水面相齐需做的功.

解 因为球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi$,球的质量 $M=V\rho=$

72π，当球完全沉没水中时，浮力为 36π. 所以，球提升到顶部与水面相切时所做的功

$$W_1 = (72 - 36)\pi \times 16 = 576\pi.$$

如图 6.27 建立坐标系，考虑将球提升出水面需做功 W_2. 设将球顶从点(0,0) 提到点$(0,y)$ $(0 \leqslant y \leqslant 6)$，记此时水面上球的体积为 V_1，水面下部体积为 $36\pi - V_1$. 用平行截面积方法求 V_1，在点(0,0) 与点$(0,y)$ 间任取一点$(0,Y)$ 作截面圆，设其半径为 X，则应有

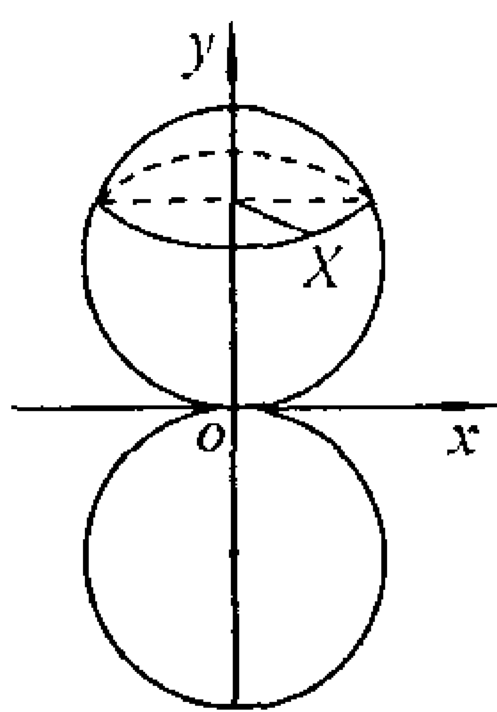


图 6.27

$$X^2 + (Y - y + 3)^2 = 3^2,$$

故 $$V_1 = \pi\int_0^y X^2 \mathrm{d}y = \pi\int_0^y [9 - (Y - y + 3)^2]\mathrm{d}y$$

$$= \pi\left[9Y - \frac{1}{3}(Y - y + 3)^3\right]\Big|_0^y$$

$$= \frac{\pi}{3}(9 - y)y^2.$$

于是提升力

$$F = V\rho - (36\pi - V_1) \times 1 = 36\pi + \frac{\pi}{3}(9 - y)y^2.$$

故 $$W_2 = \int_0^6 F\mathrm{d}y = \int_0^6 \left[36\pi + \frac{\pi}{3}(9 - y)y^2\right]\mathrm{d}y$$

$$= \left[36\pi y + \pi y^3 - \frac{\pi}{12}y^4\right]\Big|_0^y = 36 \times 9\pi = 324\pi.$$

所以，总功 $$W = W_1 + W_2 = 900\pi.$$

例 28 用铁锤将一铁钉钉入木块，设木块对铁钉的阻力与铁钉钉入木块的深度成正比. 锤击第一次时，铁钉钉入 1cm. 若铁锤每次锤击时所做的功相等，问第二次锤击钉子时钉入多深.

解 设锤击第二次时，锤入深度为 h. 因为

$$F = kx, \quad \mathrm{d}W = F\mathrm{d}x = kx\mathrm{d}x.$$

第一次锤击所做的功

$$W_1 = \int_0^1 kx\mathrm{d}x = \frac{1}{2}kx^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2}k;$$

第二次锤击所做的功

$$W_2=\int_1^{1+h}kx\mathrm{d}x=\frac{1}{2}k(h^2+2h).$$

由题设 $W_1=W_2\Longrightarrow\frac{1}{2}k=\frac{1}{2}k(h^2+2h)\Longrightarrow h^2+2h-1=0$,

解得 $h=\sqrt{2}-1$ (cm)(负值舍去).

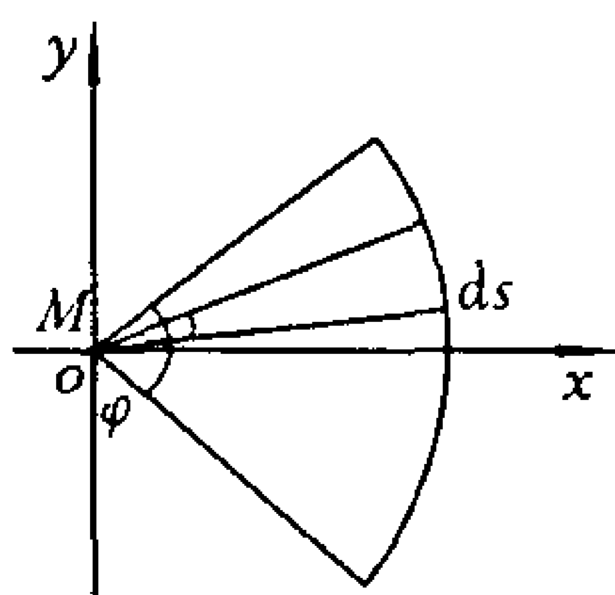


图 6.28

例 29 设有一半径为 R,中心角为 φ 的圆弧形细棒,其线密度为常数 ρ,在圆心处有一质量为 m 的质点 M,求这细棒对质点 M 的引力.

解 如图 6.28,建立坐标系. 圆弧中一小段 $\mathrm{d}s$ 对质点 M 的引力微元

$$\mathrm{d}F=\frac{m\rho\mathrm{d}x}{R^2}=\frac{km\rho}{R^2}(R\mathrm{d}\theta)=\frac{km\rho}{R}\mathrm{d}\theta.$$

故 $$F_x=\int_{-\varphi/2}^{\varphi/2}\mathrm{d}F\cos\theta=\int_{-\varphi/2}^{\varphi/2}\frac{km\rho}{R}\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{2km\rho}{R}\sin\theta\Big|_0^{\varphi/2}=\frac{2km\rho}{R}\sin\frac{\varphi}{2},$$

$$F_y=\int_{-\varphi/2}^{\varphi/2}\mathrm{d}F\sin\theta=2\int_{-\varphi/2}^{\varphi/2}\frac{km\rho}{R}\sin\theta\mathrm{d}\theta=0.$$

所以,引力的大小为 $\frac{2km\rho}{R}\sin\frac{\varphi}{2}$,方向自点 M 指向圆弧中点.

例 30 有一质量为 M、长为 l 的均匀细棒 AB 和一质量为 M_0 的质点. 质点位于坐标原点,AB 垂直于 x 轴,$\angle CoA=\alpha$,$\angle CoB=\beta$,$oC=a$. 求此棒对质点的引力.

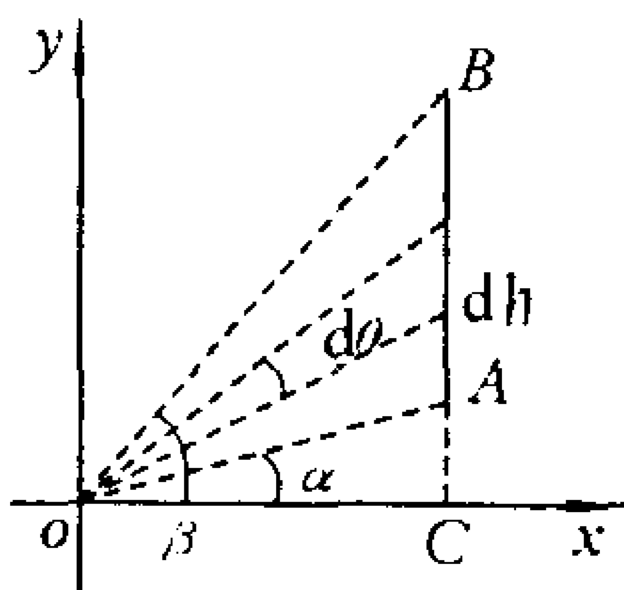


图 6.29

解 如图 6.29 建立坐标系. 细棒上微元 $\mathrm{d}h$ 对质点的引力

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=\frac{1}{r^2}M_0\cdot\frac{M}{l}\mathrm{d}h\cdot\boldsymbol{r}_0,$$

其中 $\boldsymbol{r}_0=\{\cos\theta,\sin\theta\}$. 而

$$r = \frac{a}{\cos\theta}, \quad h = a\tan\theta, \quad \mathrm{d}h = a\sec^2\theta.$$

于是 $\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \frac{M_0M}{al}\mathrm{d}\theta\boldsymbol{r}_0$，从而

$$F_x = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}F_x = \frac{M_0M}{al}\int_\alpha^\beta \cos\theta\mathrm{d}\theta = \frac{M_0M}{al}(\sin\beta - \sin\alpha),$$

$$F_y = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}F_y = \frac{M_0M}{al}\int_\alpha^\beta \sin\theta\mathrm{d}\theta = \frac{M_0M}{al}(-\cos\beta + \cos\alpha).$$

故 $$F = \sqrt{F_x + F_y} = \frac{M_0M}{al}\sqrt{2 - 2\cos(\beta - \alpha)}$$

$$= \frac{2M_0M}{al}\sin\frac{\beta - \alpha}{2},$$

方向 $$\theta = \arctan\frac{F_y}{F_x} = \arctan\left(\tan\frac{\beta + \alpha}{2}\right) = \frac{\beta + \alpha}{2}.$$

例 31 一个半径为 R 的圆环形导线均匀带电，电荷密度为 δ，在过圆心且垂直于圆环所在平面的直线上与圆心相距为 a 处有一带电量为 q 的点电荷. 求导线与电荷之间的作用力.

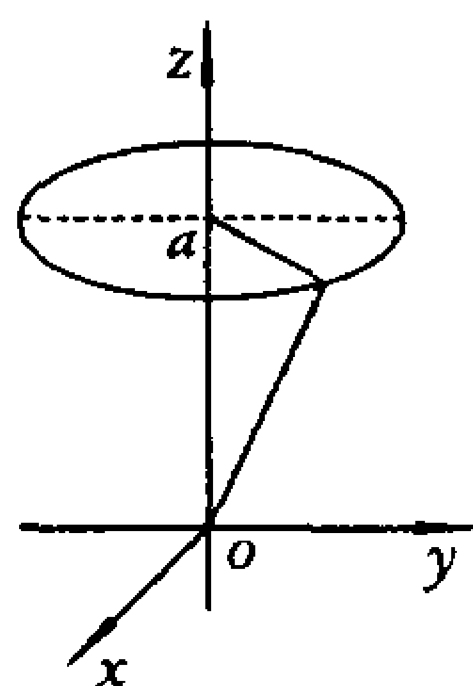


图 6.30

解 如图 6.30 建立坐标系. 点电荷位于原点，圆环方程为

$$x^2 + y^2 = R^2, \ z = a.$$

在圆环上点 (x,y,z) 处取微元 $\mathrm{d}s$，将其视作带电量为 $\delta\mathrm{d}s$ 的点电荷，由库仑定律，引力微元

$$\mathrm{d}F = \frac{kq\delta\mathrm{d}s}{(x^2 + y^2 + a^2)}r^0$$

$$= \frac{kq\delta(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + a\boldsymbol{k})}{(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}}\sqrt{1 + (x/y)^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{kqR\delta(\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + a\boldsymbol{k})}{|y|(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}}\mathrm{d}x.$$

故 $$\mathrm{d}F_x = \frac{kqR\delta x}{|y|(R^2 + a^2)^{3/2}}\mathrm{d}x = \frac{kqR\delta x}{(R^2 + a^2)^{3/2}\sqrt{R^2 - x^2}}\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{d}F_y = \frac{kqR\delta y}{|y|(R^2+a^2)^{3/2}}\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{kqR\delta}{(R^2+a^2)^{3/2}}\mathrm{d}x, & y \geqslant 0, \\ -\dfrac{kqRs}{(R^2+a^2)^{3/2}}\mathrm{d}x, & y < 0, \end{cases}$$

$$\mathrm{d}F_z = \frac{kqR\delta a}{(R^2+a^2)^{3/2}} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{R^2-x^2}}.$$

所以 $F_x = 2\int_{-R}^{R}\mathrm{d}F_x = 0$, $F_y = 2\int_{-R}^{R}\mathrm{d}F_y = 0$,

$$F_z = 2\int_{-R}^{R}\mathrm{d}F_z = \frac{2kqR\delta a}{(R^2+a^2)^{3/2}}\int_{-R}^{R}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{R^2-x^2}} = \frac{2\pi kqR\delta a}{(R^2+a^2)^{3/2}}.$$

于是,所求引力为

$$\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k} = \frac{2\pi kqR\delta a}{(R^2+a^2)^{3/2}}\boldsymbol{k},$$

引力大小为 $\dfrac{2\pi kqR\delta a}{(R^2+a^2)^{3/2}}$,方向竖直向上.

例 32 证明古尔金第一定理:弧 $C(\overset{\frown}{AB})$ 绕着不与它相交的轴旋转而成的旋转面的面积等于这个弧的长度与这弧的质心所画出的圆周之长的乘积.

证 设弧 $C(\overset{\frown}{AB})$ 的方程是 $y = y(x)$ $(x_1 \leqslant x \leqslant x_2)$,则 C 绕 x 轴所得旋转面面积为 $S_x = 2\pi\int_{(A)}^{(B)} y\mathrm{d}s$.

又曲线 C 的弧长为 $s = \int_{(A)}^{(B)}\mathrm{d}s$,而弧的质心的纵坐标为 $\eta = \int_{(A)}^{(B)} y\mathrm{d}s \Big/ \int_{(A)}^{(B)}\mathrm{d}s$,所以

$$2\pi\int_{(A)}^{(B)} y\mathrm{d}s = \int_{(A)}^{(B)}\mathrm{d}s \cdot 2\pi\left[\int_{(A)}^{(B)} y\mathrm{d}s \Big/ \int_{(A)}^{(B)}\mathrm{d}s\right] = s \cdot 2\pi\eta.$$

例 33 证明古尔金第二定理:面积 S 绕着不与它相交的轴旋转而成的旋转体体积等于面积 S 与这面积的质心所画出的圆周长的乘积.

证 设面积的边界曲线由 $y = y_1(x)$ 和 $y = y_2(x)$ 组成(其中 $y = y_1(x) < y = y_2(x)$),则面积 S 绕 x 轴旋转所得旋转体体积

为 $V_x=\pi\int_{x_1}^{x_2}(y_2^2-y_1^2)\mathrm{d}x$.

而面积质心的纵坐标 $\eta=\int_{x_1}^{x_2}(y_2^2-y_1^2)\mathrm{d}x/(2S)$. 所以

$$V_x=2\pi\cdot\left[\int_{x_1}^{x_2}(y_2^2-y_1^2)\mathrm{d}x\Big/(2S)\right]S=S\cdot 2\pi\eta.$$

例 34 旋转体容器是什么形状时，才能使液体流出时，液体表面的下降是均匀的？

解 如图 6.31 建立坐标系. 设孔的半径为单位厘米. 小孔中流出液体流量为

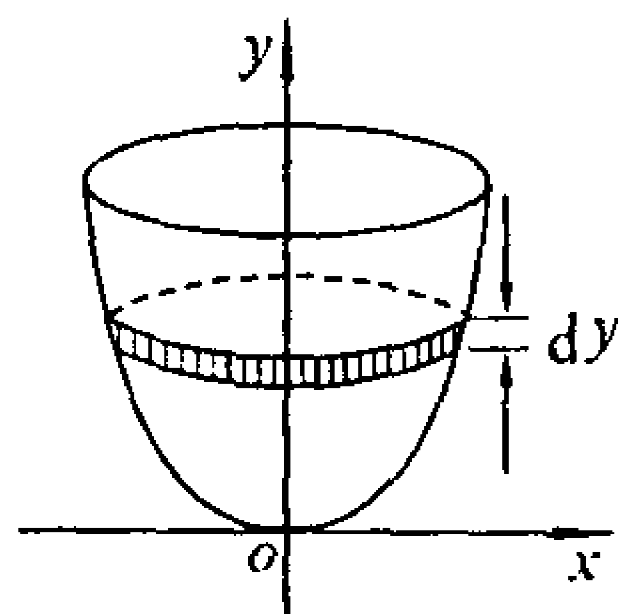


图 6.31

$$\mathrm{d}Q=\pi v\mathrm{d}t=\pi c\sqrt{2gy}\mathrm{d}t.$$

而容器内减少的液体量为 $A(y)\mathrm{d}y$.

故由 $$\pi c\sqrt{2gy}\mathrm{d}t=A(y)\mathrm{d}y$$

$$\Rightarrow\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}=\frac{A(y)}{\pi c\sqrt{2gy}}.$$

由题设$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}$是常数，令$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}=k$，则有

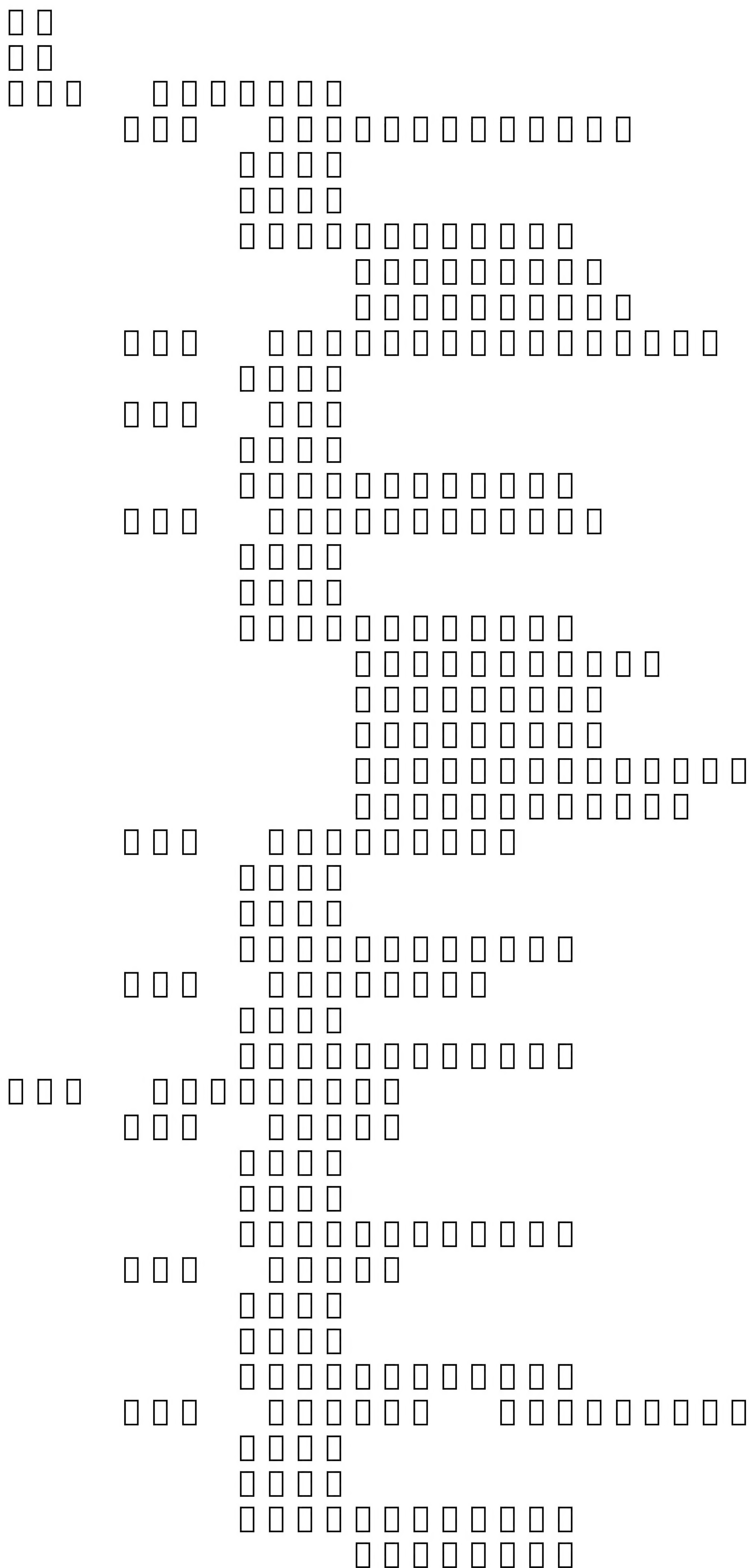
$$\frac{A(y)}{\pi c\sqrt{2gy}}=k\Rightarrow A(y)=k_1\sqrt{y}\ (k_1\text{ 为常数}).$$

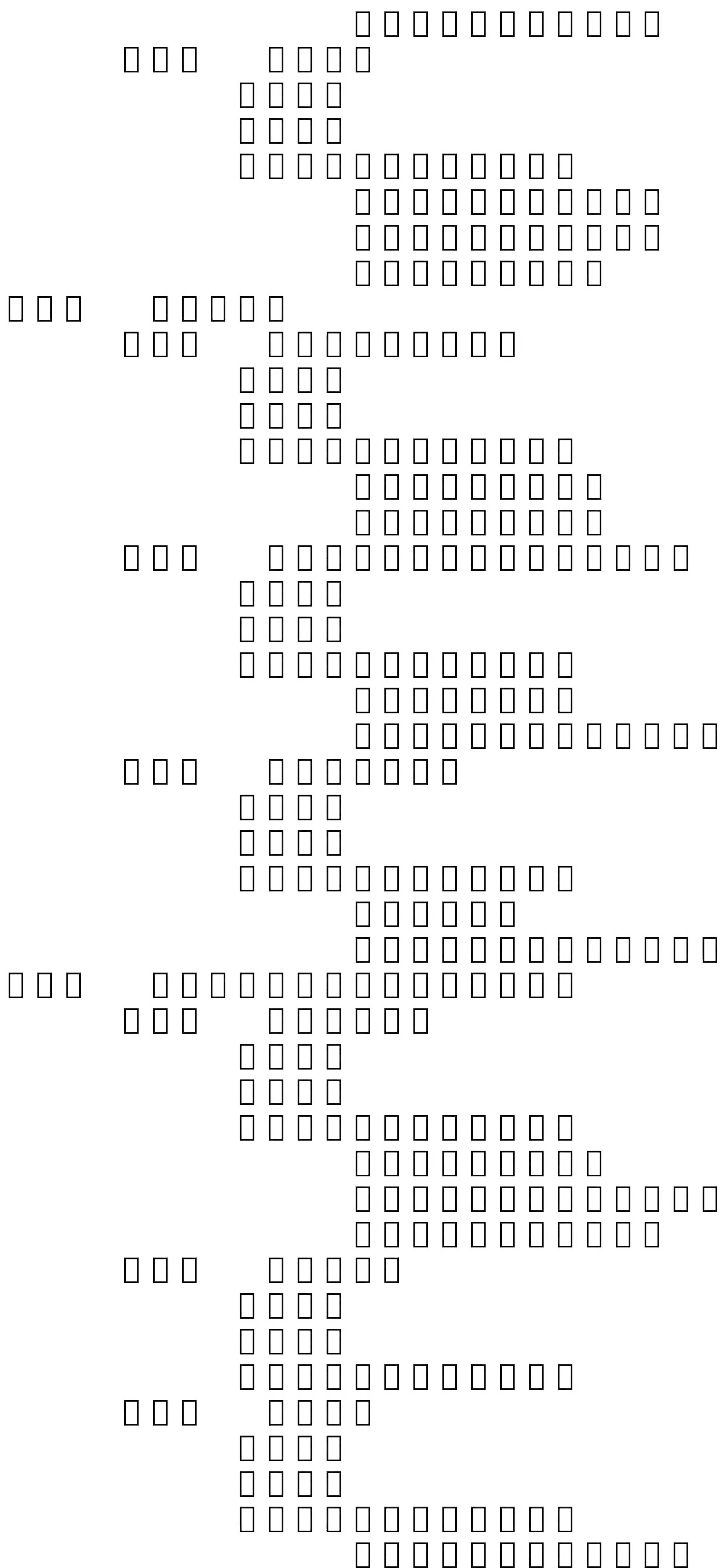
因为旋转体是由 $y=f(x)$ 绕 y 轴旋转所得，故 $A(y)=\pi x^2$，所以

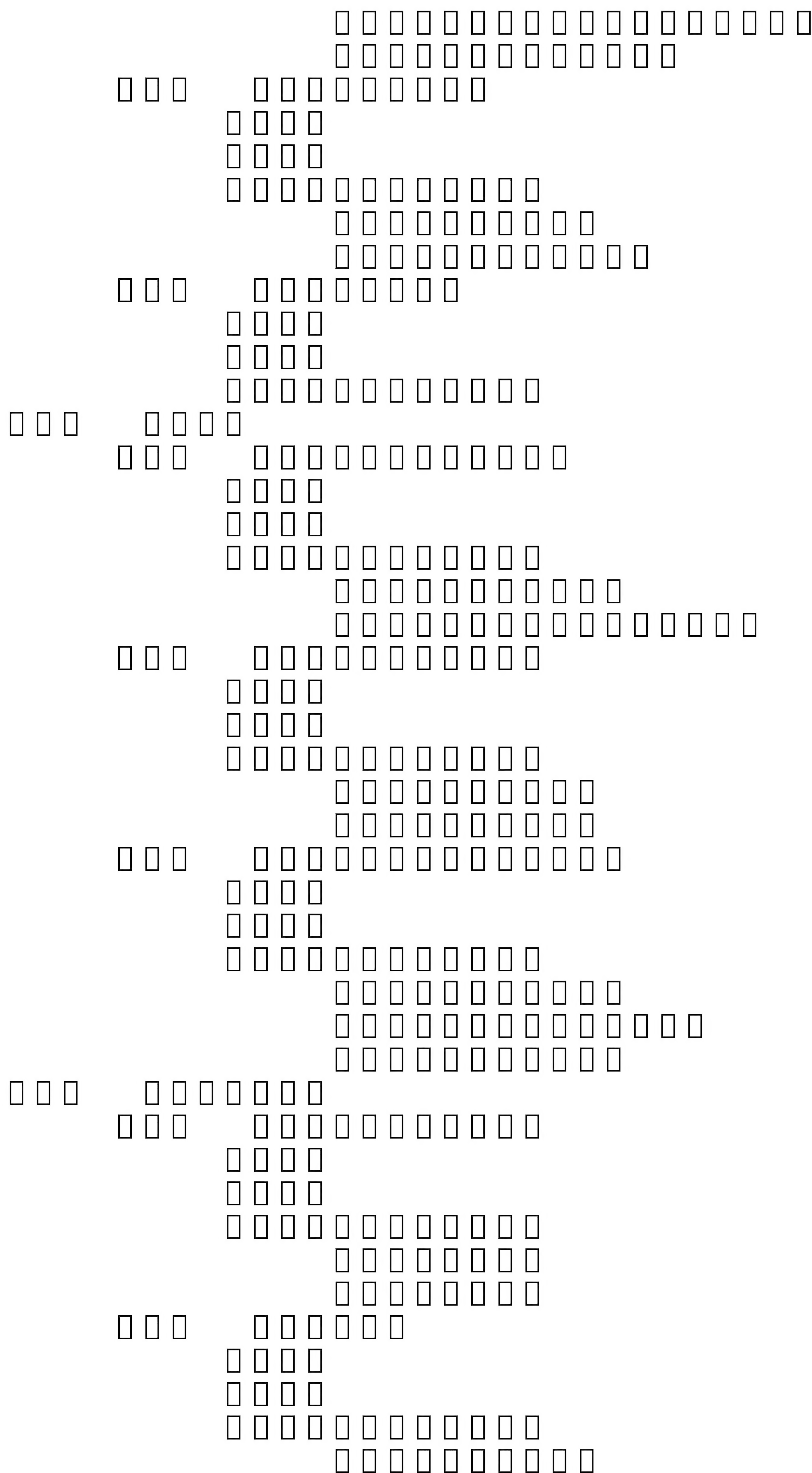
$$y=cx^4(c\text{ 为常数}).$$

即旋转曲面是由曲线 $y=cx^4$ 旋转而成的.

[General Information]
□□=□□□□ □□□□□□□□ □□□□
□□=□□□ □□
□□=489
SS□=11219844
□□□□=2003□07□□1□







[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible] [illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible] [illegible]([illegible])
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible] [illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]